DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 58V5yL

Gegeben ist $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
0 &= x^4 - 10x^2 + 9 && | \; x^2 = z \\
&= z^2 - 10z + 9 \\
z_{1/2} &= 5 \pm \sqrt{5^2 - 9} \\
z_1 = 9 \quad &\vee \quad z_2 = 1 && | \; x = \sqrt{z} \\
x_1 = 3 \quad &\vee \quad x_2 = -3 \quad \vee \quad x_3 = 1 \quad \vee \quad x_4 = -1
\end{aligned}$$

b) Ermitteln Sie alle Extrempunkte.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 20x \\
f''(x) &= 12x^2 - 20 \\
f'''(x) &= 24x
\end{aligned}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= 4x^3 - 20x \\
&= x(4x^2 - 20) && | \; x_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= 4x^2 - 20 && | \; +20 \\
4x^2 &= 20 && | \; :4 \\
x^2 &= 5 && | \; \sqrt{} \\
x_2 = \sqrt{5} \approx 2.236 \quad &\vee \quad x_3 = -\sqrt{5} \approx -2.236
\end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned}
f''(0) &= 12 \cdot 0^2 - 20 = -20 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \\
f''(\sqrt{5}) &= 12 \cdot (\sqrt{5})^2 - 20 = 40 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\
f''(-\sqrt{5}) &= 12 \cdot (-\sqrt{5})^2 - 20 = 40 > 0 && \Rightarrow \text{TP}
\end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0^4 - 10 \cdot 0^2 + 9 = 9 && \Rightarrow \text{HP}(0 \mid 9) \\
f(\sqrt{5}) &= (\sqrt{5})^4 - 10 \cdot (\sqrt{5})^2 + 9 = -16 && \Rightarrow \text{TP}_1(2.24 \mid -16) \\
f(-\sqrt{5}) &= (-\sqrt{5})^4 - 10 \cdot (-\sqrt{5})^2 + 9 = -16 && \Rightarrow \text{TP}_2(-2.24 \mid -16)
\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie die lokale Änderungsrate in $x = 1$.

$$\begin{aligned}
f'(1) &= 4 \cdot 1^3 - 20 \cdot 1 \\
&= 4 - 20 \\
&= -16
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Berechnen Sie den/die Wendepunkt(e).

$$f''(x) = 12x^2 - 20$$
$$f'''(x) = 24x$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 20 && | +20 \\ 12x^2 &= 20 && | :12 \\ x^2 &= \frac{5}{3} && | \sqrt{} \\ x_1 &= \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1.291 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}} \approx -1.291 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''\left(\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = 24 \cdot \sqrt{\tfrac{5}{3}} \approx 30.984 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''\left(-\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = 24 \cdot \left(-\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) \approx -30.984 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f\left(\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 10 \cdot \frac{5}{3} + 9 = -\frac{44}{9} \approx -4.889 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.29 \mid -4.89)$$
$$f\left(-\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 10 \cdot \frac{5}{3} + 9 = -\frac{44}{9} \approx -4.889 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1.29 \mid -4.89)$$

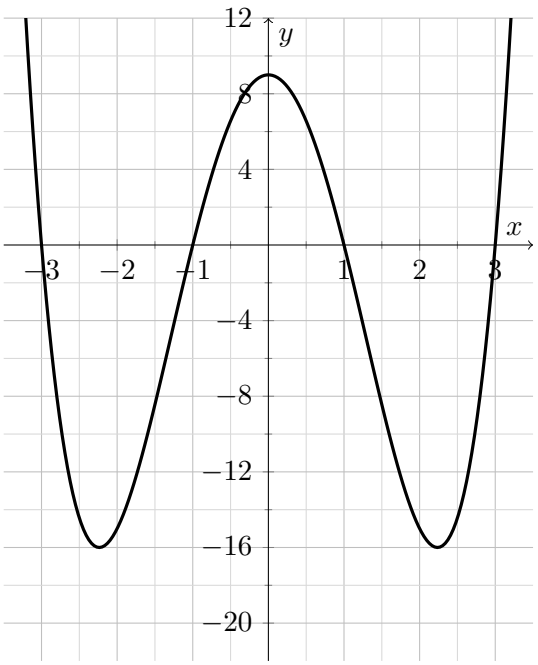
e) Geben Sie anhand von Grad und Leitkoeffizient an, wie der Graph „links“ und „rechts“ verläuft.

Da die Funktion geraden Grades ist und einen positiven Leitkoeffizienten besitzt, verläuft der Graph links nach oben und rechts nach oben, also von oben nach oben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) Zeichnen Sie den Graphen mithilfe der vorherigen Ergebnisse und einer Wertetabelle.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0	-15	0	9	0	-15	0



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**