DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 5fTxR9

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, die y-Achse bei $y = 2$ schneidet und im Punkt $M(2 \mid 4)$ ein Maximum besitzt.
Da der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, kommen nur gerade Exponenten vor.

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

$$\begin{aligned}
f(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad c = 2 \\
f(2) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 4 = a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + 2 \quad = 16a + 4b + 2 \\
f'(2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 \quad = 32a + 4b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16a + 4b + 2 &= 4 \quad | -2 \\
16a + 4b &= 2
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 16 & 4 & 2 \\ 32 & 4 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{II} - 2 \cdot \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 16 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \quad -4b &= -4 \quad | :(-4) \\
b &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad 16a + 4 \cdot 1 &= 2 \quad | -4 \\
16a &= -2 \quad | :16 \\
a &= -\frac{1}{8} = -0.125
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = -0.125x^4 + x^2 + 2$$

Probe auf Maximum:

$$f''(2) = 12 \cdot (-0.125) \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 = -4 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}(2 \mid 4)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**