DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 5KD59N

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4.$$

Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Bereichs, der zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt (also die tatsächlich eingeschlossene Fläche).
Nullstellen:

$$\begin{aligned}
0 &= x^4 - 5x^2 + 4 && | \; x^2 = z \\
&= z^2 - 5z + 4 \\
z_{1/2} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 4} \\
z_1 = 4 \quad &\vee \quad z_2 = 1 && | \; x = \sqrt{z} \\
x_1 = 2 \quad &\vee \quad x_2 = -2 \quad \vee \quad x_3 = 1 \quad \vee \quad x_4 = -1
\end{aligned}$$

Teilflächen für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{5}{3} \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 - \left(\frac{1}{5} \cdot 0^5 - \frac{5}{3} \cdot 0^3 + 4 \cdot 0\right) \\
&= \frac{38}{15} - 0 \\
&= \frac{38}{15} \approx 2.533
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 (x^4 - 5x^2 + 4)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{5}{3} \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{5}{3} \cdot 1^3 + 4 \cdot 1\right) \\
&= \frac{16}{15} - \frac{38}{15} \\
&= -\frac{22}{15} \approx -1.467
\end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned}
A &= 2 \cdot (|A_1| + |A_2|) \\
&= 2 \cdot \left(\left|\frac{38}{15}\right| + \left|-\frac{22}{15}\right|\right) \\
&= 2 \cdot \frac{60}{15} \\
&= 8
\end{aligned}$$

Der tatsächlich eingeschlossene Flächeninhalt beträgt also 8 FE.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**