DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 6kwRJq

Das Pumpspeicherkraftwerk Herdecke ist eine Nachfolgeanlage des Pumpspeicherkraftwerks Koepchenwerk und befindet sich im Besitz der RWE. Gelegen am Hengsteysee an der Südostflanke des Ardeygebirges, ist es das größte Pumpspeicherkraftwerk in Nordrhein-Westfalen. Um eine stabile Stromversorgung auch in die nördlichen Regionen zu gewährleisten, verlaufen Hochspannungsleitungen über das bergige Gebiet. Dabei wird das Stromkabel zwischen hohen Masten gespannt, wodurch es eine charakteristische Parabelform annimmt. Der Abstand zwischen zwei Masten beträgt $L = 200\,\text{m}$, während der Höhenunterschied der beiden Masten $h = 40\,\text{m}$ beträgt.

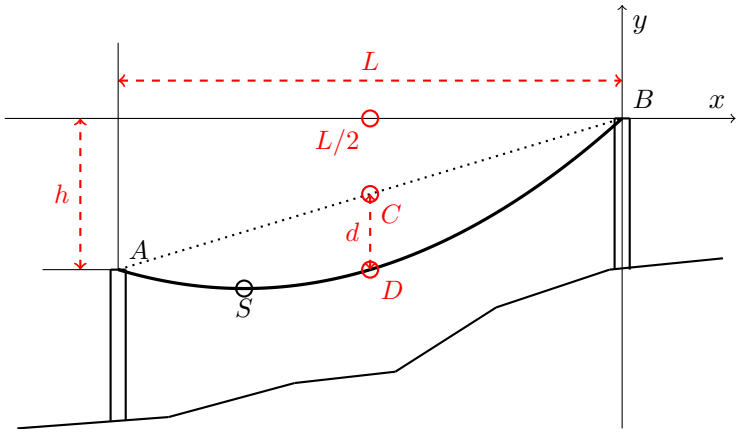


Abbildung 1: Sowohl die (abgeänderte) Aufgabenstellung als auch die Zeichnung zum Koepchenwerk basieren auf einer Quelle unbekannten Ursprungs. Bei urheberrechtlichen Ansprüchen wird die Quelle selbstverständlich ergänzt oder das Material entfernt.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel sowohl in Scheitelpunktform als auch in Normalform, wenn der tiefste Punkt des Kabels S genau $50\,\text{m}$ von Mast A entfernt ist und sich $5\,\text{m}$ unterhalb der Aufhängung des Seils befindet.

Durch die Angaben zu L und h im Aufgabentext lässt sich der Punkt A ermitteln. Aus den weiteren Angaben in Teilaufgabe a) lässt sich der Scheitelpunkt S erschließen.

$$A(-200 \mid -40), \quad S(-150 \mid -45)$$

$$f(x) = a(x+150)^2 - 45$$

$$\begin{aligned} f(-200) &= -40 \\ a(-200+150)^2 - 45 &= -40 && \mid +45 \\ a \cdot (-50)^2 &= 5 \\ 2500a &= 5 && \mid :2500 \\ a &= 0.002 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= 0.002(x+150)^2 - 45 \\ &= 0.002(x^2 + 300x + 22\,500) - 45 \\ &= 0.002x^2 + 0.6x + 45 - 45 \\ &= 0.002x^2 + 0.6x \end{aligned}$$

Scheitelpunktform: $f(x) = 0.002(x+150)^2 - 45$, Normalform: $f(x) = 0.002x^2 + 0.6x$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Ermitteln Sie die Lage des Scheitelpunkts, wenn sich bei $L/2$ der Durchhang auf $d = 15\,\text{m}$ beläuft.

Um den Punkt der Parabel an der Stelle $L/2$ mit dem gegebenen Durchhang zu bestimmen, wird zunächst die Funktionsgleichung der Strecke $\overline{AB}$ benötigt, also die lineare Verbindung zwischen den Punkten A und B.

$$A(-200 \mid -40), \quad B(0 \mid 0)$$

$$m = \frac{0-(-40)}{0-(-200)} = \frac{40}{200} = 0.2$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ 0.2 \cdot 0 + b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = 0.2x$$

$$g(-100) = 0.2 \cdot (-100) = -20$$

Der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ (bei $L/2$) liegt also bei $C(-100 \mid -20)$. Da der Durchhang bei $L/2$ mit 15 m angegeben ist, ergibt sich daraus ein Punkt auf der Parabel: $D(-100 \mid -35)$.

Somit sind drei Punkte der quadratischen Funktion gegeben (A, B und D), und die Funktionsgleichung kann mithilfe des Gauß-Verfahrens bestimmt werden.

$A(-200 \mid -40)$, $B(0 \mid 0)$, $D(-100 \mid -35)$

$$\begin{aligned} -40 = a \cdot (-200)^2 + b \cdot (-200) + c &= 40\,000a - 200b + c \\ 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= c \\ -35 = a \cdot (-100)^2 + b \cdot (-100) + c &= 10\,000a - 100b + c \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt direkt $c = 0$. Eingesetzt in die übrigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 40\,000a - 200b = -40 \\ \text{II} \quad & 10\,000a - 100b = -35 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 40\,000 & -200 & -40 \\ 10\,000 & -100 & -35 \end{array}\right) \qquad 4 \cdot \text{II} - \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 40\,000 & -200 & -40 \\ 0 & -200 & -100 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -200b = -100 && \mid :(-200) \\ & b = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 40\,000a - 200 \cdot 0.5 = -40 && \mid +100 \\ & 40\,000a = 60 && \mid :40\,000 \\ & a = 0.0015 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0.0015x^2 + 0.5x$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

Um abschließend die Koordinaten des Scheitelpunktes zu bestimmen, wird die Normalform mithilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform umgewandelt.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0.0015x^2 + 0.5x \\
&= 0.0015\left(x^2 + \frac{1000}{3}x\right) \\
&= 0.0015\left(x^2 + \frac{1000}{3}x + \left(\frac{500}{3}\right)^2 - \left(\frac{500}{3}\right)^2\right) \\
&= 0.0015\left(\left(x + \frac{500}{3}\right)^2 - \left(\frac{500}{3}\right)^2\right) \\
&= 0.0015\left(x + \frac{500}{3}\right)^2 - \frac{125}{3} \\
&\Rightarrow S\left(-\frac{500}{3} \;\middle|\; -\frac{125}{3}\right) \approx S(-166.67 \mid -41.67)
\end{aligned}$$

Der tiefste Punkt des Kabels liegt damit etwa 33.33 m von Mast A entfernt und 1.67 m unterhalb der Aufhängung an Mast A.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**