DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 4EDf2b

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen mit der h-Methode und bestimmen Sie die Steigungen in $x = 1$, $x = -2$ und $x = 3$.

a) $f(x) = x^2 + 3$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 + 3 - (x^2+3)}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 3 - x^2 - 3}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x + h \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0}(2x+h) \\ &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2 \cdot 1 = 2 \\ f'(-2) &= 2 \cdot (-2) = -4 \\ f'(3) &= 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = -x^2$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h} \\ &= \frac{-(x^2+2xh+h^2)+x^2}{h} \\ &= \frac{-x^2-2xh-h^2+x^2}{h} \\ &= \frac{-2xh-h^2}{h} \\ &= \frac{h(-2x-h)}{h} \\ &= -2x-h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}(-2x-h) \\ &= -2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= -2\cdot 1 = -2 \\ f'(-2) &= -2\cdot(-2) = 4 \\ f'(3) &= -2\cdot 3 = -6 \end{aligned}$$

c) $f(x) = x^2 + 2x$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2+2(x+h)-(x^2+2x)}{h} \\ &= \frac{x^2+2xh+h^2+2x+2h-x^2-2x}{h} \\ &= \frac{2xh+h^2+2h}{h} \\ &= \frac{h(2x+h+2)}{h} \\ &= 2x+h+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}(2x+h+2) \\ &= 2x+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2\cdot 1+2 = 4 \\ f'(-2) &= 2\cdot(-2)+2 = -2 \\ f'(3) &= 2\cdot 3+2 = 8 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) + 4 - (x^2 - 3x + 4)}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h + 4 - x^2 + 3x - 4}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \\ &= \frac{h(2x + h - 3)}{h} \\ &= 2x + h - 3 \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0}(2x + h - 3) \\ &= 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 2 \cdot 1 - 3 = -1 \\ f'(-2) &= 2 \cdot (-2) - 3 = -7 \\ f'(3) &= 2 \cdot 3 - 3 = 3 \end{aligned}$$

e) $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ &= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2 \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 3 \cdot 1^2 = 3 \\ f'(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 = 12 \\ f'(3) &= 3 \cdot 3^2 = 27 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = x^3 + x$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(x+h)^3 + (x+h) - (x^3 + x)}{h} \\ &= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x + h - x^3 - x}{h} \\ &= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + h}{h} \\ &= \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 1)}{h} \\ &= 3x^2 + 3xh + h^2 + 1 \\ f'(x) &= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 1) \\ &= 3x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= 3 \cdot 1^2 + 1 = 4 \\ f'(-2) &= 3 \cdot (-2)^2 + 1 = 13 \\ f'(3) &= 3 \cdot 3^2 + 1 = 28 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**