

DAS MATHEBUCH.de

Themenbereiche: Statistik, Analysis, Lineare Algebra und Stochastik |
Lösungen, Lösungsvideos, Hausaufgaben: **www.dasmathebuch.de**

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Auflage (9) 3 | (2018 – 2020) (2021 – 2025) 2026|v2.1.90

Dieses Werk erscheint gegebenenfalls auch als gedruckte Ausgabe und steht als kostenloser PDF download auf **dasmathebuch.de** bereit. Die unveränderte Weitergabe, Speicherung und Nutzung in nicht-kommerziellen Bildungskontexten ist gestattet – zum Beispiel im Unterricht, auf digitalen Lernplattformen, in der Nachhilfe, zur Prüfungsvorbereitung oder zum Selbststudium. Da das Buch fortlaufend überarbeitet wird, empfiehlt sich für die jeweils aktuelle Fassung der direkte Download von **dasmathebuch.de**. Bei Übernahmen von Auszügen soll die Quelle erhalten bleiben ("*DAS MATHEBUCH – dasmathebuch.de*").
Eine kommerzielle Nutzung – etwa der Verkauf, die Einbindung in kostenpflichtige Angebote oder eine Lizenzierung gegen Entgelt – ist ohne vorherige schriftliche Zustimmung nicht gestattet.
Alle Aufgaben und Texte sind neu formuliert und didaktisch sorgfältig angepasst. Anregungen aus der schulischen Praxis und aus typischen Aufgabenformaten haben als Inspiration gedient; die konkrete Ausgestaltung (Aufgabenstellungen, Zahlenwerte, Formulierungen) ist eigenständig entwickelt. Hinweise zu Quellen und weiteren Anregungen finden sich im Anhang bzw. in den Quellverweisen.
Die Inhalte sind mit großer Sorgfalt erstellt; eine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit und Aktualität wird nicht übernommen. Fachliche Anpassungen und Aktualisierungen bleiben vorbehalten.
Sollte dieses Buch in einem schulischen oder institutionellen Rahmen verwendet werden, freue ich mich über eine Rückmeldung oder Verlinkung.

Kontakt: mathe@dasmathebuch.de

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort 9
Hinweise zur Verwendung dieses Mathebuchs 11
Vier Kriterien für die Bewertung der mdl. Mitarbeit 12
Mathematische Operatoren 14
Formelsammlung 16
Grundlagen der Benotung schriftlicher Leistungen 18
Grundlagen der Bildung von Zeugnisnoten 18
Hausaufgaben 19

1 GRUNDLAGENWIEDERHOLUNG
1.1 Grundbegriffe 21
1.2 Bruchrechnen 23
1.3 Terme mit Klammern 27
1.4 Terme vereinfachen 27
1.5 Ausmultiplizieren 29
1.6 Faktorisieren 30
1.7 Klammern multiplizieren 31
1.8 Gleichungen lösen 32
1.9 Umrechnen von Einheiten 34
1.10 Vermischte Übungsaufgaben 37

2 STATISTIK
2.1 Absolute und relative Häufigkeiten 39
2.2 Daten darstellen 41
2.3 Arithmetisches Mittel, Modalwert und Median 43
2.4 Streuungsmaße 45
2.5 Boxplotdiagramme 49
2.6 Vermischte Übungsaufgaben 51
2.7 Checkliste – Statistik 56

3 LINEARE FUNKTIONEN
3.1 Einführung in lineare Funktionen 59
3.2 Steigungsdreieck 63
3.3 Geradengleichung mit zwei Punkten bestimmen 67
3.4 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen 69
3.5 Lagebeziehung von Geraden 71
3.6 Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte) 75
3.7 Vermischte Übungsaufgaben 79
3.8 Ein Blick in die Finanzmathematik – Teil I 95
3.9 Checkliste – Lineare Funktionen 100

4 QUADRATISCHE FUNKTIONEN
4.1 Einführung in quadratische Funktionen 103
4.2 Scheitelpunktform 107
4.3 Scheitelpunktform vs. Normalform 111
4.4 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen 115
4.5 Lagebeziehung von Parabeln und Geraden 121
4.6 Lagebeziehung zweier Parabeln 123
4.7 Linearfaktorzerlegung (Faktorschreibweise) 125
4.8 Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte) 127
4.9 Quadratische Funktionen mit LGS bestimmen 135
4.10 Vermischte Übungsaufgaben 137

4.11 Ein Blick in die Finanzmathematik – Teil II ... 149
4.12 Checkliste – Quadratische Funktionen ... 154

5 FUNKTIONSUNTERSUCHUNG
5.1 Funktionen höheren Grades ... 157
5.2 Polynomdivision ... 161
5.3 Horner-Schema ... 171
5.4 Substitution ... 173
5.5 Faktorisieren ... 175
5.6 Übungen zur Nullstellenberechnung ... 177
5.7 Mittlere Änderungsrate ... 179
5.8 Lokale Änderungsrate ... 183
5.9 Ableitung ... 191
5.10 Extrempunkte ... 193
5.11 Wendepunkte ... 201
5.12 Funktionsbestimmung (Steckbriefaufgaben) ... 207
5.13 Vollständige Funktionsuntersuchung ... 211
5.14 Vermischte Übungsaufgaben ... 215
5.15 Ein Blick in die Finanzmathematik - Teil III ... 229
5.16 Checkliste – Funktionsuntersuchung ... 232

6 INTEGRALRECHNUNG
6.1 Einführung in die Integralrechnung ... 235
6.2 Hauptsatz der Differential- / Integralrechnung ... 239
6.3 Integral zwischen zwei Funktionen ... 245
6.4 Integral vs. Fläche ... 251
6.5 Mittelwert einer Funktion ... 255
6.6 Rotationskörper ... 259
6.7 Vermischte Übungsaufgaben ... 263
6.8 Checkliste – Integralrechnung ... 272

7 VEKTORGEOMETRIE
7.1 Einführung in Vektoren ... 275
7.2 Rechnen mit Vektoren ... 279
7.3 Punkte und Vektoren im Raum ... 281
7.4 Betrag eines Vektors und Einheitsvektor ... 283
7.5 Normalenvektor und Winkel zwischen Vektoren ... 285
7.6 Geraden im Raum und Abstand Punkt-Gerade ... 287
7.7 Lagebeziehung von Geraden im Raum ... 291
7.8 Ebenengleichung ... 295
7.9 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen ... 299
7.10 Lagebeziehung von Ebenen ... 301
7.11 Abstand Punkt-Ebene ... 303
7.12 Winkel Gerade-Gerade-Ebene-Ebene ... 305
7.13 Vermischte Übungsaufgaben ... 307
7.14 Checkliste – Vektorgeometrie ... 316

8 WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
8.1 Laplace-Experimente ... 319
8.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung ... 321
8.3 Das Gesetz der großen Zahl ... 323
8.4 Ereignisse und Summenregel ... 325
8.5 Mehrstufige Zufallsexperimente ... 327
8.6 Bedingte Wahrscheinlichkeit ... 329

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

8.7 Kombinatorik 333
8.8 Bernoulli-Experimente 335
8.9 Vermischte Übungsaufgaben 337
8.10 Checkliste – Stochastik 346

9 LÖSUNGEN
9.1 Lösungen – 1 349
9.2 Lösungen – 2 352
9.3 Lösungen – 3 355
9.4 Lösungen – 4 360
9.5 Lösungen – 5 367
9.6 Lösungen – 6 376

10 BILDNACHWEISE
10.1 BILDNACHWEISE 381

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

VORWORT

Herzlich willkommen zur vollständig überarbeiteten Auflage von DAS MATHEBUCH!

Diese neue Ausgabe ist das Ergebnis einer intensiven Weiterentwicklung. Alle Aufgaben – rund 700 an der Zahl – wurden sorgfältig überarbeitet, didaktisch optimiert und sprachlich neu gefasst. Auch alle begleitenden Texte, Erklärungen und Hinweise wurden vollständig neu formuliert. Ziel war es, ein klar strukturiertes und praxisorientiertes Mathematikbuch zu schaffen, das sowohl im Unterricht als auch im Selbststudium eingesetzt werden kann.

DAS MATHEBUCH richtet sich an Schülerinnen und Schüler in den Jahrgangsstufen, die zur Fachhochschulreife oder zur Allgemeinen Hochschulreife führen. Es eignet sich für alle Schulformen, in denen mathematische Inhalte auf erhöhtem Niveau unterrichtet werden. Die behandelten Themen orientieren sich eng an den typischen Anforderungen der Oberstufe – von Funktionen und Analysis über analytische Geometrie bis hin zu Stochastik und weiteren zentralen Bereichen der Mathematik.

