DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 6fCepN

Bestimmen Sie jeweils das Differenzintegral im Intervall zwischen der jeweils kleinsten und größten Schnittstelle.

a) $f(x) = x^3 - 3x, \quad g(x) = x^2 - x$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 3x - (x^2 - x) \\ &= x^3 - 3x - x^2 + x \\ &= x^3 - x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - x^2 - 2x \\ &= x(x^2 - x - 2) && | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - x - 2 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 2} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - (-1)^2\right) \\ &= 4 - \frac{8}{3} - 4 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) \\ &= -\frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12}\right) \\ &= -\frac{9}{4} = -2.25 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x, \quad g(x) = -x^2 - x$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 2x^2 - x - (-x^2 - x) \\ &= x^3 - 2x^2 - x + x^2 + x \\ &= x^3 - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - x^2 \\ &= x^2(x-1) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x - 1 && \mid +1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x^3 - x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 0 \\ &= -\frac{1}{12} \approx -0.083 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = -x^3 + 4x, \quad g(x) = x^2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^3 + 4x - x^2 \\ &= -x^3 - x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^3 - x^2 + 4x \\ &= x(-x^2 - x + 4) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 - x + 4 && | \; :(-1) \\ &= x^2 + x - 4 \\ x_{2/3} &= -0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 4} \\ x_2 &\approx 1.562 \quad \vee \quad x_3 \approx -2.562 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2.562}^{1.562} (-x^3 - x^2 + 4x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_{-2.562}^{1.562} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1.562^4 - \frac{1}{3} \cdot 1.562^3 + 2 \cdot 1.562^2 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-2.562)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-2.562)^3 + 2 \cdot (-2.562)^2 \right) \\ &\approx 2.121 - 7.962 \\ &\approx -5.841 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = 0.5x^3 - 2x, \quad g(x) = 0.5x^2 - x$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 0.5x^3 - 2x - (0.5x^2 - x) \\ &= 0.5x^3 - 2x - 0.5x^2 + x \\ &= 0.5x^3 - 0.5x^2 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^3 - 0.5x^2 - x \\ &= x(0.5x^2 - 0.5x - 1) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^2 - 0.5x - 1 && \mid :0.5 \\ &= x^2 - x - 2 \\ x_{2/3} &= 0.5 \pm \sqrt{0.5^2 + 2} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} (0.5x^3 - 0.5x^2 - x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} \\ &= \frac{1}{8} \cdot 2^4 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{8} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{6} \cdot (-1)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-1)^2\right) \\ &= 2 - \frac{4}{3} - 2 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{4}{3} - \left(-\frac{5}{24}\right) \\ &= -\frac{9}{8} = -1.125 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = x^3 - 4x, \quad g(x) = 2x^2 - 4x$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 4x - (2x^2 - 4x) \\ &= x^3 - 4x - 2x^2 + 4x \\ &= x^3 - 2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 2x^2 \\ &= x^2(x-2) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x - 2 && \mid +2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (x^3 - 2x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 0 \\ &= 4 - \frac{16}{3} \\ &= -\frac{4}{3} \approx -1.333 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = -x^3 + x, \quad g(x) = x^2 - 1$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^3 + x - (x^2 - 1) \\ &= -x^3 + x - x^2 + 1 \\ &= -x^3 - x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

$$0 = -x^3 - x^2 + x + 1 \qquad | \, x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|cccc} & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 1 && | \, :(-1) \\ &= x^2 - 1 && | \, +1 \\ x^2 &= 1 && | \, \sqrt{} \\ x_2 &= 1 \quad \vee \quad x_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} (-x^3 - x^2 + x + 1) \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{11}{12} - \left(-\frac{5}{12} \right) \\ &= \frac{4}{3} \approx 1.333 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = x^3 - 2x, \quad g(x) = x^2 - 2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 2x - (x^2 - 2) \\ &= x^3 - 2x - x^2 + 2 \\ &= x^3 - x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

$$0 = x^3 - x^2 - 2x + 2 \qquad | \, x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & & 1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2 && | \, +2 \\ x^2 &= 2 && | \, \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{2} \approx 1.414 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{2} \approx -1.414 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^3 - x^2 - 2x + 2)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{2})^4 - \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \\ &\quad - \left(\frac{1}{4} \cdot (-\sqrt{2})^4 - \frac{1}{3} \cdot (-\sqrt{2})^3 - (-\sqrt{2})^2 + 2 \cdot (-\sqrt{2}) \right) \\ &= 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 + 2\sqrt{2} - \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 - 2\sqrt{2} \right) \\ &= -1 + \frac{4\sqrt{2}}{3} - \left(-1 - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \approx 3.771 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $f(x) = -0.5x^3 + 3x, \quad g(x) = x^2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -0.5x^3 + 3x - x^2 \\ &= -0.5x^3 - x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.5x^3 - x^2 + 3x \\ &= x(-0.5x^2 - x + 3) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.5x^2 - x + 3 && | \; :(-0.5) \\ &= x^2 + 2x - 6 \\ x_{2/3} &= -1 \pm \sqrt{1^2 + 6} \\ x_2 &\approx 1.646 \quad \vee \quad x_3 \approx -3.646 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3.646}^{1.646} (-0.5x^3 - x^2 + 3x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3.646}^{1.646} \\ &= -\frac{1}{8} \cdot 1.646^4 - \frac{1}{3} \cdot 1.646^3 + \frac{3}{2} \cdot 1.646^2 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{8} \cdot (-3.646)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-3.646)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-3.646)^2 \right) \\ &\approx 1.660 - 14.007 \\ &\approx -12.347 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**