DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 7Lh7tQ

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:

- Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 2$ ($x = 2$ ist doppelte Nullstelle)
- $f(0) = 4$

a) Was bedeutet „doppelte Nullstelle“ grafisch gesehen?

Grafisch bedeutet eine doppelte Nullstelle, dass der Graph die x-Achse an dieser Stelle nicht schneidet, sondern sie nur berührt. Der Graph wechselt dort also nicht die Seite der x-Achse.

b) Stellen Sie $f(x)$ in Faktorschreibweise auf.

Da $x = -1$ eine einfache Nullstelle und $x = 2$ eine doppelte Nullstelle ist, hat die Funktion die Form

$$f(x) = a(x+1)(x-2)^2$$

Bedingung $f(0) = 4$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \\ a(0+1)(0-2)^2 &= 4 \\ 4a &= 4 \quad | :4 \\ a &= 1 \\ \Rightarrow f(x) &= (x+1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

c) Wandeln Sie $f(x)$ in die Normalform um.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)^2 \\ &= (x+1)(x^2-4x+4) \\ &= x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4 \\ &= x^3 - 3x^2 + 4 \end{aligned}$$

d) Prüfen Sie mit $f(x)$ aus c) rechnerisch die Nullstellen mit geeigneten Lösungsverfahren.

$$0 = x^3 - 3x^2 + 4 \quad | \, x_1 = -1$$

	1	−3	0	4
−1		−1	4	−4
	1	−4	4	0

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4x + 4 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} \\ x_2 = 2 \quad &\vee \quad x_3 = 2 \end{aligned}$$

Die Nullstelle $x = 2$ ist doppelt, $x = -1$ ist einfach. Damit sind die Nullstellen bestätigt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**