Ein besonderer Mehrwert dieses Buches sind die umfangreichen Lösungsvideos zu jeder einzelnen Aufgabe. In diesen Videos werden die Lösungswege anschaulich, verständlich und Schritt für Schritt erklärt – ideal für das eigenständige Lernen, zur Nachbereitung des Unterrichts oder zur gezielten Vorbereitung auf Klausuren.
Zu dieser Auflage kommen auch digitalisierte Lösungen und Erklärungsvideos zu den einzelnen Themenabschnitten hinzu. Diese Videos führen in neue Inhalte ein, erläutern grundlegende mathematische Konzepte und bieten damit eine fundierte Vorbereitung, bevor man sich den dazugehörigen Aufgaben widmet. So entsteht eine umfassende Unterstützung, die nicht nur beim Rechnen hilft, sondern auch beim Verstehen.

Am Ende des Buches finden Sie zudem die Endergebnisse zu allen Aufgaben, sodass eine schnelle Selbstkontrolle jederzeit möglich ist.

Der Aufbau des Buches folgt einem klaren Konzept: Neben der systematischen Einführung in mathematische Methoden liegt der Schwerpunkt auf anwendungsorientierten Aufgaben, insbesondere in Form von Sachtext- und kompetenzorientierten Aufgaben. Diese Art der Aufgabenstellung entspricht nicht nur den typischen Prüfungsformaten, sondern fördert auch das Verständnis für mathematische Zusammenhänge im Alltag und in beruflichen Kontexten.

Entstanden ist dieses Buch aus dem Wunsch heraus, ein Arbeitsmittel zu schaffen, das weit über eine bloße Aufgabensammlung hinausgeht. Es soll Ihnen ermöglichen, Mathematik nicht nur zu üben, sondern zu verstehen – mit allen Zwischenschritten, mit Erklärungen, mit Raum zum Nachdenken und mit der Sicherheit, jederzeit auf Hilfsmittel wie Videos und Ergebnisse zurückgreifen zu können.

Alle digitalisierten Lösungen und Lösungsvideos finden Sie auf **dasmathebuch.de**. Dort erwarten Sie zusätzlich viele weitere interessante Videos zu verschiedensten mathematischen Themen – anschaulich erklärt und mit dem Ziel, Mathematik verständlich zu machen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg auf Ihrem mathematischen Lernweg. Möge dieses Buch Ihnen eine verlässliche Unterstützung sein – mit Klarheit, Struktur und der nötigen Portion Motivation.

Mit den besten mathematischen Wünschen
Sebastian Wenner

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

HINWEISE ZUR VERWENDUNG DIESES MATHEBUCHS

DAS MATHEBUCH ist so aufgebaut, dass Sie sich die kompletten Inhalte der drei bzw. zwei Jahrgangsstufen prinzipiell selbst beibringen können. Zu jedem Themenbereich gibt es erklärende Texte und Definitionen, die meist anhand von Beispielen veranschaulicht werden. Die erklärenden Texte und Definitionen sind mit einem ⓘ (Information) und die Beispiele mit einem Ⓑ gekennzeichnet.
Die **Marginalienspalte** (links oder rechts am Seitenrand) enthält häufig wichtige Hinweise zum jeweiligen Absatz (daher unbedingt lesen!). Auch Fragen, die zum Nachdenken anregen sollen, finden Sie dort. Außerdem sind an sinnvollen Stellen QR-Codes hinterlegt, mit denen YouTube-Videos ⓟ aufgerufen werden können. Diese Videos zeigen zur Aufgabe passende Dokumentationen oder rein informative Inhalte, die die Aufgaben anschaulicher und greifbarer machen. Sollten mehrere QR-Codes angegeben sein, empfiehlt es sich, die Codes mit einem Finger abzudecken, die nicht geöffnet werden sollen. Das Scannen funktioniert mit einer beliebigen QR-Code-App oder (bei manchen Smartphones) direkt über die Kamera-App.
Am Ende eines jeden Kapitels gibt es eine Sammlung gemischter Übungsaufgaben, die dazu dienen, die zuvor erlernten Rechenmethoden durch eine längere Übungsphase zu festigen und im Langzeitgedächtnis zu speichern.

Marginalspalte
Das hier ist die Marginalspalte in der Informationen und auch Schlagwörter notiert werden.

Diese Übungsaufgaben sind in drei Anforderungsbereiche unterteilt:
Anforderungsbereich I: ○ , Anforderungsbereich II: ◒ , Anforderungsbereich III: ●
Der **Anforderungsbereich I** entspricht der Kompetenz, grundlegende mathematische Kenntnisse und Standardverfahren anzuwenden, um bekannte Aufgaben sicher zu lösen. Aufgaben im **Anforderungsbereich II** stellen Zusammenhänge zwischen Konzepten her und übertragen bekannte Methoden auf neue Aufgaben. Der **Anforderungsbereich III** stellt Aufgaben dar, bei denen komplexe Problemstellungen analysiert, eigenständige Lösungswege entwickelt und Ergebnisse kritisch reflektiert werden müssen.

Anforderungsbereiche

Aufgaben mit dem Hinweis Ⓚ sind **kompetenzorientierte** Aufgaben. Diese sind so formuliert, dass ein "Wieso?" deutlich wird – Sie sollen also nicht nur etwas rechnen, sondern auch verstehen, warum Sie es tun. Solche Aufgaben verknüpfen mathematisches Wissen mit realistischen Fragestellungen und fordern Sie dazu auf, eigene Lösungswege zu entwickeln. Wichtig ist dabei nicht nur das Ergebnis, sondern auch Ihr Vorgehen und Ihre Begründung.

Kompetenzorientierung
"Für das Streichen einer Wand stehen 120 Euro zur Verfügung. Reicht das Geld, wenn die Farbe pro m^2 2,80 Euro kostet?" **statt**: "Berechnen Sie die Fläche."

In Kapitel 9 finden Sie die Endergebnisse zu jeder Aufgabe aus diesem Buch. Ihren Lösungsweg können Sie dennoch überprüfen, indem Sie die Website **dasmathebuch.de** besuchen und dort den sechsstelligen Zeichencode eingeben, der hinter jeder Aufgabennummer steht. So können Sie entweder ein Lösungsvideo zur entsprechenden Aufgabe ansehen oder ein PDF mit dem Lösungsweg herunterladen.

digitalisierte Lösungen als PDF und Lösungsvideos

Auf **dasmathebuch.de** können Sie auch Ihre Hausaufgaben abrufen (siehe dazu Seite 18).

Hausaufgaben

Die Protagonisten dieses Mathebuchs
Sie werden feststellen, dass es in vielen Aufgaben um **Mike** und **Nina** geht. Damit Sie sich besser vorstellen können, wer das ist, habe ich die beiden hier für Sie abgebildet. Sie sollen Ihnen helfen, die Aufgaben greifbarer zu machen, und geben Ihnen ein Bild vor Augen, um wen es eigentlich geht.



Auch Mike und Nina wünschen Ihnen für die kommenden Jahre viel Erfolg!

VIER KRITERIEN FÜR DIE BEWERTUNG DER MDL. MITARBEIT

Die folgende Tabelle[2] soll helfen, Ihre mündliche Leistung auf einer differenzierten und somit fairen Basis zu beurteilen. Auch Sie selbst können sich damit differenziert einschätzen.

Note	**Motivation** (Mitarbeit)	**Qualität der Beiträge** (Inhalt)
1	– Regelmäßig freiwillige Mitarbeit mit häufigen Beiträgen, die über den Unterricht hinausgehen (z. B. eigenständige Recherche).	– differenzierte und fundierte Fachkenntnisse – eigenständige, den Unterricht tragende, neue Gedanken – problemlösende, fortführende Beiträge und Bewertungen
2	– regelmäßig freiwillige Mitarbeit – Beiträge, die über den Unterricht hinausgehen (z. B. Informationsbeschaffung, Internetrecherchen etc.)	– überwiegend eigenständige, fortführende Beiträge – überwiegend selbstständige Anwendung fundierter Fachkenntnisse – Unterscheidung zwischen wesentlichen und unwesentlichen Inhalten
3	– regelmäßig freiwillige Mitarbeit	– richtige Wiedergabe von wesentlichen Fakten und Zusammenhängen aus dem behandelten Stoffgebiet – im Unterricht erworbene Fachkenntnisse werden mit Hilfestellung angewendet
4	– gelegentlich freiwillige Mitarbeit	– Beiträge weisen nur fachliche Grundkenntnisse auf – Beiträge zeigen geringe Fachkenntnisse und kleine Lernfortschritte
5	– selten freiwillige Mitarbeit – Mitarbeit meist nur nach Aufforderung	– Beiträge unterrichtlich kaum verwertbar – Beiträge zeigen ganz geringe Fachkenntnisse und kaum Lernfortschritte
6	– keine freiwillige Mitarbeit – keine Mitarbeit nach Aufforderung – häufiges Fehlen	– keine unterrichtlich verwertbaren Beiträge – keine Fachkenntnisse und kein Lernfortschritt erkennbar

Sie sehen also sehr deutlich, dass Ihre mündliche Leistung nicht nur auf der Quantität (also wie oft Sie etwas sagen), sondern auch auf der Qualität (also was Sie sagen) beruht. Es lässt sich aber auch festhalten, dass häufige "mittelgute" Beiträge durchaus besser sein können als seltene gute Beiträge. Trauen Sie sich einfach etwas zu sagen und zu fragen.

