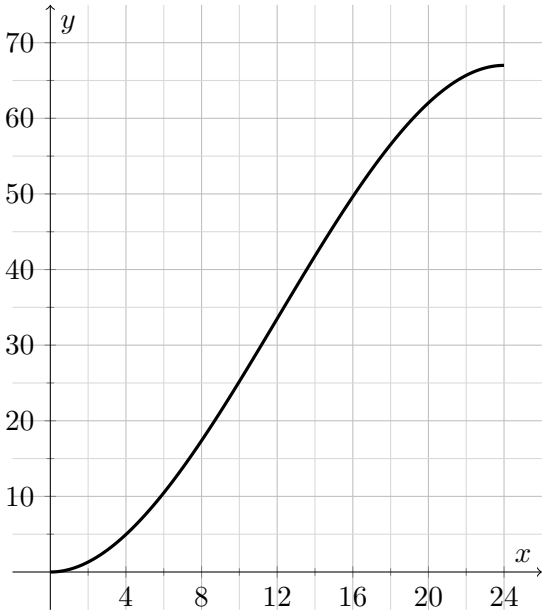
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 2YbuyJ

Ein ICE fährt die etwa 67 km lange Strecke von Hamm (Westf.) nach Bielefeld Hbf. in ungefähr 24 Minuten. Der dabei zurückgelegte Weg lässt sich näherungsweise durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades beschreiben.



a) Geben Sie an, wofür die x-Achse und die y-Achse im Diagramm stehen.

Die x-Achse beschreibt die Zeit seit Fahrtbeginn in Minuten.

Die y-Achse beschreibt die zurückgelegte Strecke in Kilometern.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Bestimmen Sie eine passende ganzrationale Funktionsgleichung dritten Grades, mit der sich die ICE-Fahrt modellieren lässt.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Bedingungen (Start und Ankunft im Stillstand):

$$\begin{aligned}
f(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad d = 0 \\
f'(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad c = 0 \\
f(24) = 67 \quad &\Rightarrow \quad 67 = a \cdot 24^3 + b \cdot 24^2 \quad = 13824a + 576b \\
f'(24) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 3a \cdot 24^2 + 2b \cdot 24 \quad = 1728a + 48b
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 13824 & 576 & 67 \\ 1728 & 48 & 0 \end{array}\right) \qquad 8 \cdot \text{II} - \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 13824 & 576 & 67 \\ 0 & -192 & -67 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \quad & -192b = -67 && \mid :(-192) \\
& b = \frac{67}{192} \approx 0.349
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad & 13824a + 576 \cdot \frac{67}{192} = 67 \\
& 13824a + 201 = 67 && \mid -201 \\
& 13824a = -134 && \mid :13824 \\
& a = -\frac{67}{6912} \approx -0.0097 \\
& \Rightarrow f(x) = -\frac{67}{6912}x^3 + \frac{67}{192}x^2 \\
& \qquad \approx -0.0097x^3 + 0.349x^2
\end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Ermitteln Sie, nach wie vielen Minuten der ICE seine Höchstgeschwindigkeit erreicht.

Die Geschwindigkeit entspricht der ersten Ableitung $f'(x)$. Die Höchstgeschwindigkeit liegt also beim Hochpunkt von $f'(x)$, also beim Wendepunkt von $f(x)$.

$$f'(x) = -\frac{67}{2304}x^2 + \frac{67}{96}x$$
$$f''(x) = -\frac{67}{1152}x + \frac{67}{96}$$
$$f'''(x) = -\frac{67}{1152}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$0 = -\frac{67}{1152}x + \frac{67}{96} \quad | +\frac{67}{1152}x$$
$$\frac{67}{1152}x = \frac{67}{96} \quad | :\frac{67}{1152}$$
$$x = 12$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(12) = -\frac{67}{1152} < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP von } f'$$

Der ICE erreicht seine Höchstgeschwindigkeit nach 12 Minuten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**