DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 1YLK6d

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall zwei Größen: den Integralwert und den geometrischen Flächeninhalt.

a) $f(x) = 0.25x^3 - 1.5x$ Intervall $[-2; 2]$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.25x^3 - 1.5x \\ &= x(0.25x^2 - 1.5) && | \; x_1 = 0 \\ \\ 0 &= 0.25x^2 - 1.5 && | \; +1.5 \\ 0.25x^2 &= 1.5 && | \; :0.25 \\ x^2 &= 6 && | \; \sqrt{} \\ x_2 &= \sqrt{6} \approx 2.449 \quad \vee \quad x_3 = -\sqrt{6} \approx -2.449 \end{aligned}$$

Die Nullstellen $x_{2/3} = \pm\sqrt{6}$ liegen außerhalb des Intervalls und werden daher nicht berücksichtigt.

Da die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist und das Intervall symmetrisch liegt, gilt:

$$I = \int_{-2}^{2} (0.25x^3 - 1.5x)\, dx = 0$$

Für den Flächeninhalt wird die Fläche über $[0; 2]$ berechnet und verdoppelt:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{0}^{2} (0.25x^3 - 1.5x)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^4 - 0.75x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{16} \cdot 2^4 - 0.75 \cdot 2^2 - 0 \\ &= 1 - 3 = -2 \end{aligned}$$

$$A = 2 \cdot |A_1| = 2 \cdot |-2| = 4$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

b) $f(x) = 0.5x(x-1)(x-3)$ Intervall $[0;3]$

$$0 = 0.5x(x-1)(x-3) \quad | \; x_1 = 0$$

$$0 = x - 1 \quad | \; +1$$
$$x_2 = 1$$

$$0 = x - 3 \quad | \; +3$$
$$x_3 = 3$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 0.5x(x-1)(x-3)\,dx \\ &= \int_0^3 (0.5x^3 - 2x^2 + 1.5x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 0.75x^2\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{8}\cdot 3^4 - \frac{2}{3}\cdot 3^3 + 0.75\cdot 3^2 - 0 = -\frac{9}{8} = -1.125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 (0.5x^3 - 2x^2 + 1.5x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 0.75x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + 0.75 - 0 = \frac{5}{24} \approx 0.208 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^3 (0.5x^3 - 2x^2 + 1.5x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 0.75x^2\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{8}\cdot 3^4 - \frac{2}{3}\cdot 3^3 + 0.75\cdot 3^2 - \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3} + 0.75\right) \\ &= -\frac{9}{8} - \frac{5}{24} = -\frac{4}{3} \approx -1.333 \end{aligned}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|\frac{5}{24}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{37}{24} \approx 1.542$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ Intervall $[0; 5]$

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \\ x_1 &= 3 \quad \vee \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^5 (x^2 - 4x + 3)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_0^5 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 0 = \frac{20}{3} \approx 6.667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - 2 + 3 - 0 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^3 (x^2 - 4x + 3)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\right) = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_3^5 (x^2 - 4x + 3)\, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_3^5 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right) = \frac{20}{3} - 0 = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3| = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = \frac{28}{3} \approx 9.333$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

d) $f(x) = -x^2 + 1$ Intervall $[-2; 1]$

$$\begin{aligned} 0 &= -x^2 + 1 && | +x^2 \\ x^2 &= 1 && | \sqrt{\ } \\ x_1 &= 1 \quad \vee \quad x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{1} (-x^2 + 1)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-2}^{1} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + (-2) \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{-1} (-x^2 + 1)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-2}^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1) - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + (-2) \right) = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^{1} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1) \right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{8}{3} \approx 2.667$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x-4)$ Intervall $[0;5]$

$$0 = \frac{1}{4}x^2(x-4) \quad | \; x_1 = 0$$

$$0 = x - 4 \quad | \; +4$$
$$x_2 = 4$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^5 \frac{1}{4}x^2(x-4)\,dx \\ &= \int_0^5 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^5 \\ &= \frac{1}{16}\cdot 5^4 - \frac{1}{3}\cdot 5^3 - 0 = -\frac{125}{48} \approx -2.604 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^4 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 \\ &= \frac{1}{16}\cdot 4^4 - \frac{1}{3}\cdot 4^3 - 0 = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_4^5 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right]_4^5 \\ &= \frac{1}{16}\cdot 5^4 - \frac{1}{3}\cdot 5^3 - \left(\frac{1}{16}\cdot 4^4 - \frac{1}{3}\cdot 4^3\right) = -\frac{125}{48} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{131}{48} \end{aligned}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left|-\frac{16}{3}\right| + \left|\frac{131}{48}\right| = \frac{129}{16} = 8.0625$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

f) $f(x) = \cos(x)$ Intervall $[0; \pi]$

Hinweis zu Teilaufgabe f): So eine Aufgabe wird in der Form weder in einer Klausur, noch in der Abschlussprüfung drankommen. Sehen Sie diese Aufgabe als Herausforderung und recherchieren Sie selbstständig die Stammfunktion und Nullstellen der Kosinus-Funktion.

Dazu weiterhin wichtig: Möchten Sie mit sin / cos als Funktion rechnen, muss das Winkelmaß in Ihrem Taschenrechner auf „RAD“ (oder „radian“, Bogenmaß) eingestellt werden. Möchten Sie mit Winkeln rechnen (z. B. Winkel in einem Dreieck oder Steigungen in Winkel bzw. Winkel in Steigung umrechnen), müssen Sie „DEG“ (oder „degree“) in Ihrem Taschenrechner als Winkelmaß einstellen.

Nullstelle im Intervall $[0; \pi]$:

$$\begin{aligned} 0 &= \cos(x) \\ x_1 &= 0.5\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \cos(x)\,dx \\ &= [\sin(x)]_0^{\pi} \\ &= \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{0.5\pi} \cos(x)\,dx \\ &= [\sin(x)]_0^{0.5\pi} \\ &= \sin(0.5\pi) - \sin(0) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos(x)\,dx \\ &= [\sin(x)]_{0.5\pi}^{\pi} \\ &= \sin(\pi) - \sin(0.5\pi) = 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$A = |A_1| + |A_2| = |1| + |-1| = 2$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**