2 Diese Darstellung basiert auf einer Quelle unbekannten Ursprungs. Bei urheberrechtlichen Ansprüchen wird die Quelle selbstverständlich ergänzt oder das Material entfernt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Sprachliche Darstellung (Fachsprache)	**Gesprächsfähigkeit** (Interaktion)	Note
– zusammenhängende, umfassende und präzise Darstellung – souveräne Anwendung der Fachsprache	– kritische Bewertung und Fortführung der Beiträge anderer – Beiträge zur zielgerichteten Gesprächsführung	1
– zusammenhängende und sprachlich korrekte Darstellung – korrekte Anwendung der Fachsprache	– kritische Bewertung und Fortführung der Beiträge anderer	2
– zusammenhängende und sprachlich angemessene Darstellung – weitgehend korrekte Anwendung der Fachsprache	– Bereitschaft/Fähigkeit, die Beiträge anderer aufzunehmen und konstruktiv zu nutzen	3
– ausreichende sprachliche Ausdrucksfähigkeit – gelegentlich korrekte Anwendung der Fachsprache	– Bereitschaft/Fähigkeit, die Beiträge anderer inhaltlich wiederzugeben	4
– mangelhafte sprachliche Ausdrucksfähigkeit – nicht ausreichende Anwendung von Fachsprache	– mangelnde Bereitschaft/Fähigkeit, personen- und/oder sachbezogen zu reagieren – mangelnde Bereitschaft/Fähigkeit zuzuhören	5
– ungenügende sprachliche Ausdrucksfähigkeit – keine Anwendung von Fachsprache	– Teilnahmslosigkeit	6

MATHEMATISCHE OPERATOREN

Aufgabenstellungen können mit unterschiedlichen Operatoren[2] gestellt werden. Je nach Operator muss die Aufgabe mehr oder weniger ausführlich bearbeitet werden.

Operator	Definition	Beispiel
Anforderungsbereich I - Grundlegende mathematische Kenntnisse und Standardverfahren anwenden, um bekannte Aufgaben sicher zu lösen.		
angeben, nennen	Objekte, Sachverhalte, Begriffe oder Daten ohne nähere Erläuterungen, Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene e liegen.
beschreiben	Strukturen, Sachverhalte oder Verfahren in eigenen Worten unter Berücksichtigung der Fachsprache angemessen wiedergeben	Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f im Diagramm.
erstellen	Sachverhalte, Zusammenhänge, Methoden oder Daten in übersichtlicher, fachlich sachgerechter Form darstellen	Erstellen Sie eine Wertetabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung.
vereinfachen	komplexe Terme oder Gleichungen auf eine Grundform oder eine leichter weiter zu verarbeitende Form bringen	Vereinfachen Sie den Funktionsterm der Ableitungsfunktion so weit wie möglich.
zeichnen, grafisch darstellen	eine maßstäblich hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen	Zeichnen Sie den Graphen von f in ein geeignetes Koordinatensystem.
Anforderungsbereich II - Zusammenhänge zwischen Konzepten herstellen und bekannte Methoden auf neue Aufgaben übertragen.		
anwenden	eine bekannte Methode auf eine neue Problemstellung beziehen	Wenden Sie das Verfahren der Polynomdivision an.
begründen	Sachverhalte unter Nutzung von Regeln und mathematischen Beziehungen auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen	Begründen Sie, dass die Funktion f mindestens einen Wendepunkt hat.
berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen; gelernte Algorithmen ausführen	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.
bestimmen, ermitteln	Zusammenhänge oder Lösungswege aufzeigen und unter Angabe von Zwischenschritten die Ergebnisse formulieren	Bestimmen Sie die Nullstellen von f in Abhängigkeit vom Parameter k.
darstellen	Sachverhalte, Zusammenhänge, Methoden oder Verfahren in fachtypischer Weise strukturiert wiedergeben	Stellen Sie die Beziehung zwischen den Werten und dem Verlauf des Graphen von f dar.
entscheiden	sich bei Alternativen eindeutig und begründet auf eine Möglichkeit festlegen	Entscheiden Sie, welche der Geraden die Tangente im Punkt P ist.
erklären	Sachverhalte mit Hilfe eigener Kenntnisse verständlich und nachvollziehbar machen und begründet in Zusammenhänge einordnen	Erklären Sie das Auftreten der beiden Lösungen.

2 vgl. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Bildung/Auslandsschulwesen/Kerncurriculum/Auslandsschulwesen-Operatoren-Mathematik-10-2012.pdf, abgerufen am 17.11.2024

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

erläutern	einen Sachverhalt durch zusätzliche Informationen veranschaulichen	Erläutern Sie die Aussage anhand eines Beispiels.
gliedern	Sachverhalte unter Benennung des verwendeten Ordnungsschemas in mehrere Bereiche aufteilen	Gliedern Sie den von Ihnen entwickelten Lösungsweg.
herleiten	die Entstehung oder Entwicklung von gegebenen oder beschriebenen Sachverhalten oder Gleichungen aus anderen Sachverhalten darstellen	Leiten Sie die gegebene Funktionsgleichung der Stammfunktion her.
interpretieren, deuten	Phänomene, Strukturen oder Ergebnisse auf Erklärungsmöglichkeiten untersuchen und diese unter Bezug auf eine gegebene Fragestellung abwägen	Bestimmen Sie das Integral und interpretieren Sie den Zahlenwert geometrisch.
prüfen	Fragestellungen, Sachverhalte, Probleme nach bestimmten fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten	Prüfen Sie, ob die beiden Graphen Berührpunkte haben.
skizzieren	die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes, eines Sachverhaltes oder einer Struktur grafisch (eventuell auch als Freihandskizze) darstellen	Skizzieren Sie die Graphen der jeweiligen Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
untersuchen	Eigenschaften von Objekten oder Beziehungen zwischen Objekten anhand fachlicher Kriterien nachweisen	Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.
vergleichen	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede darstellen	Vergleichen Sie die beiden Lösungsverfahren.
zeigen, nachweisen	Aussagen unter Nutzung von gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen	Zeigen Sie, dass die beiden gefundenen Vektoren orthogonal sind.
Anforderungsbereich III - Komplexe Problemstellungen analysieren, eigenständige Lösungswege entwickeln und Ergebnisse kritisch reflektieren.		
auswerten	Daten, Einzelergebnisse oder andere Elemente in einen Zusammenhang stellen, ggf. zu einer Gesamtaussage zusammenführen und Schlussfolgerungen ziehen	Werten Sie die Ergebnisse in Abhängigkeit vom Parameter k aus.
beurteilen, bewerten	zu Sachverhalten eine selbstständige Einschätzung unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen	Beurteilen Sie das beschriebene Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Extremstelle.
beweisen	Aussagen im mathematischen Sinne ausgehend von Voraussetzungen unter Verwendung von bekannten Sätzen und von logischen Schlüssen verifizieren	Beweisen Sie, dass die Diagonalen eines Parallelogramms einander halbieren.
verallgemeinern	aus einem beispielhaft erkannten Sachverhalt eine erweiterte Aussage formuliere	Verallgemeinern Sie die gezeigten Eigenschaften.
widerlegen	Aussagen im mathematischen Sinne unter Verwendung von logischen Schlüssen, ggf. durch ein Gegenbeispiel falsifizieren	Widerlegen Sie die folgende Behauptung: …
zusammenfassen	den inhaltlichen Kern unter Vernachlässigung unwesentlicher Details wiedergeben	Fassen Sie die Eigenschaften der Funktionen der Funktionenschar fk zusammen.

