DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 4jUjsz

Gegeben sind jeweils der Scheitelpunkt S und ein weiterer Punkt P einer Parabel. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln und untersuchen Sie anschließend die Lage der Parabeln zueinander, indem Sie die Anzahl der Schnittpunkte angeben.

a) Parabel 1: $S(2 \mid -1),\ P(4 \mid 3)$; Parabel 2: $S(0 \mid 3),\ P(1 \mid 4)$

Parabel 1:

$$f(x) = a(x-2)^2 - 1$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 3 \\ a(4-2)^2 - 1 &= 3 && \mid +1 \\ 4a &= 4 && \mid :4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2 - 1$$

Parabel 2:

$$g(x) = a(x-0)^2 + 3 = ax^2 + 3$$

$$\begin{aligned} g(1) &= 4 \\ a \cdot 1^2 + 3 &= 4 && \mid -3 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 + 3$$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ (x-2)^2 - 1 &= x^2 + 3 \\ x^2 - 4x + 4 - 1 &= x^2 + 3 \\ x^2 - 4x + 3 &= x^2 + 3 && \mid -x^2 - 3 \\ -4x &= 0 && \mid :(-4) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 0^2 + 3 = 3 \\ &\Rightarrow Q(0 \mid 3) \end{aligned}$$

Die Parabeln haben genau einen Schnittpunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Parabel 1: $S(-2 \mid -3),\ P(0 \mid -1)$; Parabel 2: $S(1 \mid 2),\ P(2 \mid 5)$

Parabel 1:

$$f(x) = a(x+2)^2 - 3$$

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ a(0+2)^2 - 3 &= -1 && \mid +3 \\ 4a &= 2 && \mid :4 \\ a &= 0.5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0.5(x+2)^2 - 3$$

Parabel 2:

$$g(x) = a(x-1)^2 + 2$$

$$\begin{aligned} g(2) &= 5 \\ a(2-1)^2 + 2 &= 5 && \mid -2 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = 3(x-1)^2 + 2$$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 0.5(x+2)^2 - 3 &= 3(x-1)^2 + 2 \\ 0.5(x^2+4x+4) - 3 &= 3(x^2-2x+1) + 2 \\ 0.5x^2 + 2x + 2 - 3 &= 3x^2 - 6x + 3 + 2 \\ 0.5x^2 + 2x - 1 &= 3x^2 - 6x + 5 && \mid -0.5x^2 - 2x + 1 \\ 0 &= 2.5x^2 - 8x + 6 && \mid :2.5 \\ 0 &= x^2 - 3.2x + 2.4 \\ x_{1/2} &= 1.6 \pm \sqrt{1.6^2 - 2.4} \\ x_1 &= 2 \quad \vee \quad x_2 = 1.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2) &= 3(2-1)^2 + 2 = 5 \\ g(1.2) &= 3(1.2-1)^2 + 2 = 2.12 \\ &\Rightarrow Q_1(2 \mid 5),\ Q_2(1.2 \mid 2.12) \end{aligned}$$

Die Parabeln haben zwei Schnittpunkte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Parabel 1: $S(3 \mid 4),\ P(5 \mid 8)$; Parabel 2: $S(-1 \mid -2),\ P(0 \mid 0)$

Parabel 1:

$$f(x) = a(x-3)^2 + 4$$

$$\begin{aligned} f(5) &= 8 \\ a(5-3)^2 + 4 &= 8 && \mid -4 \\ 4a &= 4 && \mid :4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-3)^2 + 4$$

Parabel 2:

$$g(x) = a(x+1)^2 - 2$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \\ a(0+1)^2 - 2 &= 0 && \mid +2 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2(x+1)^2 - 2$$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ (x-3)^2 + 4 &= 2(x+1)^2 - 2 \\ x^2 - 6x + 9 + 4 &= 2(x^2 + 2x + 1) - 2 \\ x^2 - 6x + 13 &= 2x^2 + 4x + 2 - 2 \\ x^2 - 6x + 13 &= 2x^2 + 4x && \mid -x^2 + 6x - 13 \\ 0 &= x^2 + 10x - 13 \\ x_{1/2} &= -5 \pm \sqrt{5^2 + 13} \\ x_1 &\approx 1.164 \quad \vee \quad x_2 \approx -11.164 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1.164) &= (1.164 - 3)^2 + 4 \approx 7.371 \\ f(-11.164) &= (-11.164 - 3)^2 + 4 \approx 204.619 \\ &\Rightarrow Q_1(1.16 \mid 7.37),\ Q_2(-11.16 \mid 204.62) \end{aligned}$$

