DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 5GRFL9

Berechnen Sie jeweils den geometrischen Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g. Der betrachtete Bereich liegt zwischen den Schnittpunkten.

a) $f(x) = -x^2 + 4x \qquad g(x) = x$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^2 + 4x - x \\ &= -x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 3x \\ &= x(-x + 3) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x + 3 && \mid +x \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 1.5x^2 \right]_0^3 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 1.5 \cdot 3^2 - 0 \\ &= -9 + 13.5 \\ &= 4.5 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = 0.5x^2 - 2x + 1 \qquad g(x) = -x + 1$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 0.5x^2 - 2x + 1 - (-x + 1) \\ &= 0.5x^2 - 2x + 1 + x - 1 \\ &= 0.5x^2 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x^2 - x \\ &= x(0.5x - 1) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.5x - 1 && \mid +1 \\ 0.5x &= 1 && \mid :0.5 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (0.5x^2 - x)\,dx &= \left[\frac{1}{6}x^3 - 0.5x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 0.5 \cdot 2^2 - 0 \\ &= \frac{4}{3} - 2 \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$A = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = 2x + 3$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^2 - 1 - (2x + 3) \\ &= x^2 - 1 - 2x - 3 \\ &= x^2 - 2x - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x - 4 \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 4} \\ x_1 &\approx 3.236 \quad \vee \quad x_2 \approx -1.236 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1.236}^{3.236} (x^2 - 2x - 4)\,dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x\right]_{-1.236}^{3.236} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3.236^3 - 3.236^2 - 4 \cdot 3.236 \\ &\quad - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1.236)^3 - (-1.236)^2 - 4 \cdot (-1.236)\right) \\ &= -12.120 - 2.787 \\ &= -14.907 \end{aligned}$$

$$A = |-14.907| = 14.907$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = -0.25x^2 + 2x + 4 \qquad g(x) = 0.5x + 2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -0.25x^2 + 2x + 4 - (0.5x + 2) \\ &= -0.25x^2 + 2x + 4 - 0.5x - 2 \\ &= -0.25x^2 + 1.5x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.25x^2 + 1.5x + 2 && | :(-0.25) \\ &= x^2 - 6x - 8 \\ x_{1/2} &= 3 \pm \sqrt{3^2 + 8} \\ x_1 &\approx 7.123 \quad \vee \quad x_2 \approx -1.123 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1.123}^{7.123} (-0.25x^2 + 1.5x + 2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^3 + 0.75x^2 + 2x \right]_{-1.123}^{7.123} \\ &= -\frac{1}{12} \cdot 7.123^3 + 0.75 \cdot 7.123^2 + 2 \cdot 7.123 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{12} \cdot (-1.123)^3 + 0.75 \cdot (-1.123)^2 + 2 \cdot (-1.123) \right) \\ &= 22.182 - (-1.182) \\ &= 23.364 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = x^3 - 4x \qquad g(x) = x$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^3 - 4x - x \\ &= x^3 - 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 5x \\ &= x(x^2 - 5) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 5 && | \; +5 \\ x^2 &= 5 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{5} \approx 2.236 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{5} \approx -2.236 \end{aligned}$$

Da die Differenzfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist, sind die beiden Teilflächen gleich groß und es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{5}} (x^3 - 5x)\, dx &= \left[0.25x^4 - 2.5x^2\right]_0^{\sqrt{5}} \\ &= 0.25 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^4 - 2.5 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 - 0 \\ &= 6.25 - 12.5 \\ &= -6.25 \end{aligned}$$

$$A = 2 \cdot |-6.25| = 12.5$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = -x^3 + 3x^2 \qquad g(x) = x^2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^3 + 3x^2 - x^2 \\ &= -x^3 + 2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^3 + 2x^2 \\ &= x^2(-x + 2) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x + 2 && \mid +x \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2)\, dx \\ &= \left[-0.25x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= -0.25 \cdot 2^4 + \frac{2}{3} \cdot 2^3 - 0 \\ &= -4 + \frac{16}{3} \\ &= \frac{4}{3} \approx 1.333 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**