FORMELSAMMLUNG

STATISTIK

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$

Arithmetisches Mittel mit absl. Häufigk.: $\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot H_i = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + ... + x_m \cdot H_m}{n}$

Arithmetisches Mittel mit relat. Häufigk.: $\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot h_i = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + ... + x_m \cdot h_m$

Spannweite: $R = x_{max} - x_{min}$

Mittlere absolute Abweichung: $\overline{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}| = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + ... + |x_n - \overline{x}|}{n}$

Varianz: $v = s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}$

Standardabweichung: $s = \sqrt{v} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}}$

ANALYSIS

Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$ <=> Dreieck ist rechtwinklig
(a und b sind Katheten und c ist Hypotenuse)

Geradengleichung: $g(x) = mx + b$ mit $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Winkel einer Gerade: $\tan(\alpha) = m$

Schreibweisen quadratischer Funktionen:
Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Scheitelpunktform: $f(x) = a(x - d)^2 + e$
Linearfaktorzerlegung: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Binomische Formeln:
1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

pq-Formel mit $0 = x^2 + px + q$: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Mitternachtsformel mit $0 = ax^2 + bx + c$: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ableitung einer Funktion $f(x) = ax^n$: $f'(x) = nax^{n-1}$

Stammfunktion einer Funktion $f(x) = ax^n$: $F(x) = \frac{a}{n+1} x^{n+1}$

Hauptsatz der Diff.- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\,dx = |F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ mit $F'(x) = f(x)$

Mittelwert einer Funktion: $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

Rotationsvolumen: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

LINEARE ALGEBRA

Gerade in Parameterform durch $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$:
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Ebene in Parameterform durch $A(a_1|a_2|a_3)$, $B(b_1|b_2|b_3)$ und $C(c_1|c_2|c_3)$:
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Ebene in Koordinatenform (KF):
$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = a$$

Betrag eines Vektors:
$$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Skalarprodukt:
$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Normalenvektor mittels Kreuzprodukt:
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt-Gerade mit $g: \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$:
$$d(P,g) = \frac{|(\vec{p} - \vec{u}) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Für die folgenden Gleichungen gilt: $\vec{n}$ ist Normalenvektor, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind Richtungsvektoren.

Abstand Punkt-Ebene mit E in KF:
$$d(P,E) = \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - a}{|\vec{n}|}$$

Winkel zwischen Vektoren bzw. Geraden:
$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \text{bzw.} \quad \cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} * \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Winkel zwischen Ebene E und Gerade g:
$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} * \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$$

Winkel zwischen zwei Ebenen E und F:
$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E * \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$

STOCHASTIK

stochastische Unabhängigkeit:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

bedingte Wahrscheinlichkeit:
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bernoulli-Verteilung:
$$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n - k}$$

Erwartungswert:
$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n$$

Standardabweichung/Varianz:
$$\sigma = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Satz von Bayes:
$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Fakultät:
$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1 \quad \text{(mit } 0! = 1\text{)}$$

Kombination ohne Wiederholung:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Kombination mit Wiederholung:
$$\binom{n + k - 1}{k} = \frac{(n + k - 1)!}{k! \cdot (n - 1)!}$$

Permutation ohne Wiederholung:
$$P(n) = n!$$

Permutation mit Wiederholung:
$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_k!}$$

GRUNDLAGEN DER BENOTUNG SCHRIFTLICHER LEISTUNGEN

Jeder Test und jede Klassenarbeit wird nach folgendem Notenschlüssel benotet (die Werte unter den Noten sind in Prozent angegeben):

sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend	mangelhaft	ungenügend
100 bis 86,5	86 bis 73	72,5 bis 59,5	59 bis 46	45,5 bis 23	22,5 bis 0

GRUNDLAGEN DER BILDUNG VON ZEUGNISNOTEN

Sie erhalten Halbjahres- und Schuljahreszeugnisse.
Bei beiden setzt sich die Zeugnisnote aus den schriftlichen und sonstigen Leistungen im Verhältnis 50:50 zusammen. Die sonstigen Leistungen beinhalten mündliche Leistungen und Tests. Diese insgesamt drei Leistungen werden wie folgt gewichtet:

Schriftliche Leistungen
Klassenarbeiten: 3-fach

Sonstige Leistungen
mündliche Mitarbeit: 2-fach
Tests: 1-fach

Auch wenn hier der Anschein erweckt wird, Tests zählen ja "fast nichts", können Sie doch das Zünglein an der Waage sein und Ihre Zeugnisnote sowohl verbessern aber auch verschlechtern. Daher geben Sie immer Ihr Bestes.

Die Schuljahresendnote bezieht sich, wie der Name schon sagt, auf das gesamte Schuljahr und nicht nur auf das zweite Halbjahr. Daher liegt es ganz in Ihrem Sinne, direkt schon zu Beginn des Schuljahres gute Leistungen zu erbringen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

HAUSAUFGABEN

Für jedes Kapitel gibt es Hausaufgaben in drei verschiedenen Niveaustufen (I, II und III).
Geben Sie den jeweiligen Aufgaben-Code auf **dasmathebuch.de** ein:

	Thema	**I**	**II**	**III**
1.2	Bruchrechnen	UABZ	iDdX	7txe
1.3	Terme mit Klammern	vRxs	hpdD	W2ys
1.4	Terme vereinfachen	Mhb7	G4kt	QfPn
1.5	Ausmultiplizieren	HGTt	cZ8z	pbuC
1.6	Faktorisieren	DFt2	rQFa	QnZC
1.7	Klammern multiplizieren	vywF	wsVm	MDn6
1.8	Gleichungen lösen	1ZHc	bPh2	HC5g
1.9	Umrechnen von Einheiten	kzDe	KCqR	URVs
2.1	Absolute und relative Häufigkeiten	vm9q	D2V3	ezEU
2.2	Daten darstellen	UgZP	Q4T2	tUcQ
2.3	Arithmetisches Mittel	CWcS	Wfsb	ypxF
2.4	Streuungsmaße	Ergx	vez4	e2Sc
2.5	Boxplotdiagramme	QRgc	nZCN	A9PD
3.1	Einführung in lineare Funktionen	UYkM	ThZ5	Nnae
3.2	Steigungsdreieck	CYqT	2Beg	kZNP
3.3	Geradengleichung mit zwei Punkten bestimmen	Khq4	w5ND	bKQg
3.4	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	CaDc	ZYL3	Byn6
3.5	Lagebeziehung von Geraden	1qGV	XgmH	STBs
3.6	Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte)	rRQw	XxeW	8KXa
4.1	Einführung in quadratische Funktionen	GtST	BHcd	aM8D
4.2	Scheitelpunktform	3v7t	RnPp	EPYx
4.3	Scheitelpunktform vs. Normalform	T9z9	DnbU	VVba
4.4	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	deHK	79G4	JAPh
4.5	Lagebeziehung von Parabeln und Geraden	tVKT	zYau	W78z
4.6	Lagebeziehung zweier Parablen	PNSP	Sz7N	mnXr
4.7	Linearfaktorzerlegung (Faktorschreibweise)	vpAV	yhFq	RGaQ
4.8	Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte)	ptS6	kbRb	yZrw
4.9	Quadratische Funktionen mit LGS bestimmen	tF6R	qJSD	eazj
5.1	Funktionen höheren Grades	aknq	MjrW	JfbF
5.2	Polynomdivision	zBcM	UTqb	3k7q
5.3	Horner-Schema	z6zt	TCxA	kFmG
5.4	Substitution	uueP	2xWY	yYK3
5.5	Faktorisieren	bVm9	UGmk	bS6g
5.6	Übungen zur Nullstellenberechnung	w8ac	vJcB	t8qX
5.7	Mittlere Änderungsrate	5AEb	YHry	f6E9
5.8	Lokale Änderungsrate	bcUy	iukA	PWh4
5.9	Ableitung	jpmL	HTBU	qYtP
5.10	Extrempunkte	96hz	sXGm	U6cp
5.11	Wendepunkte	bEh2	Xhq4	4ui4
5.12	Funktionsbestimmung (Steckbriefaufgaben)	cnxz	VpG7	bzXa
5.13	Vollständige Funktionsuntersuchung	8UEf	H35h	gNYh

	Thema	I	II	III
6.1	Einführung in die Integralrechnung	HpWz	tiGK	V37Y
6.2	Hauptsatz der Differential- / Integralrechnung	2Hr3	rhRQ	dPwg
6.3	Fläche zwischen zwei Funktionen	LJdb	Njy5	KekX
6.4	Integral vs. Fläche	DwM2	hu5T	WuaX
6.5	Mittelwert einer Funktion	TjpF	Nynh	Nrwd
6.6	Rotationskörper	fVGe	5ewp	ibzc