Die Parabeln haben zwei Schnittpunkte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Parabel 1: $S(1 \mid 0),\ P(3 \mid 8)$; Parabel 2: $S(-2 \mid -1),\ P(1 \mid 5)$

Parabel 1:

$$f(x) = a(x-1)^2$$

$$\begin{aligned} f(3) &= 8 \\ a(3-1)^2 &= 8 \\ 4a &= 8 \qquad | :4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x-1)^2$$

Parabel 2:

$$g(x) = a(x+2)^2 - 1$$

$$\begin{aligned} g(1) &= 5 \\ a(1+2)^2 - 1 &= 5 \qquad | +1 \\ 9a &= 6 \qquad | :9 \\ a &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{2}{3}(x+2)^2 - 1$$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2(x-1)^2 &= \frac{2}{3}(x+2)^2 - 1 \\ 2(x^2 - 2x + 1) &= \frac{2}{3}(x^2 + 4x + 4) - 1 \\ 2x^2 - 4x + 2 &= \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} - 1 \\ 2x^2 - 4x + 2 &= \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} \qquad | -2x^2 + 4x - 2 \\ 0 &= -\frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{1}{3} \qquad | : \left(-\frac{4}{3}\right) \\ 0 &= x^2 - 5x + 0.25 \\ x_{1/2} &= 2.5 \pm \sqrt{2.5^2 - 0.25} \\ x_1 &\approx 4.949 \quad \vee \quad x_2 \approx 0.051 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4.949) &= 2(4.949-1)^2 \approx 31.189 \\ f(0.051) &= 2(0.051-1)^2 \approx 1.801 \\ &\Rightarrow Q_1(4.95 \mid 31.19),\ Q_2(0.05 \mid 1.8) \end{aligned}$$

Die Parabeln haben zwei Schnittpunkte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Parabel 1: $S(-3 \mid 2),\ P(-1 \mid 6)$; Parabel 2: $S(0 \mid -4),\ P(2 \mid 0)$

Parabel 1:

$$f(x) = a(x+3)^2 + 2$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 6 \\ a(-1+3)^2 + 2 &= 6 && \mid -2 \\ 4a &= 4 && \mid :4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+3)^2 + 2$$

Parabel 2:

$$g(x) = a(x-0)^2 - 4 = ax^2 - 4$$

$$\begin{aligned} g(2) &= 0 \\ a \cdot 2^2 - 4 &= 0 && \mid +4 \\ 4a &= 4 && \mid :4 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 - 4$$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ (x+3)^2 + 2 &= x^2 - 4 \\ x^2 + 6x + 9 + 2 &= x^2 - 4 \\ x^2 + 6x + 11 &= x^2 - 4 && \mid -x^2 - 11 \\ 6x &= -15 && \mid :6 \\ x &= -2.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-2.5) &= (-2.5)^2 - 4 = 2.25 \\ &\Rightarrow Q(-2.5 \mid 2.25) \end{aligned}$$

Die Parabeln haben genau einen Schnittpunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) Parabel 1: $S(2 \mid -2),\ P(5 \mid 4)$; Parabel 2: $S(-1 \mid 1),\ P(0 \mid 2)$

Parabel 1:

$$f(x) = a(x-2)^2 - 2$$

$$\begin{aligned} f(5) &= 4 \\ a(5-2)^2 - 2 &= 4 && \mid +2 \\ 9a &= 6 && \mid :9 \\ a &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}(x-2)^2 - 2$$

