DAS MATHEBUCH – Lösung zu Aufgabe 1NwhX4

In einem klimatisierten Serverraum wird die Temperatur an einem zentralen Messpunkt während eines Nachmittags überwacht. Trotz gleichbleibender Klimaanlagen-Einstellung schwankt die Temperatur, weil zeitweise mehr Rechenleistung abgerufen wird (z. B. Updates/Backups) und Türen kurz geöffnet werden.
Der Verlauf wird im Modell durch die Funktion

$$T(t) = 0.02t^3 - 0.45t^2 + 3t + 18$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit 12:00 Uhr (also $0 \le t \le 10$) und $T(t)$ die Temperatur in °C.

a) Bestimmen Sie die Temperatur um 13:00 Uhr, 15:00 Uhr und 17:30 Uhr.

$$\begin{aligned} T(1) &= 0.02 \cdot 1^3 - 0.45 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 18 = 20.57 \\ T(3) &= 0.02 \cdot 3^3 - 0.45 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 18 = 23.49 \\ T(5.5) &= 0.02 \cdot 5.5^3 - 0.45 \cdot 5.5^2 + 3 \cdot 5.5 + 18 = 24.215 \end{aligned}$$

Die Temperatur beträgt um 13:00 Uhr 20.57 °C, um 15:00 Uhr 23.49 °C und um 17:30 Uhr etwa 24.22 °C.

b) Für die Auswertung ist die mittlere Temperatur im Zeitraum von 12:00 Uhr bis 22:00 Uhr entscheidend.

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{10-0} \int_0^{10} (0.02t^3 - 0.45t^2 + 3t + 18)\, dt \\ &= \frac{1}{10} \Big[0.005t^4 - 0.15t^3 + 1.5t^2 + 18t \Big]_0^{10} \\ &= \frac{1}{10} \Big(0.005 \cdot 10^4 - 0.15 \cdot 10^3 + 1.5 \cdot 10^2 + 18 \cdot 10 - 0 \Big) \\ &= \frac{1}{10}(50 - 150 + 150 + 180) \\ &= \frac{230}{10} = 23 \end{aligned}$$

Die mittlere Temperatur beträgt 23 °C.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

c) Die Technikleitung möchte wissen, wann die Temperatur ihren höchsten und ihren niedrigsten Wert im betrachteten Zeitraum erreicht. Tipp: Betrachten Sie nicht nur die Extremwerte, sondern auch Werte an den Intervallrändern.

$$T'(t) = 0.06t^2 - 0.9t + 3$$
$$T''(t) = 0.12t - 0.9$$

notw. Bed.: $T'(t) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= 0.06t^2 - 0.9t + 3 \quad | :0.06 \\ &= t^2 - 15t + 50 \\ t_{1/2} &= 7.5 \pm \sqrt{7.5^2 - 50} \\ t_1 &= 10 \quad \vee \quad t_2 = 5 \end{aligned}$$

hinr. Bed.: $T'(t) = 0 \quad \wedge \quad T''(t) \neq 0$

$$\begin{aligned} T''(10) &= 0.12 \cdot 10 - 0.9 = 0.3 > 0 \qquad \Rightarrow \text{TP} \\ T''(5) &= 0.12 \cdot 5 - 0.9 = -0.3 < 0 \qquad \Rightarrow \text{HP} \end{aligned}$$

y-Wert: $T(t) = y$

$$\begin{aligned} T(10) &= 0.02 \cdot 10^3 - 0.45 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 18 = 23 \qquad \Rightarrow \text{TP}(10 \mid 23) \\ T(5) &= 0.02 \cdot 5^3 - 0.45 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 18 = 24.25 \qquad \Rightarrow \text{HP}(5 \mid 24.25) \end{aligned}$$

Randwerte: Der rechte Rand $t = 10$ ist schon berechnet, es fehlt der linke Rand.

$$T(0) = 0.02 \cdot 0^3 - 0.45 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 18 = 18$$

Vergleich der Werte: $T(0) = 18$, $T(5) = 24.25$, $T(10) = 23$.

Der höchste Wert wird bei $t = 5$, also um 17:00 Uhr, mit 24.25 °C erreicht. Der niedrigste Wert wird am Intervallrand bei $t = 0$, also um 12:00 Uhr, mit 18 °C erreicht.

d) Wie stark weicht der Maximalwert prozentual vom Mittelwert aus b) ab? Wie stark weicht der Minimalwert prozentual vom Mittelwert ab?

Aus b) und c) gilt: $m = 23$, $T_{\max} = 24.25$ und $T_{\min} = 18$.

$$p_{\max} = \frac{24.25 - 23}{23} \cdot 100 \approx 5.435$$
$$p_{\min} = \frac{18 - 23}{23} \cdot 100 \approx -21.739$$

Der Maximalwert liegt ungefähr 5.43 % über dem Mittelwert, der Minimalwert ungefähr 21.74 % unter dem Mittelwert.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**

e) Ein Alarm soll ausgelöst werden, wenn die Temperatur den Mittelwert aus b) um mehr als 8 % überschreitet. Prüfen Sie, ob (und wann) das im Modell innerhalb des Zeitraums vorkommt.

$$T_{\text{Alarm}} = 1.08 \cdot 23 = 24.84$$

Die Höchsttemperatur $T_{\max} = 24.25\,°\text{C}$ liegt unter $24.84\,°\text{C}$, also nur etwa $5.43\,\%$ über dem Mittelwert. Der Grenzwert von $8\,\%$ wird im ganzen Zeitraum nicht erreicht, es wird kein Alarm ausgelöst.

f) Begründen Sie, warum die Berechnung von $\int_0^{10} T(t)\,dt$ im Sachkontext nicht sinnvoll ist.

Bei $\int_0^{10} T(t)\,dt$ würden Temperaturen über die Zeit aufsummiert. Es entstünde eine Größe in $°\text{C} \cdot \text{h}$, die hier keine anschauliche Bedeutung hat. Sinnvoll ist erst der daraus gebildete Mittelwert.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**