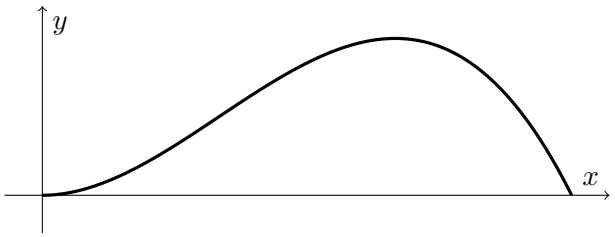
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 3uM4R4

Durch den steigenden Meeresspiegel sollen die Deiche rund um Sankt Peter-Ording verstärkt werden. Für die Planung wird der Querschnitt eines besonders langen Deichabschnitts (10 km) vereinfacht modelliert: Die Form des Deichprofils lässt sich ungefähr durch die Funktion $f(x) = -\frac{1}{70^2}x^3 + \frac{1}{70}x^2$ beschreiben. Dabei sind x und $f(x)$ jeweils in Metern angegeben.



a) Für die Genehmigung ist eine Mindesthöhe von 10 m vorgeschrieben. Prüfen Sie anhand des Modells, ob diese Höhe erreicht wird. Begründen Sie die Entscheidung mithilfe geeigneter Kenngrößen des Funktionsgraphen.

$$f'(x) = -\frac{3}{70^2}x^2 + \frac{1}{35}x$$
$$f''(x) = -\frac{6}{70^2}x + \frac{1}{35}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{70^2}x^2 + \frac{1}{35}x \\ &= x\left(-\frac{3}{70^2}x + \frac{1}{35}\right) \quad | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{70^2}x + \frac{1}{35} && | \; +\frac{3}{70^2}x \\ \frac{3}{70^2}x &= \frac{1}{35} && | \; :\frac{3}{70^2} \\ x_2 &= \frac{140}{3} \approx 46.667 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$f''(0) = -\frac{6}{70^2} \cdot 0 + \frac{1}{35} = \frac{1}{35} > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$$
$$f''\left(\frac{140}{3}\right) = -\frac{6}{70^2} \cdot \frac{140}{3} + \frac{1}{35} = -\frac{1}{35} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f\left(\frac{140}{3}\right) = -\frac{1}{70^2} \cdot \left(\frac{140}{3}\right)^3 + \frac{1}{70} \cdot \left(\frac{140}{3}\right)^2 = \frac{280}{27} \approx 10.37 \qquad \Rightarrow \text{HP}(46.67 \mid 10.37)$$

Die maximale Höhe des Deichs beträgt also etwa 10.37 m. Damit wird die vorgeschriebene Mindesthöhe von 10 m erreicht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Für die Bauplanung wird die Menge an benötigtem Mutterboden abgeschätzt. Bestimmen Sie das Volumen an Mutterboden für den gesamten 10-km-Abschnitt.

Zunächst werden die Nullstellen des Deichprofils bestimmt:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{70^2}x^3 + \frac{1}{70}x^2 \\ &= x^2\left(-\frac{1}{70^2}x + \frac{1}{70}\right) \quad | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{70^2}x + \frac{1}{70} && | + \frac{1}{70^2}x \\ \frac{1}{70^2}x &= \frac{1}{70} && | : \frac{1}{70^2} \\ x_2 &= 70 \end{aligned}$$

Der Querschnitt des Deichs ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{70}\left(-\frac{1}{70^2}x^3 + \frac{1}{70}x^2\right)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{19\,600}x^4 + \frac{1}{210}x^3\right]_0^{70} \\ &= -\frac{1}{19\,600}\cdot 70^4 + \frac{1}{210}\cdot 70^3 - 0 \\ &= -1225 + \frac{4900}{3} \\ &= \frac{1225}{3} \approx 408.333 \end{aligned}$$

Der Abschnitt ist 10 km = 10 000 m lang. Für das Volumen ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= A \cdot 10\,000 \\ &= \frac{1225}{3}\cdot 10\,000 \\ &= \frac{12\,250\,000}{3} \approx 4\,083\,333.333 \end{aligned}$$

Das Volumen an Mutterboden beträgt also etwa $4\,083\,333\,\text{m}^3$, also rund 4.08 Mio. m^3.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Mutterboden hat eine Dichte von $\rho = 1.3\,\mathrm{t/m^3}$. Bestimmen Sie die Gesamtmasse des benötigten Materials. Entscheiden Sie anschließend, wie viele LKW-Fahrten erforderlich sind, wenn ein vierachsiger LKW maximal 20 t transportieren kann. Schätzen Sie zum Abschluss die Dauer des Antransports in Jahren rechnerisch ab, wenn rund um die Uhr alle 10 Minuten ein LKW anliefert, und beurteilen Sie kurz, ob das realistisch ist.

Gesamtmasse:

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot V \\ &= 1.3 \cdot 4\,083\,333.333 \\ &\approx 5\,308\,333.333 \end{aligned}$$

Die Gesamtmasse beträgt etwa 5 308 333 t.

LKW-Fahrten:

$$n = \frac{5\,308\,333.333}{20} \approx 265\,416.667$$

Da auch die letzte, nicht ganz volle Ladung eine Fahrt benötigt, wird aufgerundet: Es sind 265 417 LKW-Fahrten erforderlich.

Ein LKW alle 10 Minuten entspricht 6 LKW pro Stunde, also $6 \cdot 24 = 144$ LKW pro Tag. Damit ergibt sich für die Dauer in Tagen bzw. Jahren:

$$t = \frac{265\,417}{144} \approx 1843.17$$

$$t = \frac{1843.17}{365} \approx 5.05$$

Der Antransport dauert also etwa 1843 Tage bzw. gut 5 Jahre. Das ist im praktischen Bauablauf nicht realistisch, da ein Deichbauprojekt nicht über viele Jahre hinweg rund um die Uhr im 10-Minuten-Takt nur mit einzelnen LKW beliefert würde. In der Realität würde man mit deutlich mehr Fahrzeugen, anderen Transportkonzepten oder Zwischenlagern arbeiten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**