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



1.1 GRUNDBEGRIFFE

Natürliche Zahlen ($\mathbb{N}$)
Zahlen, die zum Zählen und zur Angabe von Reihenfolgen verwendet werden, z. B. *1 ; 2 ; 3*

Ganze Zahlen ($\mathbb{Z}$)
Positive und negative ganze Zahlen einschließlich der Null, z. B. *–2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2*

Rationale Zahlen ($\mathbb{Q}$)
Zahlen, die als Verhältnis zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können, z. B. $\frac{1}{2}$; *–0,25* ; $3\frac{2}{3}$

Reelle Zahlen ($\mathbb{R}$)
Alle Zahlen, die auf der Zahlengeraden dargestellt werden können, z. B. *–2 ;* $3{,}\overline{3}$; $\frac{5}{9}$; e ; π

Addition (Plus)
Summe aus Summanden: *Summe = Summand + Summand*

Subtraktion (Minus)
Differenz aus Minuend und Subtrahend: *Differenz = Minuend – Subtrahend*

Multiplikation (Mal)
Produkt aus Faktoren: *Produkt = Faktor · Faktor*

Division (Geteilt)
Quotient aus Dividend und Divisor: *Quotient = Dividend : Divisor* $= \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}$

Rechenregeln
Die Rechenregeln müssen in folgender Reihenfolge angewendet werden:
1) Klammern
2) Potenzen
3) Punktrechnung (Multiplikation und Division)
4) Strichrechnung (Addition und Subtraktion)
5) Von links nach rechts

Variable
Ein Symbol, das in mathematischen Ausdrücken und Gleichungen für einen unbekannten oder veränderlichen Wert steht, z. B. 3**x** ; 2**xy** , 4**a**^{2}

Koeffizient
Eine Zahl, die in einem mathematischen Ausdruck vor einer Variablen oder einer festen Größe (= Konstante, z. B. die Kreiszahl Pi/π) steht und diese multipliziert, z. B. **3**x ; **2**xy, **4**a^2 ; **2**π

Vorzeichenregelungen
Zwei gleiche Rechenzeichen ergeben *Plus*, zwei verschiedene ergeben *Minus*.

$+ \cdot + = +$ $\quad - \cdot + = -$ $\quad \frac{+a}{+b} = \frac{a}{b}$ $\quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$ $\quad +(+a) = a$ $\quad -(+a) = -a$

$- \cdot - = +$ $\quad + \cdot - = -$ $\quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ $\quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$ $\quad -(-a) = a$ $\quad +(-a) = -a$

Runden
Möchten Sie rationale und reelle Zahlen nach dem Komma runden, so machen Sie dies nach folgendem System, um den Rundungsfehler so klein wie möglich zu halten:
1 bis 4 = abrunden, 5 bis 9 = aufrunden
Es ist immer die Ziffer für das Runden verantwortlich, die auf die zu bleibende Ziffer folgt, z. B. bei zwei Nachkommastellen 1,344 = 1,34 ; 1,9892 = 1,99 ; 1,9988 = 2 ; 1,4549 = 1,45

Im Allgemeinen gilt für das Runden: Längen- und Flächenmaße sowie Geldbeträge werden auf zwei Stellen, Raummaße auf drei Stellen gerundet. Dezimalzahlen ohne Maßeinheit sollten grundsätzlich auf mindestens zwei Stellen gerundet werden.

Brüche
Die Fachbegriffe für die Zahlen eines Bruches sind
$\frac{2}{3} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$

Kommutativgesetz
Das Kommutativgesetz der Addition besagt, dass sich das Ergebnis einer Addition nicht ändert, wenn die Reihenfolge der Summanden vertauscht wird:
$a + b = b + a$

Das Kommutativgesetz der Multiplikation besagt, dass sich das Ergebnis einer Multiplikation nicht ändert, wenn die Reihenfolge der Faktoren vertauscht wird:
$a \cdot b = b \cdot a$

Distributivgesetz
Das Distributivgesetz besagt, dass Sie, statt eine Summe mit einer Zahl zu multiplizieren, auch jeden Summanden mit dieser Zahl multiplizieren und dann die Produkte addieren können. Es wird auch beim Ausmultiplizieren von Klammern verwendet:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Assoziativgesetz
Das Assoziativgesetz der Addition besagt, dass sich das Ergebnis einer Addition nicht ändert, wenn Sie Klammern umsetzen oder ganz weglassen:
$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$

Das Assoziativgesetz der Multiplikation besagt, dass sich das Ergebnis einer Multiplikation nicht ändert, wenn Sie Klammern umsetzen oder ganz weglassen:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$

Zeichen
Die wichtigsten Vergleichszeichen sind das *Gleichheitszeichen* (=), das *Ungleich-Zeichen* (≠), das *entspricht-Zeichen* (≙), das *Größer-als-Zeichen* (>), das *Kleiner-als-Zeichen* (<), das *Größer-Gleich-Zeichen* (≥) und das *Kleiner-Gleich-Zeichen* (≤). Weitere wichtige Zeichen sind der *Daraus-folgt-Pfeil* (=>), das *ungefähr-Zeichen* (≈), *das und-Zeichen* (∧) und *das oder-Zeichen* (∨).

Die Aufgaben aus dem Grundlagenkapitel rechnen Sie bitte OHNE TASCHENRECHNER!

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

1.2 BRUCHRECHNEN

Brüche vollständig kürzen (Tv9QWK)

Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner idealerweise durch ihren größten gemeinsamen Teiler (ggT) dividiert werden. Dadurch bleibt der Wert des Bruchs unverändert, aber er wird in einer einfacheren und übersichtlicheren Form dargestellt.

1. Eine **Kürzungszahl** (Kz.) bestimmen. Im besten Fall ist dies der ggT von Zähler und Nenner.
2. Zähler und Nenner durch die ermittelte Kürzungszahl **teilen**.
3. Falls möglich, **weiter kürzen**, bis der Bruch nicht mehr weiter gekürzt werden kann. Erst dann ist der Bruch vollständig gekürzt.

$\frac{18}{24}$ (Kz.: 6)

$= \frac{18:6}{24:6}$

$= \frac{3}{4}$

$\frac{42}{56}$ (Kz.: 2)

$= \frac{42:2}{56:2}$

$= \frac{21}{28}$ (Kz.: 7)

$= \frac{21:7}{28:7} = \frac{3}{4}$

ggT
Der größte gemeinsame Teiler (ggT) zweier oder mehrerer natürlicher Zahlen ist die größte Zahl, die alle gegebenen Zahlen ohne Rest teilt.

Brüche erweitern (Tv9QWK)

Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl (Ew.) multipliziert werden. Dadurch bleibt der Wert des Bruchs unverändert.

1. Eine **Zahl wählen**, mit welcher der Bruch erweitert werden soll.
2. Zähler und Nenner mit dieser Zahl **multiplizieren**.

$\frac{9}{2}$ (Ew.: 3)

$= \frac{9 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{27}{6}$

$\frac{3}{5}$ (Ew.: 7)

$= \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}$

Aufgabe 1.1 (FaGP4n)

Kürzen Sie den Bruch mit der angegebenen Kürzungszahl.

a) $\frac{18}{12}$ mit 3 b) $\frac{28}{20}$ mit 4 c) $\frac{24}{16}$ mit 2 d) $\frac{35}{25}$ mit 5

Aufgabe 1.2 (qUZ82d)

Ergänzen Sie die fehlende Zahl x.

a) $\frac{x}{60} = \frac{7}{30}$ b) $\frac{48}{x} = \frac{12}{10}$ c) $\frac{x}{35} = \frac{4}{5}$ d) $\frac{27}{x} = \frac{9}{20}$

Aufgabe 1.3 (m475yL)

Kürzen Sie den Bruch vollständig und notieren Sie das Ergebnis ebenfalls als Bruch.

a) $\frac{40}{64}$ c) $\frac{18}{24}$ e) $\frac{35}{84}$ g) $\frac{48}{72}$ i) $\frac{45}{60}$ k) $\frac{80}{100}$

b) $\frac{27}{63}$ d) $\frac{42}{70}$ f) $\frac{81}{108}$ h) $\frac{56}{98}$ j) $\frac{28}{35}$ l) $\frac{64}{80}$

Aufgabe 1.4 (4gdxX8)

Machen Sie die Brüche gleichnamig, indem Sie diese auf den gleichen Nenner bringen.

a) $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$ c) $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{9}$ e) $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{3}$ g) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$ i) $\frac{2}{9}$; $\frac{4}{15}$ k) $\frac{11}{15}$; $\frac{3}{8}$

b) $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{5}$ f) $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{12}$ h) $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$ j) $\frac{7}{9}$; $\frac{5}{12}$ l) $\frac{5}{14}$; $\frac{9}{20}$

