DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 2iLJdm

Bestimmen Sie jeweils das eingeschlossene Integral zwischen f und g zwischen den beiden Schnittpunkten.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2, \quad g(x) = 0$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^4 - 4x^2 - 0 \\ &= x^4 - 4x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 4x^2 \\ &= x^2(x^2 - 4) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4 && \mid +4 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 - \left(\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 - \frac{4}{3} \cdot (-2)^3\right) \\ &= \frac{32}{5} - \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{5} + \frac{32}{3}\right) \\ &= -\frac{64}{15} - \frac{64}{15} \\ &= -\frac{128}{15} \approx -8.533 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = -x^4 + 5x^2, \quad g(x) = x^2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^4 + 5x^2 - x^2 \\ &= -x^4 + 4x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^4 + 4x^2 \\ &= -x^2(x^2 - 4) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4 && \mid +4 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (-x^4 + 4x^2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 \right]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{4}{3} \cdot 2^3 - \left(-\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 + \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 \right) \\ &= -\frac{32}{5} + \frac{32}{3} - \left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right) \\ &= \frac{64}{15} - \left(-\frac{64}{15} \right) \\ &= \frac{128}{15} \approx 8.533 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \quad g(x) = 1$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 - 1 \\ &= x^4 - 2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 2x^2 \\ &= x^2(x^2 - 2) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2 && | \; +2 \\ x^2 &= 2 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{2} \approx 1.414 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{2} \approx -1.414 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^4 - 2x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{5} \cdot (\sqrt{2})^5 - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{2})^3 - \left(\frac{1}{5} \cdot (-\sqrt{2})^5 - \frac{2}{3} \cdot (-\sqrt{2})^3 \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \left(-\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \\ &= -\frac{8\sqrt{2}}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{15} \\ &= -\frac{16\sqrt{2}}{15} \approx -1.508 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = x^4 - 6x^2, \quad g(x) = -2x^2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^4 - 6x^2 - (-2x^2) \\ &= x^4 - 6x^2 + 2x^2 \\ &= x^4 - 4x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 4x^2 \\ &= x^2(x^2 - 4) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4 && \mid +4 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (x^4 - 4x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{1}{5} \cdot 2^5 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 - \left(\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 - \frac{4}{3} \cdot (-2)^3\right) \\ &= \frac{32}{5} - \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{5} + \frac{32}{3}\right) \\ &= -\frac{64}{15} - \frac{64}{15} \\ &= -\frac{128}{15} \approx -8.533 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = -0.5x^4 + 4x^2, \quad g(x) = 0.5x^2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -0.5x^4 + 4x^2 - 0.5x^2 \\ &= -0.5x^4 + 3.5x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.5x^4 + 3.5x^2 \\ &= -0.5x^2(x^2 - 7) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 7 && \mid +7 \\ x^2 &= 7 && \mid \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{7} \approx 2.646 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{7} \approx -2.646 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} (-0.5x^4 + 3.5x^2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{10}x^5 + \frac{7}{6}x^3 \right]_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \\ &= -\frac{1}{10} \cdot (\sqrt{7})^5 + \frac{7}{6} \cdot (\sqrt{7})^3 \\ &\quad - \left(-\frac{1}{10} \cdot (-\sqrt{7})^5 + \frac{7}{6} \cdot (-\sqrt{7})^3 \right) \\ &= -\frac{49\sqrt{7}}{10} + \frac{49\sqrt{7}}{6} - \left(\frac{49\sqrt{7}}{10} - \frac{49\sqrt{7}}{6} \right) \\ &= \frac{49\sqrt{7}}{15} - \left(-\frac{49\sqrt{7}}{15} \right) \\ &= \frac{98\sqrt{7}}{15} \approx 17.286 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = x^4 - 9x^2, \quad g(x) = -x^2$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x^4 - 9x^2 - (-x^2) \\ &= x^4 - 9x^2 + x^2 \\ &= x^4 - 8x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^4 - 8x^2 \\ &= x^2(x^2 - 8) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 8 && \mid +8 \\ x^2 &= 8 && \mid \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{8} \approx 2.828 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{8} \approx -2.828 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} (x^4 - 8x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \\ &= \frac{1}{5} \cdot (\sqrt{8})^5 - \frac{8}{3} \cdot (\sqrt{8})^3 - \left(\frac{1}{5} \cdot (-\sqrt{8})^5 - \frac{8}{3} \cdot (-\sqrt{8})^3\right) \\ &= \frac{64\sqrt{8}}{5} - \frac{64\sqrt{8}}{3} - \left(-\frac{64\sqrt{8}}{5} + \frac{64\sqrt{8}}{3}\right) \\ &= -\frac{128\sqrt{8}}{15} - \frac{128\sqrt{8}}{15} \\ &= -\frac{256\sqrt{8}}{15} \approx -48.272 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = 2x^4 - 8x^2, \quad g(x) = 0$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 2x^4 - 8x^2 - 0 \\ &= 2x^4 - 8x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^4 - 8x^2 \\ &= 2x^2(x^2 - 4) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4 && \mid +4 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (2x^4 - 8x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{2}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3\right]_{-2}^{2} \\ &= \frac{2}{5} \cdot 2^5 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 - \left(\frac{2}{5} \cdot (-2)^5 - \frac{8}{3} \cdot (-2)^3\right) \\ &= \frac{64}{5} - \frac{64}{3} - \left(-\frac{64}{5} + \frac{64}{3}\right) \\ &= -\frac{128}{15} - \frac{128}{15} \\ &= -\frac{256}{15} \approx -17.067 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

h) $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1, \quad g(x) = 1$

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= -x^4 + 4x^2 + 1 - 1 \\ &= -x^4 + 4x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^4 + 4x^2 \\ &= -x^2(x^2 - 4) && \mid x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4 && \mid +4 \\ x^2 &= 4 && \mid \sqrt{} \\ x_2 &= 2 \quad \vee \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} (-x^4 + 4x^2)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 \right]_{-2}^{2} \\ &= -\frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{4}{3} \cdot 2^3 - \left(-\frac{1}{5} \cdot (-2)^5 + \frac{4}{3} \cdot (-2)^3 \right) \\ &= -\frac{32}{5} + \frac{32}{3} - \left(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} \right) \\ &= \frac{64}{15} - \left(-\frac{64}{15} \right) \\ &= \frac{128}{15} \approx 8.533 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**