# DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 4xDBnQ

Ein Hohlkörper entsteht, wenn der Bereich zwischen Außenradius $R(x)$ und Innenradius $r(x)$ um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie jeweils das Materialvolumen im angegebenen Intervall.

**a)** $R(x) = 4 \qquad r(x) = x \qquad$ Intervall $[0; 3]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } R(x)^2 - r(x)^2 &= 4^2 - x^2 \\ &= -x^2 + 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^3 \left(R(x)^2 - r(x)^2\right)\, dx \\ &= \pi \int_0^3 (-x^2 + 16)\, dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{3}x^3 + 16x\right]_0^3 \\ &= \pi \left(-\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 16 \cdot 3 - 0\right) \\ &= 39\pi \approx 122.522\end{aligned}$$

**b)** $R(x) = 3 + 0.5x \qquad r(x) = 1 + 0.25x \qquad$ Intervall $[0; 4]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } R(x)^2 - r(x)^2 &= (0.5x + 3)^2 - (0.25x + 1)^2 \\ &= \left(0.25x^2 + 2 \cdot 0.5x \cdot 3 + 9\right) - \left(0.0625x^2 + 2 \cdot 0.25x \cdot 1 + 1\right) \\ &= \left(0.25x^2 + 3x + 9\right) - \left(0.0625x^2 + 0.5x + 1\right) \\ &= 0.1875x^2 + 2.5x + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^4 \left(R(x)^2 - r(x)^2\right)\, dx \\ &= \pi \int_0^4 (0.1875x^2 + 2.5x + 8)\, dx \\ &= \pi \left[0.0625x^3 + 1.25x^2 + 8x\right]_0^4 \\ &= \pi \left(0.0625 \cdot 4^3 + 1.25 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - 0\right) \\ &= 56\pi \approx 175.929\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

**c)** $R(x) = 5 - 0.2x^2 \qquad r(x) = 2 \qquad \text{Intervall } [0;3]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } R(x)^2 - r(x)^2 &= (-0.2x^2 + 5)^2 - 2^2 \\ &= \left(0.04x^4 - 2 \cdot 0.2x^2 \cdot 5 + 25\right) - 4 \\ &= \left(0.04x^4 - 2x^2 + 25\right) - 4 \\ &= 0.04x^4 - 2x^2 + 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^3 \left(R(x)^2 - r(x)^2\right)\, dx \\ &= \pi \int_0^3 (0.04x^4 - 2x^2 + 21)\, dx \\ &= \pi \left[0.008x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 21x\right]_0^3 \\ &= \pi \left(0.008 \cdot 3^5 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 + 21 \cdot 3 - 0\right) \\ &= 46.944\pi \approx 147.479\end{aligned}$$

**d)** $R(x) = 4 - 0.25x^2 \qquad r(x) = 1 + 0.5x \qquad \text{Intervall } [0;2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } R(x)^2 - r(x)^2 &= (-0.25x^2 + 4)^2 - (0.5x + 1)^2 \\ &= \left(0.0625x^4 - 2 \cdot 0.25x^2 \cdot 4 + 16\right) \\ &\quad - \left(0.25x^2 + 2 \cdot 0.5x \cdot 1 + 1\right) \\ &= \left(0.0625x^4 - 2x^2 + 16\right) - \left(0.25x^2 + x + 1\right) \\ &= 0.0625x^4 - 2.25x^2 - x + 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 \left(R(x)^2 - r(x)^2\right)\, dx \\ &= \pi \int_0^2 (0.0625x^4 - 2.25x^2 - x + 15)\, dx \\ &= \pi \left[0.0125x^5 - 0.75x^3 - 0.5x^2 + 15x\right]_0^2 \\ &= \pi \left(0.0125 \cdot 2^5 - 0.75 \cdot 2^3 - 0.5 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 - 0\right) \\ &= 22.4\pi \approx 70.372\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

**e)** $R(x) = 2 + x^2 \qquad r(x) = x \qquad \text{Intervall } [0; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } R(x)^2 - r(x)^2 &= (x^2+2)^2 - x^2 \\ &= \left(x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 4\right) - x^2 \\ &= \left(x^4 + 4x^2 + 4\right) - x^2 \\ &= x^4 + 3x^2 + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 \left(R(x)^2 - r(x)^2\right)\, dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^4 + 3x^2 + 4)\, dx \\ &= \pi \left[0.2x^5 + x^3 + 4x\right]_0^2 \\ &= \pi \left(0.2 \cdot 2^5 + 2^3 + 4 \cdot 2 - 0\right) \\ &= 22.4\pi \approx 70.372\end{aligned}$$

**f)** $R(x) = 3 \qquad r(x) = 0.5x^2 + 0.5 \qquad \text{Intervall } [0; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } R(x)^2 - r(x)^2 &= 3^2 - (0.5x^2 + 0.5)^2 \\ &= 9 - \left(0.25x^4 + 2 \cdot 0.5x^2 \cdot 0.5 + 0.25\right) \\ &= 9 - \left(0.25x^4 + 0.5x^2 + 0.25\right) \\ &= -0.25x^4 - 0.5x^2 + 8.75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 \left(R(x)^2 - r(x)^2\right)\, dx \\ &= \pi \int_0^2 (-0.25x^4 - 0.5x^2 + 8.75)\, dx \\ &= \pi \left[-0.05x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 8.75x\right]_0^2 \\ &= \pi \left(-0.05 \cdot 2^5 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 + 8.75 \cdot 2 - 0\right) \\ &= \frac{437}{30}\pi \approx 45.763\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**