Aufgabe 1.5 (M93vVy)

Vergleichen Sie die beiden Brüche mit einem passenden Vergleichsoperator (<, = oder >).

a) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ c) $\frac{7}{8}$; $\frac{5}{6}$ e) $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{7}$ g) $\frac{7}{10}$; $\frac{2}{3}$ i) $\frac{6}{7}$; $\frac{8}{10}$ k) $\frac{9}{16}$; $\frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{6}$; $\frac{10}{12}$ d) $\frac{9}{12}$; $\frac{3}{4}$ f) $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{2}$ h) $\frac{5}{8}$; $\frac{15}{24}$ j) $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{6}$ l) $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{14}$

Aufgabe 1.6 (DT13Hb)

Schreiben Sie den gegebenen Bruch als Prozent- und Promillewert.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{70}{100}$ c) $\frac{250}{1000}$ d) $\frac{7}{20}$ e) $\frac{13}{25}$ f) $\frac{11}{50}$

Aufgabe 1.7 (Wudw9j)

Geben Sie den Wert als Bruch an und kürzen Sie ihn gegebenenfalls vollständig.

a) 37 % b) 78 % c) 11 % d) 450 ‰ e) 62,5 % f) 5 %

Merke

- $\frac{3}{4}$ ist ein **echter Bruch**, da der Zähler kleiner als der Nenner ist und somit den Anteil eines Ganzen darstellt.
- $\frac{4}{3}$ ist ein **unechter Bruch**, weil der Zähler größer als der Nenner ist und damit mehr als ein Ganzes beschreibt.
- $1\frac{1}{3}$ ist ein **gemischter Bruch**, weil er aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch besteht.

Prozent und Promille

Prozent (%) bedeutet "von Hundert", also entspricht 1 % dem Bruch $\frac{1}{100}$.
Promille (‰) bedeutet "von Tausend", also entspricht 1 ‰ dem Bruch $\frac{1}{1000}$.

ⓘ **Brüche addieren oder subtrahieren (aa3zcL)**

Um Brüche addieren oder subtrahieren zu können, müssen diese gleichnamig sein, sie also den gleichen Nenner haben.

1. Brüche auf einen **gemeinsamen Nenner** bringen: linker Bruch mit rechtem Nenner und rechter Bruch mit linkem Nenner erweitern.
2. Brüche **addieren oder subtrahieren**, indem die Zähler addiert oder subtrahiert werden, der gemeinsame Nenner bleibt unverändert.
3. Ergebnis **kürzen**, falls möglich.

$\frac{1}{3}+\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}-\frac{3}{4}$
$=\frac{1\cdot 5}{3\cdot 5}+\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}$	$=\frac{1\cdot 4}{5\cdot 4}-\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}$
$=\frac{5}{15}+\frac{12}{15}$	$=\frac{4}{20}-\frac{15}{20}$
$=\frac{17}{15}$	$=-\frac{11}{20}$

Aufgabe 1.8 (AXM1NK)

Berechnen und kürzen Sie das Ergebnis gegebenenfalls vollständig.

a) $\frac{3}{5}+\frac{4}{9}$ d) $\frac{7}{10}-\frac{2}{15}$ g) $\frac{14}{25}-\frac{6}{20}$ j) $\frac{4}{15}+\frac{3}{8}$ m) $\frac{5}{16}+\frac{9}{20}$ p) $\frac{13}{15}-\frac{4}{9}$

b) $\frac{7}{12}+\frac{5}{8}$ e) $\frac{11}{18}+\frac{3}{4}$ h) $\frac{9}{11}-\frac{4}{7}$ k) $\frac{11}{18}-\frac{5}{9}$ n) $\frac{10}{21}-\frac{3}{7}$ q) $\frac{7}{10}+\frac{5}{16}$

c) $\frac{8}{9}-\frac{5}{6}$ f) $\frac{2}{11}+\frac{5}{6}$ i) $\frac{9}{14}+\frac{7}{10}$ l) $\frac{3}{8}-\frac{2}{5}$ o) $\frac{13}{25}+\frac{2}{5}$ r) $\frac{12}{25}-\frac{7}{15}$

Aufgabe 1.9 (AcHyyf)

Berechnen und kürzen Sie das Ergebnis gegebenenfalls vollständig.

a) $6\frac{3}{4}+3\frac{5}{8}$ c) $4\frac{1}{3}+2\frac{7}{10}$ e) $5\frac{3}{10}-2\frac{7}{12}$ g) $2\frac{3}{4}-4\frac{5}{6}$

b) $9\frac{5}{6}-4\frac{1}{2}$ d) $6\frac{7}{8}-3\frac{1}{4}$ f) $3\frac{4}{9}+2\frac{3}{5}$ h) $1\frac{3}{5}+2\frac{2}{3}$

ⓘ **Brüche miteinander multiplizieren (NYJTuP)**

Beim Multiplizieren von Brüchen gilt: "Zähler mal Zähler" und "Nenner mal Nenner".

1. Gegebenenfalls gemischte Brüche in "unechte" **Brüche umwandeln**.
2. Brüche auf einen **gemeinsamen Bruchstrich** schreiben.
3. Die Werte im Zähler und Nenner jeweils **miteinander multiplizieren**.
4. Ergebnis **kürzen**, falls möglich.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}$	$1\frac{1}{3}\cdot 2\frac{1}{5}$
$=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 7}$	$=\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{5}$
$=\frac{4}{14}$	$=\frac{4\cdot 11}{3\cdot 5}$
$=\frac{2}{7}$	$=\frac{44}{15}$

ⓘ **Bruch mit einer ganzen Zahl multiplizieren (NYJTuP)**

Um eine ganze Zahl mit einem Bruch zu multiplizieren, wird die Zahl zunächst als Bruch geschrieben (zum Beispiel $5=\frac{5}{1}$) und dann mit dem gegebenen Bruch multipliziert.

1. Ganze **Zahl als Bruch** schreiben.
2. Brüche auf **einen Bruchstrich** schreiben.
3. Die Werte im Zähler und Nenner jeweils **miteinander multiplizieren**.
4. Ergebnis **kürzen**, falls möglich.

Mit diesen Verfahren können auch mehrere Brüche miteinander multipliziert werden.

$3\cdot\frac{3}{8}$	$\frac{2}{7}\cdot 5\cdot\frac{1}{3}$
$=\frac{3}{1}\cdot\frac{3}{8}$	$=\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{1}{3}$
$=\frac{3\cdot 3}{1\cdot 8}$	$=\frac{2\cdot 5\cdot 1}{7\cdot 1\cdot 3}$
$=\frac{9}{8}$	$=\frac{10}{21}$

Aufgabe 1.10 (FxUXTJ)

Berechnen Sie das Ergebnis und geben Sie es als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\frac{3}{7}\cdot 5$ d) $\frac{5}{8}\cdot 12$ g) $\frac{4}{5}\cdot 9$ j) $\frac{11}{15}\cdot 3$ m) $\frac{3}{14}\cdot 18$ p) $\frac{10}{25}\cdot 13$

b) $\frac{8}{9}\cdot 6$ e) $\frac{7}{10}\cdot 4$ h) $\frac{6}{13}\cdot 10$ k) $\frac{5}{12}\cdot 16$ n) $\frac{9}{16}\cdot 11$ q) $\frac{3}{4}\cdot 20$

c) $\frac{2}{3}\cdot 7$ f) $\frac{9}{11}\cdot 8$ i) $\frac{2}{9}\cdot 14$ l) $\frac{7}{20}\cdot 5$ o) $\frac{8}{21}\cdot 7$ r) $\frac{12}{19}\cdot 15$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 1.11 (gwkXGt)

Berechnen Sie das Ergebnis und geben Sie es als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3}$ g) $\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{14}$ j) $\frac{6}{17} \cdot \frac{8}{21}$ m) $\frac{13}{24} \cdot \frac{6}{19}$ p) $\frac{15}{28} \cdot \frac{11}{30}$

b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{9}$ e) $\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{8}$ h) $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{16}$ k) $\frac{4}{9} \cdot \frac{11}{18}$ n) $\frac{10}{21} \cdot \frac{9}{25}$ q) $\frac{14}{33} \cdot \frac{5}{28}$

c) $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4}$ f) $\frac{3}{11} \cdot \frac{4}{7}$ i) $\frac{9}{13} \cdot \frac{2}{11}$ l) $\frac{7}{20} \cdot \frac{5}{12}$ o) $\frac{12}{17} \cdot \frac{7}{22}$ r) $\frac{15}{36} \cdot \frac{13}{30}$

Aufgabe 1.12 (LgF5MH)

Berechnen Sie das Ergebnis und geben Sie es als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8}$ d) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{9} \cdot 3$ g) $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3}$ j) $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9}$ e) $\frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \frac{7}{8}$ h) $4\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{4}$ k) $1\frac{3}{7} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$ f) $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9}$ i) $2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{2}{5}$ l) $3\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4$

Aufgabe 1.13 (yGWM97)

Berechnen Sie das Ergebnis und geben Sie es als vollständig gekürzten Bruch an.

