DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 4P7yng

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph bei $x = 0$ eine Wendestelle besitzt und die x-Achse bei $x = -2$ schneidet. Die zugehörige Wendetangente hat die Gleichung $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Die Wendetangente berührt den Graphen im Wendepunkt $W(0 \mid h(0)) = W(0 \mid 2)$ und hat dort die Steigung $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} f''(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 6a \cdot 0 + 2b && = 2b \\ f(-2) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d && = -8a + 4b - 2c + d \\ f(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad 2 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d && = d \\ f'(0) = \frac{1}{3} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{3} = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c && = c \end{aligned}$$

Aus der ersten, dritten und vierten Bedingung folgt direkt $b = 0$, $d = 2$ und $c = \frac{1}{3}$. Eingesetzt in die zweite Bedingung:

$$\begin{aligned} -8a + 4 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 0 \qquad &\mid \text{zusammenfassen} \\ -8a + \frac{4}{3} = 0 \qquad &\mid -\frac{4}{3} \\ -8a = -\frac{4}{3} \quad &\mid :(-8) \\ a = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**