DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 1nXH25

Ein E-Scooter-Sharing-Anbieter betreibt am Stadtrand eine kleine Ladehalle. Über einen Tag hinweg wird modellhaft beschrieben, wie viel elektrische Leistung in die Akkus hineinfließt und wie viel gleichzeitig für Betrieb und Nebenverbraucher (Lüftung, Steuerung, Beleuchtung) benötigt wird.
Für $0 \leq t \leq 12$ (t in Stunden seit 08:00 Uhr) gelten:

- Ladeleistung $L(t)$ in kW: $L(t) = -0.1t^3 + 1.2t^2$
- Verbrauchsleistung $V(t)$ in kW: $V(t) = 0.1t^2 + 1$

Im Zeitraum soll abgeschätzt werden, ob netto Energie in die Akkus wandert oder ob zeitweise mehr verbraucht als geladen wird.

a) Zu Beginn und gegen Ende des betrachteten Zeitraums wirkt die Ladeleistung im Modell deutlich kleiner als in der Mitte. Prüfen Sie durch Funktionswerte an geeigneten Stellen, ob das im Modell plausibel ist, und deuten Sie die Aussage im Kontext.

$$\begin{aligned} L(0) &= -0.1 \cdot 0^3 + 1.2 \cdot 0^2 = 0 \\ L(6) &= -0.1 \cdot 6^3 + 1.2 \cdot 6^2 \\ &= -21.6 + 43.2 \\ &= 21.6 \\ L(12) &= -0.1 \cdot 12^3 + 1.2 \cdot 12^2 \\ &= -172.8 + 172.8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das Modell ist plausibel: Zu Beginn um 08:00 Uhr und am Ende um 20:00 Uhr ist die Ladeleistung 0 kW, in der Mitte des Zeitraums beträgt sie 21.6 kW. Im Kontext steigt die Ladeaktivität im Tagesverlauf zunächst an, erreicht ein Maximum und nimmt anschließend wieder ab.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Es ist wichtig zu wissen, wann die Ladehalle netto „im Plus“ ist. Untersuchen Sie dafür, in welchen Zeitabschnitten $L(t)$ größer bzw. kleiner als $V(t)$ ist.

$$\begin{aligned} d(t) &= L(t) - V(t) \\ &= -0.1t^3 + 1.2t^2 - (0.1t^2 + 1) \\ &= -0.1t^3 + 1.2t^2 - 0.1t^2 - 1 \\ &= -0.1t^3 + 1.1t^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.1t^3 + 1.1t^2 - 1 && | :(-0.1) \\ &= t^3 - 11t^2 + 10 && | \, t_1 = 1 \end{aligned}$$

Das Horner-Schema kann hier aus technischen Gründen nur mit der Variable x dargestellt werden. Sie können selbstverständlich mit t rechnen.

	1	-11	0	10
1		1	-10	-10
	1	-10	-10	0

$$\begin{aligned} 0 &= t^2 - 10t - 10 \\ t_{2/3} &= 5 \pm \sqrt{5^2 + 10} \\ t_2 &\approx 10.916 \quad \vee \quad t_3 \approx -0.916 \end{aligned}$$

Im Intervall $[0; 12]$ liegen nur $t_1 = 1$ und $t_2 \approx 10.916$. Vorzeichen von $d(t)$ in den Abschnitten:

$$\begin{aligned} d(0) &= -1 < 0 \\ d(6) &= -0.1 \cdot 6^3 + 1.1 \cdot 6^2 - 1 = 17 > 0 \\ d(12) &= -0.1 \cdot 12^3 + 1.1 \cdot 12^2 - 1 = -15.4 < 0 \end{aligned}$$

Für $0 \leq t < 1$ und $10.916 < t \leq 12$ gilt $L(t) < V(t)$, für $1 < t < 10.916$ gilt $L(t) > V(t)$.

Im Kontext wird von 08:00 Uhr bis 09:00 Uhr und ab etwa 18:55 Uhr mehr verbraucht als geladen. Dazwischen ist die Ladehalle netto „im Plus“.

c) Bestimmen Sie die netto geladene Energie zwischen 08:00 Uhr und 20:00 Uhr in kWh. (Im Modell entspricht das der Fläche zwischen den Graphen von $L(t)$ und $V(t)$ im Intervall $[0; 12]$, mit Vorzeichen.)

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{12} (-0.1t^3 + 1.1t^2 - 1)\, dt \\ &= \left[-0.025t^4 + \frac{11}{30}t^3 - t \right]_0^{12} \\ &= -0.025 \cdot 12^4 + \frac{11}{30} \cdot 12^3 - 12 - 0 \\ &= -518.4 + 633.6 - 12 \\ &= 103.2 \end{aligned}$$

Die netto geladene Energie beträgt 103.2 kWh. Da das Ergebnis positiv ist, wandert insgesamt netto Energie in die Akkus.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) Für die Planung interessiert zusätzlich die „kritischste Phase“: Zu welcher Zeit ist der Abstand zwischen Ladeleistung und Verbrauch besonders groß? Begründen Sie mithilfe einer geeigneten Rechnung und geben Sie zusätzlich an, wie groß dieser Abstand ist.

$$d'(t) = -0.3t^2 + 2.2t$$
$$d''(t) = -0.6t + 2.2$$

notw. Bed.: $d'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.3t^2 + 2.2t \\ &= t(-0.3t + 2.2) \quad | \, t_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -0.3t + 2.2 \quad | \, +0.3t \\ 0.3t &= 2.2 \quad | \, :0.3 \\ t_2 &= \frac{22}{3} \approx 7.333 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $d'(t) = 0 \quad \wedge \quad d''(t) \neq 0$

$$d''\left(\frac{22}{3}\right) = -0.6 \cdot \frac{22}{3} + 2.2 = -2.2 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$$

y-Wert: $d(t) = y$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{22}{3}\right) &= -0.1 \cdot \left(\frac{22}{3}\right)^3 + 1.1 \cdot \left(\frac{22}{3}\right)^2 - 1 \\ &\approx -39.437 + 59.156 - 1 \\ &\approx 18.719 \qquad \Rightarrow \text{HP}(7.33 \mid 18.72) \end{aligned}$$

Vergleich mit den Rändern: $d(0) = -1$ und $d(12) = -15.4$. Beide Abstände sind kleiner als 18.72.

Der Abstand zwischen Ladeleistung und Verbrauch ist bei $t \approx 7.333$, also gegen 15:20 Uhr, am größten. Dort übersteigt die Ladeleistung den Verbrauch um etwa 18.72 kW.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**