Parabel 2:

$$g(x) = a(x+1)^2 + 1$$

$$\begin{aligned} g(0) &= 2 \\ a(0+1)^2 + 1 &= 2 && \mid -1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = (x+1)^2 + 1$$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \frac{2}{3}(x-2)^2 - 2 &= (x+1)^2 + 1 \\ \frac{2}{3}(x^2 - 4x + 4) - 2 &= x^2 + 2x + 1 + 1 \\ \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} - 2 &= x^2 + 2x + 2 \\ \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3} &= x^2 + 2x + 2 && \mid -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{3} \\ 0 &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{14}{3}x + \frac{4}{3} && \mid \cdot 3 \\ 0 &= x^2 + 14x + 4 \\ x_{1/2} &= -7 \pm \sqrt{7^2 - 4} \\ x_1 &\approx -0.292 \quad \vee \quad x_2 \approx -13.708 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-0.292) &= (-0.292 + 1)^2 + 1 \approx 1.501 \\ g(-13.708) &= (-13.708 + 1)^2 + 1 \approx 162.493 \\ &\Rightarrow Q_1(-0.29 \mid 1.5),\ Q_2(-13.71 \mid 162.49) \end{aligned}$$

Die Parabeln haben zwei Schnittpunkte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) Parabel 1: $S(0 \mid -3),\ P(1 \mid 1)$; Parabel 2: $S(2 \mid 5),\ P(3 \mid 9)$

Parabel 1:

$$f(x) = a(x-0)^2 - 3 = ax^2 - 3$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ a \cdot 1^2 - 3 &= 1 && \mid +3 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x^2 - 3$$

Parabel 2:

$$g(x) = a(x-2)^2 + 5$$

$$\begin{aligned} g(3) &= 9 \\ a(3-2)^2 + 5 &= 9 && \mid -5 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = 4(x-2)^2 + 5$$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 4x^2 - 3 &= 4(x-2)^2 + 5 \\ 4x^2 - 3 &= 4(x^2 - 4x + 4) + 5 \\ 4x^2 - 3 &= 4x^2 - 16x + 16 + 5 \\ 4x^2 - 3 &= 4x^2 - 16x + 21 && \mid -4x^2 + 16x + 3 \\ 16x &= 24 && \mid :16 \\ x &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1.5) &= 4 \cdot 1.5^2 - 3 = 6 \\ &\Rightarrow Q(1.5 \mid 6) \end{aligned}$$

Die Parabeln haben genau einen Schnittpunkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) Parabel 1: $S(-4 \mid 0),\ P(-3 \mid 5)$; Parabel 2: $S(3 \mid -1),\ P(5 \mid 7)$

Parabel 1:

$$f(x) = a(x+4)^2$$

$$\begin{aligned} f(-3) &= 5 \\ a(-3+4)^2 &= 5 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 5(x+4)^2$$

Parabel 2:

$$g(x) = a(x-3)^2 - 1$$

$$\begin{aligned} g(5) &= 7 \\ a(5-3)^2 - 1 &= 7 && \mid +1 \\ 4a &= 8 && \mid :4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2(x-3)^2 - 1$$

Schnittpunkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 5(x+4)^2 &= 2(x-3)^2 - 1 \\ 5(x^2+8x+16) &= 2(x^2-6x+9) - 1 \\ 5x^2+40x+80 &= 2x^2-12x+18-1 \\ 5x^2+40x+80 &= 2x^2-12x+17 && \mid -5x^2-40x-80 \\ 0 &= -3x^2-52x-63 && \mid :(-3) \\ 0 &= x^2 + \frac{52}{3}x + 21 \\ x_{1/2} &= -\frac{26}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{26}{3}\right)^2 - 21} \\ x_1 &\approx -1.311 \quad \vee \quad x_2 \approx -16.023 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1.311) &= 5(-1.311+4)^2 \approx 36.154 \\ f(-16.023) &= 5(-16.023+4)^2 \approx 722.763 \\ &\Rightarrow Q_1(-1.31 \mid 36.15),\ Q_2(-16.02 \mid 722.76) \end{aligned}$$

Die Parabeln haben zwei Schnittpunkte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**