DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 7Sp2za

Auf dem Dach einer Schule wird die Leistung einer Solaranlage an einem klaren Frühlingstag modellhaft beschrieben. Die momentane elektrische Leistung $P(t)$ (in kW) hängt von der Zeit t (in Stunden seit 06:00 Uhr) ab: $P(t) = -0.08t^3 + 0.96t^2$ für $0 \leq t \leq 12$.
(Hinweis: $t = 0$ entspricht 06:00 Uhr, $t = 3$ entspricht 09:00 Uhr etc.)
Die Schulleitung möchte abschätzen, ob die erzeugte Energie ausreicht, um am selben Tag die Tablets für eine Projektwoche zu laden.

a) Zu Beginn und am Ende des betrachteten Zeitraums soll die Anlage „praktisch nichts“ liefern. Prüfen Sie am Modell, ob das plausibel ist, und deuten Sie die Ergebnisse im Kontext.

$$\begin{aligned} P(t) &= 0 \\ 0 &= -0.08t^3 + 0.96t^2 \\ &= t^2(-0.08t + 0.96) \quad | \; t_1 = 0 \\ \\ 0 &= -0.08t + 0.96 \quad | \; +0.08t \\ 0.08t &= 0.96 \quad | \; :0.08 \\ t_2 &= 12 \end{aligned}$$

Um 06:00 Uhr ($t = 0$) und um 18:00 Uhr ($t = 12$) liefert die Anlage laut Modell keine Leistung. Das ist plausibel, weil zu Beginn und am Ende des betrachteten Tageszeitraums kaum bzw. keine Sonneneinstrahlung auf die Solaranlage trifft.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Für die Planung der stärksten Einspeisezeit ist wichtig, wann die Leistung am größten ist. Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt das Maximum im Modell liegt und wie groß die maximale Leistung ist.

$$P'(t) = -0.24t^2 + 1.92t$$
$$P''(t) = -0.48t + 1.92$$

notw. Bed.: $P'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.24t^2 + 1.92t \\ &= t(-0.24t + 1.92) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.24t + 1.92 \quad | \, +0.24t \\ 0.24t &= 1.92 \quad | \, :0.24 \\ t_2 &= 8 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $P'(t) = 0 \quad \wedge \quad P''(t) \neq 0$

$$P''(0) = -0.48 \cdot 0 + 1.92 = 1.92 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$P''(8) = -0.48 \cdot 8 + 1.92 = -1.92 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $P(t) = y$

$$P(8) = -0.08 \cdot 8^3 + 0.96 \cdot 8^2 = 20.48 \qquad \Rightarrow \text{HP}(8 \mid 20.48)$$

Die maximale Leistung beträgt also 20.48 kW und wird nach 8 Stunden erreicht, also um 14:00 Uhr.

c) Für den Energieertrag zählt nicht die momentane Leistung, sondern die über die Zeit aufsummierte Energie. Bestimmen Sie die insgesamt erzeugte elektrische Energie von 06:00 Uhr bis 18:00 Uhr in kWh. (Im Modell entspricht das der „Fläche“ zwischen $P(t)$ und der t-Achse im Intervall $[0; 12]$.)

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{12} (-0.08t^3 + 0.96t^2)\, dt \\ &= \left[-0.02t^4 + 0.32t^3\right]_0^{12} \\ &= -0.02 \cdot 12^4 + 0.32 \cdot 12^3 - 0 \\ &= -414.72 + 552.96 \\ &= 138.24 \end{aligned}$$

Die insgesamt erzeugte elektrische Energie beträgt also 138.24 kWh.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Ein Teil der Energie wird direkt verbraucht, der Rest geht in einen Speicher. Von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr ist der Verbrauch besonders hoch. Ermitteln Sie, wie viel Energie die Anlage zwischen 10:00 Uhr und 14:00 Uhr liefert, und vergleichen Sie diesen Anteil prozentual mit dem gesamten Tagesertrag aus c).

10:00 Uhr entspricht $t = 4$ und 14:00 Uhr entspricht $t = 8$.

$$\begin{aligned} E_{[4;8]} &= \int_4^8 (-0.08t^3 + 0.96t^2)\,dt \\ &= \left[-0.02t^4 + 0.32t^3\right]_4^8 \\ &= -0.02 \cdot 8^4 + 0.32 \cdot 8^3 - \left(-0.02 \cdot 4^4 + 0.32 \cdot 4^3\right) \\ &= -81.92 + 163.84 - (-5.12 + 20.48) \\ &= 81.92 - 15.36 \\ &= 66.56 \end{aligned}$$

Der prozentuale Anteil am gesamten Tagesertrag beträgt:

$$\frac{66.56}{138.24} \cdot 100 \approx 48.15$$

Die Anlage liefert zwischen 10:00 Uhr und 14:00 Uhr 66.56 kWh. Damit werden in diesem Zeitraum etwa 48.15 % des gesamten Tagesertrags erzeugt.

e) Die Tablets benötigen zusammen 18 kWh. Begründen Sie mit Ihren Ergebnissen, ob die Tagesproduktion im Modell dafür reicht. Falls ja: Wie viel Reserve bleibt ungefähr?

Die Tagesproduktion beträgt laut Teilaufgabe c) 138.24 kWh, die Tablets benötigen 18 kWh.

$$138.24 - 18 = 120.24$$

Die Tagesproduktion reicht also deutlich aus. Es bleibt eine Reserve von ungefähr 120.24 kWh.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**