DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 369FGn

Bestimmen Sie jeweils das Rotationsvolumen V des Körpers, der entsteht, wenn der Graph von $f(x)$ im angegebenen Intervall um die x-Achse rotiert.

a) $f(x) = 0.5x + 1$ Intervall $[0; 4]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (0.5x+1)^2 &= (0.5x)^2 + 2 \cdot 0.5x \cdot 1 + 1^2 \\ &= 0.25x^2 + x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^4 (0.5x+1)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^4 (0.25x^2 + x + 1) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{12}x^3 + 0.5x^2 + x \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\frac{1}{12} \cdot 4^3 + 0.5 \cdot 4^2 + 4 - 0 \right) \\ &= \pi \left(\frac{16}{3} + 8 + 4 \right) \\ &= \frac{52}{3}\pi \approx 54.454\end{aligned}$$

b) $f(x) = -0.25x^2 + 2x + 1$ Intervall $[0; 6]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (-0.25x^2+2x+1)^2 &= (-0.25x^2+2x+1)(-0.25x^2+2x+1) \\ &= 0.0625x^4 - 0.5x^3 - 0.25x^2 \\ &\quad - 0.5x^3 + 4x^2 + 2x \\ &\quad - 0.25x^2 + 2x + 1 \\ &= 0.0625x^4 - x^3 + 3.5x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^6 (-0.25x^2 + 2x + 1)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^6 (0.0625x^4 - x^3 + 3.5x^2 + 4x + 1) \, dx \\ &= \pi \left[0.0125x^5 - 0.25x^4 + \frac{7}{6}x^3 + 2x^2 + x \right]_0^6 \\ &= \pi \left(0.0125 \cdot 6^5 - 0.25 \cdot 6^4 + \frac{7}{6} \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 6 - 0 \right) \\ &= \pi \left(97.2 - 324 + 252 + 72 + 6 \right) \\ &= 103.2\pi \approx 324.212\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^2 + 1$ Intervall $[0; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (x^2+1)^2 &= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 (x^2+1)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^2 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{2}{3} \cdot 2^3 + 2 - 0\right) \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2\right) \\ &= \frac{206}{15}\pi \approx 43.145\end{aligned}$$

d) $f(x) = -x^2 + 4$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (-x^2+4)^2 &= (-x^2)^2 + 2 \cdot (-x^2) \cdot 4 + 4^2 \\ &= x^4 - 8x^2 + 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{-2}^2 (-x^2+4)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-2}^2 (x^4 - 8x^2 + 16) \, dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_{-2}^2 \\ &= \pi \left(\frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 + 16 \cdot 2 - \left(\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 - \frac{8}{3} \cdot (-2)^3 + 16 \cdot (-2)\right)\right) \\ &= \pi \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 - \left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right)\right) \\ &= \pi \left(\frac{256}{15} - \left(-\frac{256}{15}\right)\right) \\ &= \frac{512}{15}\pi \approx 107.233\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = 2 - 0.5x$ Intervall $[0; 4]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (2-0.5x)^2 &= 2^2 - 2\cdot 2\cdot 0.5x + (0.5x)^2\\ &= 4 - 2x + 0.25x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^4 (2-0.5x)^2\,dx\\ &= \pi \int_0^4 (4 - 2x + 0.25x^2)\,dx\\ &= \pi \left[4x - x^2 + \frac{1}{12}x^3\right]_0^4\\ &= \pi \left(4\cdot 4 - 4^2 + \frac{1}{12}\cdot 4^3 - 0\right)\\ &= \pi \left(16 - 16 + \frac{16}{3}\right)\\ &= \frac{16}{3}\pi \approx 16.755\end{aligned}$$

f) $f(x) = 0.2x^3 - x + 3$ Intervall $[0; 2]$

$$\begin{aligned}\text{Nebenrechnung: } (0.2x^3 - x + 3)^2 &= (0.2x^3 - x + 3)(0.2x^3 - x + 3)\\ &= 0.04x^6 - 0.2x^4 + 0.6x^3\\ &\quad - 0.2x^4 + x^2 - 3x\\ &\quad + 0.6x^3 - 3x + 9\\ &= 0.04x^6 - 0.4x^4 + 1.2x^3 + x^2 - 6x + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 (0.2x^3 - x + 3)^2\,dx\\ &= \pi \int_0^2 (0.04x^6 - 0.4x^4 + 1.2x^3 + x^2 - 6x + 9)\,dx\\ &= \pi \left[\frac{1}{175}x^7 - 0.08x^5 + 0.3x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_0^2\\ &= \pi \left(\frac{1}{175}\cdot 2^7 - 0.08\cdot 2^5 + 0.3\cdot 2^4 + \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 9\cdot 2 - 0\right)\\ &= \pi \left(\frac{128}{175} - 2.56 + 4.8 + \frac{8}{3} - 12 + 18\right)\\ &= \frac{1222}{105}\pi \approx 36.562\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**