DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 4GZsZ1

Gegeben ist $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{21}{8}x^2 + \frac{37}{4}x + 5$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von g.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 0 &= \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{21}{8}x^2 + \frac{37}{4}x + 5 \quad | \, x_1 = -2 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

$$\begin{array}{r|cccc} & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{21}{8} & \frac{37}{4} & 5 \\ -2 & & -1 & 6 & -\frac{27}{4} & -5 \\ \hline & \frac{1}{2} & -3 & \frac{27}{8} & \frac{5}{2} & 0 \end{array}$$

$$0 = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{27}{8}x + \frac{5}{2} \quad | \, x_2 = 4$$

$$\begin{array}{r|ccc} & \frac{1}{2} & -3 & \frac{27}{8} & \frac{5}{2} \\ 4 & & 2 & -4 & -\frac{5}{2} \\ \hline & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{8} & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{8} \quad | :0.5 \\ &= x^2 - 2x - 1.25 \\ x_{3/4} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + 1.25} \\ x_3 &= 2.5 \quad \vee \quad x_4 = -0.5 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Bestimmen Sie $g'(x)$ und ermitteln Sie daraus alle Extremstellen.

$$g'(x) = 2x^3 - 6x^2 - \frac{21}{4}x + \frac{37}{4}$$
$$g''(x) = 6x^2 - 12x - \frac{21}{4}$$

notw. Bed.: $g'(x) = 0$

$$0 = 2x^3 - 6x^2 - \frac{21}{4}x + \frac{37}{4} \quad | \, x_1 = 1$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit Brüchen dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit den Dezimalwerten rechnen.

	2	-6	$-\frac{21}{4}$	$\frac{37}{4}$
1		2	-4	$-\frac{37}{4}$
	2	-4	$-\frac{37}{4}$	0

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 - 4x - \frac{37}{4} && | :2 \\ &= x^2 - 2x - \frac{37}{8} \\ x_{2/3} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{37}{8}} \\ x_2 &\approx 3.372 \quad \vee \quad x_3 \approx -1.372 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g'(x) = 0 \quad \wedge \quad g''(x) \neq 0$

$$g''(1) = 6 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - \frac{21}{4} = -11.25 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$
$$g''(3.372) = 6 \cdot 3.372^2 - 12 \cdot 3.372 - \frac{21}{4} \approx 22.508 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$g''(-1.372) = 6 \cdot (-1.372)^2 - 12 \cdot (-1.372) - \frac{21}{4} \approx 22.508 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$

Die Extremstellen liegen bei $x_1 = 1$ (Hochpunkt), $x_2 \approx 3.372$ und $x_3 \approx -1.372$ (Tiefpunkte).

c) Berechnen Sie die lokale Änderungsrate an der Stelle $x = 2$.

$$\begin{aligned} g'(2) &= 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 - \frac{21}{4} \cdot 2 + \frac{37}{4} \\ &= 16 - 24 - 10.5 + 9.25 \\ &= -9.25 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie $g''(x)$ und berechnen Sie die Wendestelle(n).

$$g''(x) = 6x^2 - 12x - \frac{21}{4}$$
$$g'''(x) = 12x - 12$$

notw. Bed.: $g''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x^2 - 12x - \frac{21}{4} && | :6 \\ &= x^2 - 2x - \frac{7}{8} \\ x_{1/2} &= 1 \pm \sqrt{1^2 + \frac{7}{8}} \\ x_1 &\approx 2.369 \quad \vee \quad x_2 \approx -0.369 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $g''(x) = 0 \quad \wedge \quad g'''(x) \neq 0$

$$g'''(2.369) = 12 \cdot 2.369 - 12 = 16.428 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$g'''(-0.369) = 12 \cdot (-0.369) - 12 = -16.428 \neq 0 \qquad \checkmark$$

Die Wendestellen liegen bei $x_1 \approx 2.369$ und $x_2 \approx -0.369$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**