·	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{2}{3}$	a)	b)	c)	d)	e)
$\frac{7}{8}$	f)	g)	h)	i)	j)
$\frac{5}{6}$	k)	l)	m)	n)	o)
$\frac{3}{10}$	p)	q)	r)	s)	t)

Brüche dividieren (yeVhWf)

Um zwei Brüche zu dividieren, wird der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert.

1. **Kehrwert des zweiten Bruchs** bilden (dem sogenannten Divisor) und diesen mit dem ersten Bruch multiplizieren.
2. Ergebnis **kürzen**, falls möglich.

$$\frac{4}{11} : \frac{3}{2} = \frac{4}{11} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{33}$$

$$3\frac{1}{2} : \frac{5}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$$

ⓘ **Kehrwert/-bruch**
Beim Kehrwert bzw. Kehrbruch werden Zähler und Nenner vertauscht.

Bruch durch eine Zahl bzw. eine Zahl durch einen Bruch dividieren (yeVhWf)

1. **Bruch geteilt durch Zahl**: Nenner des Bruchs mit der gegebenen Zahl multiplizieren.
   Zahl geteilt durch Bruch: Zahl als Bruch schreiben und wie oben fortfahren.
2. Ergebnis **kürzen**, falls möglich.

$$\frac{3}{2} : 5 = \frac{3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{10}$$

$$2 : \frac{8}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

ⓘ Machen Sie sich bewusst, warum "Bruch durch Zahl" wie links geschrieben berechnet werden kann.

Aufgabe 1.14 (EfKzMR)

Berechnen Sie das Ergebnis und geben Sie es als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\frac{3}{7} : 4$ d) $\frac{2}{5} : 6$ g) $\frac{3}{4} : 2$ j) $\frac{6}{7} : 3$ m) $12 : \frac{4}{7}$ p) $8 : \frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{8} : 3$ e) $\frac{4}{11} : 8$ h) $\frac{5}{6} : 9$ k) $\frac{7}{12} : 10$ n) $5 : \frac{2}{3}$ q) $7 : \frac{3}{4}$

c) $\frac{7}{9} : 5$ f) $\frac{9}{10} : 7$ i) $\frac{8}{13} : 4$ l) $\frac{11}{15} : 5$ o) $9 : \frac{5}{8}$ r) $10 : \frac{6}{11}$

Aufgabe 1.15 (GJD1nm)

Berechnen Sie das Ergebnis und geben Sie es als vollständig gekürzten Bruch an.

a) $\frac{3}{5}:\frac{2}{3}$ d) $\frac{5}{8}:\frac{7}{10}$ g) $\frac{7}{12}:\frac{3}{4}$ j) $\frac{11}{13}:\frac{4}{5}$ m) $\frac{8}{21}:\frac{3}{11}$ p) $\frac{13}{24}:\frac{5}{8}$

b) $\frac{4}{7}:\frac{3}{8}$ e) $\frac{1}{3}:\frac{4}{9}$ h) $\frac{9}{14}:\frac{5}{6}$ k) $\frac{5}{16}:\frac{9}{8}$ n) $\frac{12}{25}:\frac{5}{7}$ q) $\frac{17}{30}:\frac{6}{11}$

c) $\frac{2}{9}:\frac{5}{6}$ f) $\frac{6}{11}:\frac{2}{5}$ i) $\frac{8}{15}:\frac{7}{9}$ l) $\frac{7}{18}:\frac{2}{3}$ o) $\frac{9}{20}:\frac{4}{15}$ r) $\frac{19}{27}:\frac{8}{9}$

Aufgabe 1.16 (VLupi8)

Füllen Sie die Tabelle aus, indem Sie die Werte der ersten Zeile durch die Werte der ersten Spalte dividieren.

:	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{2}{3}$	a)	b)	c)	d)	e)
$\frac{7}{4}$	f)	g)	h)	i)	j)
$\frac{5}{12}$	k)	l)	m)	n)	o)
$\frac{8}{9}$	p)	q)	r)	s)	t)
$\frac{1}{10}$	u)	v)	w)	x)	y)

Aufgabe 1.17 (xRa5Hb)

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und kürzen Sie das Ergebnis vollständig.

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$ d) $\left(\frac{8}{11}+\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{5}{12}$ g) $\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}-\frac{2}{5}$ j) $\left(\frac{7}{8}-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{3}{5}$

b) $\frac{7}{9}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{7}:\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)$ h) $\left(\frac{11}{18}-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{5}{6}$ k) $\frac{11}{12}:\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{3}\right)$

c) $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}-\frac{2}{7}$ f) $\frac{7}{18}+\frac{2}{9}-\frac{5}{6}$ i) $\frac{5}{6}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ l) $\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{12}-\frac{4}{15}$

Aufgabe 1.18 (QzHveb)

Ordnen Sie die folgenden Brüche der Größe nach, beginnend mit dem Kleinsten.

a) $\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{4};\frac{2}{5};\frac{7}{10}$ g) $\frac{3}{10};\frac{5}{12};\frac{2}{3}$ j) $\frac{1}{6};\frac{5}{9};\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{3};\frac{5}{6};\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4};\frac{5}{8};\frac{2}{3}$ h) $\frac{1}{3};\frac{4}{9};\frac{7}{8}$ k) $\frac{2}{3};\frac{3}{8};\frac{5}{6}$

c) $\frac{2}{5};\frac{3}{8};\frac{5}{12}$ f) $\frac{2}{3};\frac{3}{5};\frac{4}{9}$ i) $\frac{3}{5};\frac{1}{4};\frac{2}{3}$ l) $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{5}$

Aufgabe 1.19 (GQXbp2)

Lösen Sie folgenden Sachaufgaben mithilfe von Brüchen.

a) Ein Kuchen wird in 8 gleich große Stücke geteilt. Wenn 5 Stücke gegessen werden, welcher Bruch des Kuchens ist übrig?

b) In einer Klasse sind $\frac{2}{5}$ der Schüler Mädchen und der Rest Jungen. Wie viele Schüler sind Jungen, wenn die Klasse insgesamt 25 Schüler hat?

c) Eine Strecke von 6 km wird in vier gleich lange Abschnitte unterteilt. Wie lang ist jeder Abschnitt in Kilometern? Geben Sie das Ergebnis als Bruch an.

Aufgabe 1.20 (h9euLp)

Berechnen Sie die folgenden Brüche mit Variablen, wobei $x = 3$ und $y = 4$ ist.

a) $\frac{x}{5}+\frac{y}{8}$ c) $\frac{x+y}{x-1}$ e) $\frac{x+2}{y+3}+\frac{y-1}{x+1}$ g) $\frac{3x+4y}{2x-y}$

b) $2\cdot\frac{x}{3}-\frac{y}{6}$ d) $\frac{x^2}{y}:\frac{y}{2x}$ f) $\frac{2x}{y}-\frac{y}{3x}$ h) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)\cdot\frac{2}{x+y}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

1.3 TERME MIT KLAMMERN

Terme mit Klammern berechnen (WLvQYz)

Enthält ein mathematischer Ausdruck Klammern, müssen diese zuerst gelöst werden.
Bei mehreren ineinander verschachtelten Klammern beginnt man mit der Innersten und arbeitet sich schrittweise nach außen vor. Innerhalb der Klammern gilt die Regel "Punkt-vor-Strich-Rechnung", also zuerst Multiplikation und Division, danach Addition und Subtraktion.

