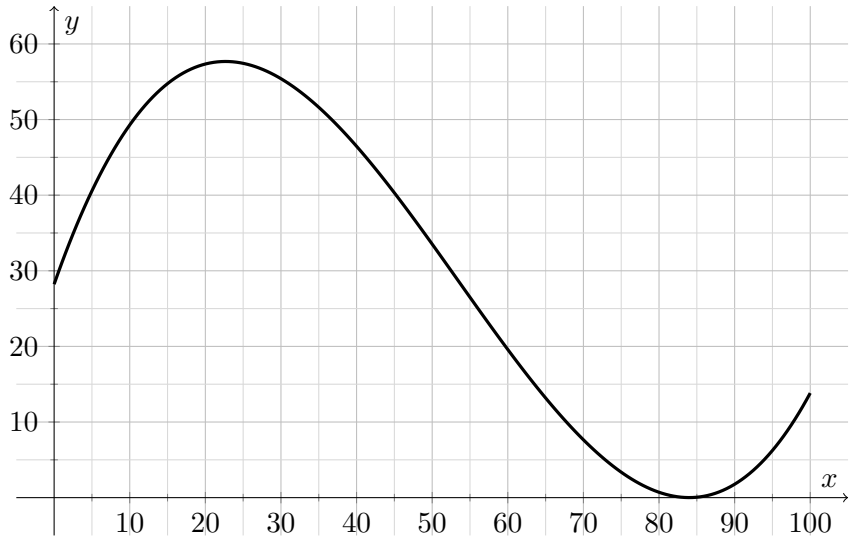
DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 1ftemf

Die momentane Geschwindigkeit eines Autos wird im Zeitraum von 0 bis 100 Sekunden durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2000}x^3 - \frac{2}{25}x^2 + \frac{357}{125}x + \frac{3528}{125}$$

modelliert (x in s, $f(x)$ in km/h).



a) Wie schnell ist das Auto zu Beginn?

$$f(0) = \frac{1}{2000} \cdot 0^3 - \frac{2}{25} \cdot 0^2 + \frac{357}{125} \cdot 0 + \frac{3528}{125} = \frac{3528}{125} = 28.224$$

Zu Beginn fährt das Auto also etwa 28.22 km/h.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) Wann erreicht das Auto die maximale Geschwindigkeit und wie groß ist diese?

$$f'(x) = \frac{3}{2000}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{357}{125}$$
$$f''(x) = \frac{3}{1000}x - \frac{4}{25}$$

notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{2000}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{357}{125} && | \cdot 2000 \\ &= 3x^2 - 320x + 5712 && | :3 \\ &= x^2 - \frac{320}{3}x + 1904 \\ x_{1/2} &= \frac{160}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{160}{3}\right)^2 - 1904} \\ x_1 &= 84 \quad \vee \quad x_2 = \frac{68}{3} \approx 22.667 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \quad \wedge \quad f''(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f''(84) &= \frac{3}{1000} \cdot 84 - \frac{4}{25} = 0.092 > 0 && \Rightarrow \text{TP} \\ f''\left(\frac{68}{3}\right) &= \frac{3}{1000} \cdot \frac{68}{3} - \frac{4}{25} = -0.092 < 0 && \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $f(x) = y$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{68}{3}\right) &= \frac{1}{2000} \cdot \left(\frac{68}{3}\right)^3 - \frac{2}{25} \cdot \left(\frac{68}{3}\right)^2 + \frac{357}{125} \cdot \frac{68}{3} + \frac{3528}{125} \\ &\approx 57.681 && \Rightarrow \text{HP}(22.67 \mid 57.68) \end{aligned}$$

Das Auto erreicht also nach $\frac{68}{3}\,\text{s} \approx 22.67\,\text{s}$ seine maximale Geschwindigkeit. Diese beträgt etwa $57.68\,\text{km/h}$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt.

Die Geschwindigkeit nimmt am stärksten ab, wenn die Steigung von $f(x)$ am kleinsten ist. Gesucht ist also die Wendestelle von f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2000}x^2 - \frac{4}{25}x + \frac{357}{125} \\ f''(x) &= \frac{3}{1000}x - \frac{4}{25} \\ f'''(x) &= \frac{3}{1000} \end{aligned}$$

notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3}{1000}x - \frac{4}{25} && | +\frac{4}{25} \\ \frac{3}{1000}x &= \frac{4}{25} && | :\frac{3}{1000} \\ x &= \frac{160}{3} \approx 53.333 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x) \neq 0$

$$f'''\left(\frac{160}{3}\right) = \frac{3}{1000} \neq 0 \qquad \checkmark$$

Steigung an der Wendestelle:

$$f'\left(\frac{160}{3}\right) = \frac{3}{2000} \cdot \left(\frac{160}{3}\right)^2 - \frac{4}{25} \cdot \frac{160}{3} + \frac{357}{125} \approx -1.411 < 0$$

Da $f'''(x) > 0$ ist, hat f' an dieser Stelle seinen kleinsten Wert. Die Geschwindigkeit nimmt also nach $\frac{160}{3}\,\text{s} \approx 53.33\,\text{s}$ am stärksten ab (um etwa 1.41 km/h pro Sekunde).

d) Wann steht das Auto kurzfristig? Hinweis: Eine Nullstelle ist bei $x = -8$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2000}x^3 - \frac{2}{25}x^2 + \frac{357}{125}x + \frac{3528}{125} && | \cdot 2000 \\ &= x^3 - 160x^2 + 5712x + 56448 && | \; x_1 = -8 \end{aligned}$$

	1	− 160	5712	56448
− 8		− 8	1344	− 56448
	1	− 168	7056	0

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 168x + 7056 \\ x_{2/3} &= 84 \pm \sqrt{84^2 - 7056} \\ x_2 &= 84 \end{aligned}$$

Im betrachteten Zeitraum von 0 bis 100 Sekunden ist nur die Nullstelle $x_2 = 84$ relevant, $x_1 = -8$ liegt außerhalb.

Das Auto steht also nach 84 s kurzfristig still.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Wodurch könnte die Schwankung der Geschwindigkeit verursacht werden?

Die Schwankung der Geschwindigkeit könnte zum Beispiel durch Bremsen und anschließendes Beschleunigen im Straßenverkehr entstehen.

Denkbar wären etwa eine Ampel, ein Abbiegevorgang, dichter Verkehr oder ein Hindernis, auf das der Fahrer reagieren muss.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**