DAS MATHEBUCH – Hausaufgabe ibzc (III)

Aufgabe 1
Eine Produktionslinie stellt zylinderähnliche Kunststoffbehälter her. Der Radius des Behälters wird durch

$$f(x) = -ax^2 + 4x + 2 \qquad \text{für } 0 \le x \le 4, \quad a > 0$$

modelliert, wobei x die Höhe in cm und $f(x)$ den Radius in cm beschreibt.

a) Zeigen Sie, dass das Rotationsvolumen des Behälters allgemein

$$V(a) = \pi \left(\frac{1024}{5} a^2 - \frac{1792}{3} a + \frac{1456}{3} \right)$$

beträgt.

b) Berechnen Sie V für $a = 0.1$ und $a = 0.5$ und deuten Sie, wie der Parameter a die Form und das Volumen des Behälters beeinflusst.

c) Bestimmen Sie denjenigen Wert a^*, für den das Volumen genau 348.8π beträgt. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x \ge 0.$$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f für $x \ge 0$ vollständig.

b) Bestimmen Sie alle Extrempunkte von f für $x \ge 0$.

c) Der Graph von f schließt im Intervall zwischen den beiden Nullstellen $x = 0$ und $x = 3$ eine Fläche mit der x-Achse ein. Berechnen Sie das Rotationsvolumen, das entsteht, wenn diese Fläche um die x-Achse rotiert.

d) Deuten Sie, warum der Tiefpunkt TP$(3 \mid 0)$ gleichzeitig eine Nullstelle ist, und erläutern Sie, welche Konsequenz das für den Rotationskörper an dieser Stelle hat.

Aufgabe 3
(ACHTUNG: sehr schwierige Aufgabe!)
Begründen Sie allgemein: Wenn man den Graphen von $f(x)$ im Intervall $[a; b]$ vertikal um den konstanten Wert $c > 0$ nach oben verschiebt, also $\tilde{f}(x) = f(x) + c$ betrachtet, verändert sich das Rotationsvolumen. Leiten Sie eine allgemeine Formel für die Volumenzunahme $\Delta V = V_{\tilde{f}} - V_f$ her und begründen Sie, warum ΔV immer positiv ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner
Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download und Lösungsvideos auf **dasmathebuch.de**