DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 1ggVPW

Bestimmen Sie den Funktionsmittelwert und begründen Sie kurz, ob Symmetrie den Rechenweg vereinfacht.

a) $f(x) = x^3 - 4x$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 4 \cdot (-x) \\ &= -x^3 + 4x \\ &= -(x^3 - 4x) = -f(x) \end{aligned}$$

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und das Intervall symmetrisch liegt, gilt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^{2} (x^3 - 4x)\, dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Die Symmetrie vereinfacht den Rechenweg deutlich, weil das Integral direkt 0 ist.

b) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$ Intervall $[-1; 1]$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + 2 \cdot (-x)^3 - (-x) \\ &= -x^5 - 2x^3 + x \\ &= -(x^5 + 2x^3 - x) = -f(x) \end{aligned}$$

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und das Intervall symmetrisch liegt, gilt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} (x^5 + 2x^3 - x)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Die Symmetrie vereinfacht den Rechenweg deutlich, weil das Integral direkt 0 ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^2 + 3$ Intervall $[-3; 3]$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + 3 \\ &= x^2 + 3 = f(x) \end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3-(-3)} \int_{-3}^{3} (x^2+3)\,dx \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 \int_{0}^{3} (x^2+3)\,dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x \right]_0^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3 - 0 \right) \\ &= \frac{1}{3}(9+9) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Die Symmetrie vereinfacht den Rechenweg, weil nur über die halbe Intervalllänge integriert werden muss und die untere Grenze 0 ist.

d) $f(x) = -x^4 + 4x^2$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^4 + 4 \cdot (-x)^2 \\ &= -x^4 + 4x^2 = f(x) \end{aligned}$$

Da die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse ist, gilt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2-(-2)} \int_{-2}^{2} (-x^4+4x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2 \int_{0}^{2} (-x^4+4x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} \cdot 2^5 + \frac{4}{3} \cdot 2^3 - 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{32}{5} + \frac{32}{3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{15} \\ &= \frac{32}{15} \approx 2.133 \end{aligned}$$

Die Symmetrie vereinfacht den Rechenweg, weil nur über die halbe Intervalllänge integriert werden muss und die untere Grenze 0 ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = 0.25x^3 + x$ Intervall $[-4; 4]$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 0.25 \cdot (-x)^3 + (-x) \\ &= -0.25x^3 - x \\ &= -(0.25x^3 + x) = -f(x) \end{aligned}$$

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und das Intervall symmetrisch liegt, gilt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4-(-4)} \int_{-4}^{4} (0.25x^3 + x)\, dx \\ &= \frac{1}{8} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Die Symmetrie vereinfacht den Rechenweg deutlich, weil das Integral direkt 0 ist.

f) $f(x) = -2x^5 + x^3$ Intervall $[-1; 1]$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -2 \cdot (-x)^5 + (-x)^3 \\ &= 2x^5 - x^3 \\ &= -(-2x^5 + x^3) = -f(x) \end{aligned}$$

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und das Intervall symmetrisch liegt, gilt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} (-2x^5 + x^3)\, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Die Symmetrie vereinfacht den Rechenweg deutlich, weil das Integral direkt 0 ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**