DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 1vLyWq

Bestimmen Sie jeweils die Wendepunkte.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ f''(x) &= 6x - 6 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 6x - 6 \quad &| +6 \\ 6x &= 6 \quad &| :6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(1) = 6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1 \mid -1)$$

b) $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 24x \\ f''(x) &= 12x + 24 \\ f'''(x) &= 12 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x + 24 \quad &| -24 \\ 12x &= -24 \quad &| :12 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(-2) = 12 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 + 5 = 37 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-2 \mid 37)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 2$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x$$
$$f''(x) = -6x + 12$$
$$f'''(x) = -6$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -6x + 12 && | +6x \\ 6x &= 12 && | :6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(2) = -6 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 2 = 14 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2 \mid 14)$$

d) $f(x) = 3x^3 - 9x + 4$

$$f'(x) = 9x^2 - 9$$
$$f''(x) = 18x$$
$$f'''(x) = 18$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 18x && | :18 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(0) = 18 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(0) = 3 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0 + 4 = 4 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 4)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 \\ f''(x) &= 12x^2 - 24x \\ f'''(x) &= 24x - 24 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x^2 - 24x \\ &= x(12x - 24) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 12x - 24 \quad | \, +24 \\ 12x &= 24 \quad | \, :12 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= -24 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(2) &= 24 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^4 - 4 \cdot 0^3 + 7 = 7 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 7) \\ f(2) &= 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 7 = -9 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(2 \mid -9) \end{aligned}$$

f) $f(x) = 2x^4 + 8x^3 - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x^3 + 24x^2 \\ f''(x) &= 24x^2 + 48x \\ f'''(x) &= 48x + 48 \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 24x^2 + 48x \\ &= x(24x + 48) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 24x + 48 \quad | \, -48 \\ 24x &= -48 \quad | \, :24 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 48 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(-2) &= -48 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0^4 + 8 \cdot 0^3 - 1 = -1 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid -1) \\ f(-2) &= 2 \cdot (-2)^4 + 8 \cdot (-2)^3 - 1 = -33 \quad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-2 \mid -33) \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

g) $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x^3 + 24x \\ f''(x) &= -12x^2 + 24 \\ f'''(x) &= -24x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -12x^2 + 24 && | -24 \\ -12x^2 &= -24 && | :(-12) \\ x^2 &= 2 && | \sqrt{\ } \\ x_1 &= \sqrt{2} \approx 1.414 \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{2} \approx -1.414 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(\sqrt{2}) &= -24\sqrt{2} \approx -33.941 \neq 0 \quad \checkmark \\ f'''(-\sqrt{2}) &= 24\sqrt{2} \approx 33.941 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= -(\sqrt{2})^4 + 12 \cdot (\sqrt{2})^2 + 3 = 23 && \Rightarrow \mathrm{WP}_1(1.41 \mid 23) \\ f(-\sqrt{2}) &= -(-\sqrt{2})^4 + 12 \cdot (-\sqrt{2})^2 + 3 = 23 && \Rightarrow \mathrm{WP}_2(-1.41 \mid 23) \end{aligned}$$

h) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 - 20x^3 \\ f''(x) &= 20x^3 - 60x^2 \\ f'''(x) &= 60x^2 - 120x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 20x^3 - 60x^2 \\ &= x^2(20x - 60) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 20x - 60 && | +60 \\ 20x &= 60 && | :20 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 0 \\ f'''(3) &= 180 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bei $x_1 = 0$ ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Wegen des Faktors x^2 wechselt $f''(x)$ dort das Vorzeichen nicht, also liegt bei $x_1 = 0$ kein Wendepunkt vor.

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(3) = 3^5 - 5 \cdot 3^4 + 2 = -160 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(3 \mid -160)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

i) $f(x) = 2x^5 + 10x^4 - 6$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10x^4 + 40x^3 \\ f''(x) &= 40x^3 + 120x^2 \\ f'''(x) &= 120x^2 + 240x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 40x^3 + 120x^2 \\ &= x^2(40x + 120) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 40x + 120 \quad | \, -120 \\ 40x &= -120 \quad | \, :40 \\ x_2 &= -3 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 0 \\ f'''(-3) &= 360 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bei $x_1 = 0$ ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Wegen des Faktors x^2 wechselt $f''(x)$ dort das Vorzeichen nicht, also liegt bei $x_1 = 0$ kein Wendepunkt vor.

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^5 + 10 \cdot (-3)^4 - 6 = 318 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(-3 \mid 318)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

j) $f(x) = -x^5 + 15x^3 + 1$

$$f'(x) = -5x^4 + 45x^2$$
$$f''(x) = -20x^3 + 90x$$
$$f'''(x) = -60x^2 + 90$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -20x^3 + 90x \\ &= x(-20x^2 + 90) && | \; x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -20x^2 + 90 && | \; +20x^2 \\ 20x^2 &= 90 && | \; :20 \\ x^2 &= 4.5 && | \; \sqrt{} \end{aligned}$$

$$x_2 = \sqrt{4.5} \approx 2.121 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{4.5} \approx -2.121$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(0) = 90 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(\sqrt{4.5}) = -60 \cdot 4.5 + 90 = -180 \neq 0 \qquad \checkmark$$
$$f'''(-\sqrt{4.5}) = -60 \cdot 4.5 + 90 = -180 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(0) = -0^5 + 15 \cdot 0^3 + 1 = 1 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(0 \mid 1)$$
$$f(\sqrt{4.5}) \approx 101.232 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_2(2.12 \mid 101.23)$$
$$f(-\sqrt{4.5}) \approx -99.232 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_3(-2.12 \mid -99.23)$$

k) $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 7$

$$f'(x) = 12x^2 - 48x$$
$$f''(x) = 24x - 48$$
$$f'''(x) = 24$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 24x - 48 && | \; +48 \\ 24x &= 48 && | \; :24 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''(2) = 24 \neq 0 \qquad \checkmark$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(2) = 4 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 + 7 = -57 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(2 \mid -57)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

l) $f(x) = -3x^5 + 30x^4 + 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -15x^4 + 120x^3 \\ f''(x) &= -60x^3 + 360x^2 \\ f'''(x) &= -180x^2 + 720x \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -60x^3 + 360x^2 \\ &= x^2(-60x + 360) \quad | \, x_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -60x + 360 \quad | \, +60x \\ 60x &= 360 \quad | \, :60 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 0 \\ f'''(6) &= -2160 \neq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bei $x_1 = 0$ ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Wegen des Faktors x^2 wechselt $f''(x)$ dort das Vorzeichen nicht, also liegt bei $x_1 = 0$ kein Wendepunkt vor.

y-Wert: $f(x) = y$

$$f(6) = -3 \cdot 6^5 + 30 \cdot 6^4 + 2 = 15554 \qquad \Rightarrow \mathrm{WP}_1(6 \mid 15554)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**