DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 4pUYcv

In einer Lackierstraße für Karosserieteile wird die Schichtdicke einer Klarlackschicht während eines Sprühdurchgangs überwacht. Obwohl die Anlage mit festen Einstellungen arbeitet, ist die Schichtdicke nicht zu jedem Zeitpunkt gleich: Zu Beginn des Sprühvorgangs baut sich der Lacknebel erst auf, in der Mitte wird am gleichmäßigsten beschichtet, und gegen Ende nimmt die aufgetragene Menge wieder ab (z. B. durch veränderte Strömung und Auslauf des Sprühbilds).
Ein Sensor misst deshalb während eines einzelnen Durchgangs die momentane Schichtdicke. Der zeitliche Verlauf wird modellhaft durch eine Funktion beschrieben:

$$d(t) = \frac{1}{1500}t^3 - \frac{59}{1000}t^2 + \frac{33}{25}t + 90$$

Dabei ist t die Zeit seit Beginn des Sprühdurchgangs in Sekunden ($0 \le t \le 40$) und $d(t)$ die Schichtdicke in μm.
Für die Qualitätskontrolle ist nicht nur interessant, wie dick die Schicht zu einzelnen Zeitpunkten ist, sondern vor allem, wie „dick im Durchschnitt“ über den gesamten Durchgang beschichtet wurde – also die mittlere Schichtdicke über das Intervall $[0; 40]$.

Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung zur Klarlackschichtdicke $d(t)$.

a) Für die Qualitätskontrolle wird eine einzige Kennzahl benötigt, die die Beschichtung über den gesamten Sprühdurchgang „zusammenfasst“. Bestimmen Sie diese mittlere Schichtdicke und geben Sie sie in μm an.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{40-0}\int_0^{40}\left(\frac{1}{1500}t^3 - \frac{59}{1000}t^2 + \frac{33}{25}t + 90\right)\,dt \\
&= \frac{1}{40}\left[\frac{1}{6000}t^4 - \frac{59}{3000}t^3 + \frac{33}{50}t^2 + 90t\right]_0^{40} \\
&= \frac{1}{40}\left(\frac{1}{6000}\cdot 40^4 - \frac{59}{3000}\cdot 40^3 + \frac{33}{50}\cdot 40^2 + 90\cdot 40 - 0\right) \\
&= \frac{1}{40}\left(\frac{1280}{3} - \frac{3776}{3} + 1056 + 3600\right) \\
&= \frac{1}{40}(-832 + 4656) \\
&= \frac{3824}{40} = 95.6
\end{aligned}$$

Die mittlere Schichtdicke beträgt $95.6\,\mu$m.

b) Das Qualitätsfenster lautet: „im Mittel $95\,\mu\text{m} \pm 1\,\mu$m“. Ordnen Sie Ihren Wert aus a) ein und treffen Sie eine begründete Aussage, ob der Durchgang im Modell als „in Ordnung“ gelten kann.

$$94\,\mu\text{m} \le 95.6\,\mu\text{m} \le 96\,\mu\text{m}$$

Die mittlere Schichtdicke von $95.6\,\mu$m liegt im erlaubten Qualitätsfenster von $94\,\mu$m bis $96\,\mu$m. Der Durchgang kann daher im Modell als „in Ordnung“ bewertet werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Die Schichtdicken dürfen nicht kleiner als $80\,\mu$m, aber auch nicht größer als $160\,\mu$m sein. Prüfen Sie rechnerisch, ob die vorgegebenen Minimal- und Maximalwerte eingehalten werden.

$$d'(t) = \frac{1}{500}t^2 - \frac{59}{500}t + \frac{33}{25}$$
$$d''(t) = \frac{1}{250}t - \frac{59}{500}$$

notw. Bed.: $d'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{500}t^2 - \frac{59}{500}t + \frac{33}{25} \qquad | \cdot 500 \\ &= t^2 - 59t + 660 \\ t_{1/2} &= 29.5 \pm \sqrt{29.5^2 - 660} \\ t_1 &= 44 \quad \vee \quad t_2 = 15 \end{aligned}$$

Im Intervall $[0; 40]$ ist nur $t = 15$ relevant.

hinr. Bed.: $d'(t) = 0 \quad \wedge \quad d''(t) \neq 0$

$$d''(15) = \frac{1}{250} \cdot 15 - \frac{59}{500} = -\frac{29}{500} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $d(t) = y$

$$d(15) = \frac{1}{1500} \cdot 15^3 - \frac{59}{1000} \cdot 15^2 + \frac{33}{25} \cdot 15 + 90 = 98.775 \qquad \Rightarrow \text{HP}(15 \mid 98.78)$$

Randwerte:

$$d(0) = 90$$
$$d(40) = \frac{1}{1500} \cdot 40^3 - \frac{59}{1000} \cdot 40^2 + \frac{33}{25} \cdot 40 + 90 \approx 91.067$$

Die kleinste Schichtdicke beträgt $90\,\mu$m (zu Beginn), die größte etwa $98.78\,\mu$m (nach 15 Sekunden). Wegen $80 \leq 90$ und $98.78 \leq 160$ werden die vorgegebenen Minimal- und Maximalwerte eingehalten.

d) Begründen Sie kurz, warum in dieser Situation eine Betrachtung „über den gesamten Zeitraum“ sinnvoller ist als die Beurteilung anhand eines einzelnen Messwerts (z. B. nur am Anfang oder nur am Ende des Sprühvorgangs). Gibt es eine Alternative?

Ein einzelner Messwert beschreibt immer nur einen Zeitpunkt des Sprühdurchgangs. Da sich die Schichtdicke während des gesamten Prozesses verändert, wäre ein einzelner Wert nicht repräsentativ für die gesamte Beschichtung.

Die Betrachtung über den gesamten Zeitraum ist deshalb sinnvoller, weil sie den gesamten Auftrag berücksichtigt und mit der mittleren Schichtdicke eine zusammenfassende Qualitätskennzahl liefert.

Eine mögliche Alternative wäre, statt nur des Mittelwerts zusätzlich auch Extremwerte oder den gesamten Verlauf zu betrachten, also zum Beispiel Minimalwert, Maximalwert oder die Abweichung von einem Sollwert über die gesamte Zeit.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**