DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 4Rxkgi

Gegeben ist $g(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$.

a) Bestimmen Sie die Stellen mit $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16$$

notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$0 = 4x^3 - 12x^2 + 16 \quad | \, x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|cccc} & 4 & -12 & 0 & 16 \\ -1 & & -4 & 16 & -16 \\ \hline & 4 & -16 & 16 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 - 16x + 16 \quad | :4 \\ &= x^2 - 4x + 4 \\ x_{2/3} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} \\ x_2 &= 2 \\ \Rightarrow x_1 = -1 \quad &\vee \quad x_2 = 2 \end{aligned}$$

b) Prüfen Sie mit $g''(x)$, ob dort Extrempunkte vorliegen.

$$\begin{aligned} g''(x) &= 12x^2 - 24x \\ g'''(x) &= 24x - 24 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0 \quad \wedge \quad g''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} g''(-1) &= 12 \cdot (-1)^2 - 24 \cdot (-1) = 36 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ g''(2) &= 12 \cdot 2^2 - 24 \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

y-Wert: $g(x) = y$

$$g(-1) = (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + 16 \cdot (-1) = -11 \qquad \Rightarrow \text{TP}(-1 \mid -11)$$

Bei $x = 2$ ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Daher liegt dort nicht automatisch ein Extrempunkt vor. Wegen $g'''(2) = 24 \cdot 2 - 24 = 24 \neq 0$ ist $x = 2$ eine Wendestelle mit waagerechter Tangente, also ein Sattelpunkt und kein Extrempunkt.

c) Beschreiben Sie kurz, warum eine Stelle mit Steigung 0 nicht automatisch ein Hoch-/Tiefpunkt sein muss.

Eine Stelle mit Steigung 0 bedeutet nur, dass die Tangente dort waagerecht ist.

Ein Hoch- oder Tiefpunkt liegt aber nur dann vor, wenn die Ableitung an dieser Stelle ihr Vorzeichen wechselt. Bleibt das Vorzeichen vor und nach der Stelle gleich, so liegt trotz waagerechter Tangente kein Extrempunkt vor, sondern ein Sattelpunkt (Terrassenpunkt), wie hier bei $x = 2$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**