DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 6ePAE7

In Dortmund wird der Verlauf einer winterlichen Grippewelle über mehrere Wochen hinweg beobachtet. Als Beginn der Auswertung gilt der Zeitpunkt, an dem die gemeldeten wöchentlichen Fallzahlen erstmals eine relevante Größenordnung erreichen.
Die Messreihe startet in Kalenderwoche 47. Zu diesem Zeitpunkt werden 45 Grippefälle erfasst. In den folgenden Wochen steigt die Zahl der Erkrankungen zunächst deutlich an, da sich Infektionen in der kalten Jahreszeit leichter verbreiten (mehr Zeit in Innenräumen, mehr Kontakte, weniger Lüften). Den Höchststand erreicht die Welle nach 9 Wochen mit 1290 Fällen; nach 18 Wochen werden keine Grippeinfektionen mehr gemeldet. Gegen Ende flacht der Verlauf typischerweise spürbar ab, weil sich das Infektionsgeschehen „ausläuft“ und weniger Neuinfektionen auftreten.
Für diese modellhafte Betrachtung wird angenommen, dass der wöchentliche Krankheitsverlauf durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben werden kann. Dabei steht x für die Anzahl der Wochen seit KW 47 (also $x = 0$ entspricht KW 47) und $f(x)$ für die Anzahl der Grippefälle in der jeweiligen Woche.

Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung und bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion dritten Grades $f(x)$, die den Verlauf modelliert. Stellen Sie passende Bedingungen auf und berechnen Sie anschließend den Funktionsterm.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Start mit 45 Fällen, Höchststand HP(9 | 1290), keine Fälle mehr nach 18 Wochen:

$$\begin{aligned}
f(0) = 45 \quad &\Rightarrow \quad 45 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d &&= d \\
f(9) = 1290 \quad &\Rightarrow \quad 1290 = a \cdot 9^3 + b \cdot 9^2 + c \cdot 9 + d &&= 729a + 81b + 9c + d \\
f'(9) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 3a \cdot 9^2 + 2b \cdot 9 + c &&= 243a + 18b + c \\
f(18) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot 18^3 + b \cdot 18^2 + c \cdot 18 + d &&= 5832a + 324b + 18c + d
\end{aligned}$$

Aus der ersten Bedingung folgt direkt $d = 45$. Eingesetzt in die übrigen Bedingungen:

$$\begin{aligned}
729a + 81b + 9c + 45 &= 1290 \quad | -45 \\
729a + 81b + 9c &= 1245
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5832a + 324b + 18c + 45 &= 0 \quad | -45 \\
5832a + 324b + 18c &= -45
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 729 & 81 & 9 & 1245 \\ 243 & 18 & 1 & 0 \\ 5832 & 324 & 18 & -45 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ 3 \cdot \text{II} - \text{I} \\ \text{III} - 8 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 729 & 81 & 9 & 1245 \\ 0 & -27 & -6 & -1245 \\ 0 & -324 & -54 & -10005 \end{array}\right) \quad \text{III} - 12 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 729 & 81 & 9 & 1245 \\ 0 & -27 & -6 & -1245 \\ 0 & 0 & 18 & 4935 \end{array}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

III $18c = 4935$ | :18

$c = \frac{1645}{6} \approx 274.167$

II $-27b - 6 \cdot \frac{1645}{6} = -1245$ | zusammenfassen

$-27b - 1645 = -1245$ | $+1645$

$-27b = 400$ | $:(-27)$

$b = -\frac{400}{27} \approx -14.815$

I $729a + 81 \cdot \left(-\frac{400}{27}\right) + 9 \cdot \frac{1645}{6} = 1245$ | zusammenfassen

$729a + 1267.5 = 1245$ | -1267.5

$729a = -22.5$ | :729

$a = -\frac{5}{162} \approx -0.031$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{162}x^3 - \frac{400}{27}x^2 + \frac{1645}{6}x + 45$

$\approx -0.031x^3 - 14.815x^2 + 274.167x + 45$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**