$5 \cdot (21 + 4)$	$(6 + 3 \cdot (11 - 5)) : 6$	$(4 + (3 \cdot (7 - 5)))$
$= 5 \cdot 25$	$= (6 + 3 \cdot 6) : 6$	$= (4 + (3 \cdot 2))$
$= \mathbf{125}$	$= (6 + 18) : 6$	$= (4 + 6)$
	$= 24 : 6$	$= \mathbf{10}$
	$= \mathbf{4}$	

Aufgabe 1.21 (dRkRTw)

Berechnen Sie den Wert des Terms.

a)	$6 \cdot (4 + 8)$	f)	$30 + (24 - 9)$	k)	$5 \cdot 4 - (8 + 3 \cdot (7 - 5))$
b)	$45 - (28 - 14)$	g)	$7 \cdot (15 - 5)$	l)	$3 + 6 \cdot (2 \cdot 4 + (5 - 3))$
c)	$100 : (50 - 25)$	h)	$84 : (21 + 7)$	m)	$8 \cdot (3 + (5 - (2 + 1)))$
d)	$(12 + 3) \cdot 5$	i)	$125 - (60 - (45 - 20))$	n)	$50 - (12 \cdot (3 + (7 - 4)))$
e)	$64 - (18 + 10)$	j)	$2 \cdot 3 + (4 - 5 \cdot (6 - 7))$	o)	$6 + (4 \cdot (2 + (3 \cdot (1 + 1))))$

Aufgabe 1.22 (8SvXqm)

Können Sie die Klammern weglassen, ohne dass sich der Wert ändert? Begründen Sie Ihre Meinung, ohne zu rechnen.

a)	$(8 + 5) \cdot 3$	c)	$(7 \cdot 3) + 9$	e)	$15 - (5 + 3)$
b)	$10 - (4 \cdot 2)$	d)	$(6 + 2) \cdot 4$	f)	$(3 \cdot 4) + 7$

Aufgabe 1.23 (VLdgD7)

Setzen Sie die Klammern so, dass der Wert des Terms stimmt.

a)	$8 + 4 \cdot 3 = 36$	c)	$45 : 5 + 3 \cdot 2 = 24$	e)	$30 - 5 + 2 \cdot 4 = 2$
b)	$50 - 5 \cdot 6 + 2 = 22$	d)	$8 + 4 \cdot 4 - 2 = 24$	f)	$30 : 2 + 3 \cdot 6 = 1$

1.4 TERME VEREINFACHEN

Kurzschreibweise von Termen (Xy6dKh)

Terme werden oft in einer kürzeren Schreibweise dargestellt:

1. Bei der Multiplikation mit einer Variablen kann der Multiplikationspunkt weggelassen werden, zum Beispiel: $4 \cdot x = 4x$.
2. Der Ausdruck $1x$ wird als x geschrieben, also $1x = x$.

Gleichartige Terme zusammenfassen (Xy6dKh)

Zwei Terme gelten als gleichartig, wenn sie aus denselben Variablen oder Klammerausdrücken bestehen. Dabei spielt die Reihenfolge der Variablen keine Rolle, ebenso wenig wie die Vorfaktoren oder Vorzeichen.
Gleichartige Terme lassen sich durch Addition oder Subtraktion zusammenfassen, indem die Koeffizienten addiert oder subtrahiert werden. Dabei gilt das Kommutativgesetz, welches besagt, dass die Reihenfolge von Additionen und Subtraktionen vertauscht werden kann.

Koeffizient
Eine Zahl, die in einem mathematischen Ausdruck vor einer Variablen oder einer festen Größe steht und diese multipliziert.

Beispiel

1. $7x^2$ und $4x^2$, $3a$ und a, $2xy$ und $11xy$, $4ab^2c$ und $3b^2ac$ sind jeweils gleichartige Terme.
2. $4x$ und $7y$, $9x^2y$ und $2xy^2$ sind keine gleichartigen Terme.

Ⓑ

Achtung
Achten Sie beim Vertauschen darauf, die Vorzeichen mitzunehmen!

Beispiel

1. $9x - 4x = 5x$

2. $2xy + 12xy = 14xy$

3. $\frac{1}{3}ab + \frac{3}{5}ab = \frac{14}{15}ab$

4. $3xy + 4y$ kann nicht weiter zusammengefasst werden.

5. $6x + 3 - 2x$ | vertauschen
   $= 6x - 2x + 3$ | zusammenfassen
   $= 4x + 3$

6. $2ab + a - ba + 3a$ | vertauschen
   $= 2ab - ba + a + 3a$ | zusammenfassen
   $= ab + 4a$

Aufgabe 1.24 (UkjNWN)
Fassen Sie die Terme zusammen.

a) $x + x + x + x + y$
b) $a + a + a + a + b + b$
c) $m + m - m - m + m$
d) $b + b - b + b + b$
e) $t + t - t - (-t)$
f) $-z - (-z) + (-z) + z$

Aufgabe 1.25 (XGVW8J)
Fassen Sie die Terme so weit wie möglich zusammen.

a) $3x + 5x$
b) $4y + 9y - 3y$
c) $7a - 2a + 4a$
d) $12b - 3b + b$
e) $6x^2 + 4x^2 - 2x^2$
f) $9m - 5m + 2m$
g) $2a + 3a - 4b + b$
h) $8x - 3x + 7y - y$
i) $5x^2 + 3x - 4x^2 + 2x$
j) $14y + 3y - 2z + z$
k) $10a^2 + 5a - 3a^2 + 2a$
l) $4m + 7n - 2m + 3n$
m) $6x + 4x - 2x$
n) $9y - 3y + y$
o) $5a + 7b - 3a + 2b$

Aufgabe 1.26 (NGcWzd)
Vereinfachen Sie die Terme soweit wie möglich.

a) $3x + 2x + 5$
b) $7y - 3y + 4 + 2y$
c) $9a + 6 - 4a - 2$
d) $5b + 3b - b + 8$
e) $4m - 2m + 3n - n$
f) $8x^2 + 3x - 2x^2 + 4$
g) $6y + 2 - 3y + 5$
h) $10a - 4 + 3a - 2a$
i) $15x - 5x + 7 + 2x$
j) $12b - 3b + 8 - 2b$
k) $9m + 4n - 3m - 2n$
l) $6a + 2a^2 - a + 4a^2$
m) $11x^2 + 5x - 3x + 2x^2$
n) $8y + 4z - 2y - z$
o) $14x - 7 + 3x + 5 - 2x$

Aufgabe 1.27 (ZrpGhp)
Vereinfachen Sie die Terme.

a) $6 \cdot 4x$
b) $7 \cdot 3a$
c) $8y \cdot 5$
d) $4 \cdot 2x$
e) $9a \cdot 3b$
f) $2 \cdot 6y$
g) $5x \cdot 2$
h) $3 \cdot 7z$
i) $4x \cdot 5y$
j) $10 \cdot 2a$
k) $8b \cdot 3$
l) $2x \cdot 4y$
m) $7 \cdot 4x$
n) $5a \cdot 3b$
o) $2 \cdot 8y$

Aufgabe 1.28 (E3mJLy)
Vereinfachen Sie die Terme.

a) $x \cdot x \cdot y$
b) $a^2 \cdot a$
c) $b \cdot b \cdot b^2$
d) $3x^2 \cdot x$
e) $y \cdot y^3$
f) $4a \cdot a^2$
g) $2xy \cdot 3x$
h) $5x \cdot y \cdot x$
i) $z^3 \cdot z^2$
j) $7a^2 \cdot a \cdot b$
k) $3x \cdot x \cdot y^2$
l) $2b \cdot b^3 \cdot b$
m) $a \cdot a^2 \cdot a^2$
n) $x^3 \cdot x^2 \cdot x$
o) $2b \cdot b^4 \cdot b$

Aufgabe 1.29 (A1mW84)
Vereinfachen Sie die Terme.

a) $3x \cdot (-2y) + 4x - 5xy$
b) $4a \cdot (-3b) + 2a - b + 6ab$
c) $(-5x^2) \cdot 2y - 3x - 4x^2y$
d) $6xy \cdot (-2z) + 3x - 4xy$
e) $8a^2 \cdot (-a) + 5a^3 - 3a$
f) $3b^3 \cdot (-2c) + b^2 - 4bc + 7b$
g) $2x^2 \cdot 3y - 4z + 5x^2y$
h) $4a \cdot 5b^2 + 6ab^2 - 2b + a$
i) $7x \cdot (-3y) + 4x - 2xy + 8$
j) $(-2u^2) \cdot (-3v) - u + 5uv$
k) $5ab \cdot (-4a^2) + 2ab - 3a^3b$
l) $6xy^2 \cdot (-2z) + 3x^2y - y^2z$
m) $4a \cdot (-b) - 3a^2b + 5ab + a$
n) $(-3m^2) \cdot n + 4mn - 2m^2n$
o) $9t \cdot (-2t^2) + 3t^3 - 5t$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

1.5 AUSMULTIPLIZIEREN

Klammern ausmultiplizieren (9DaE1h) ⓘ

Beim Multiplizieren einer Klammer mit einem Faktor (zum Beispiel einer Zahl) sind bestimmte Regeln zu beachten: Normalerweise rechnet man zunächst die Ausdrücke innerhalb der Klammer aus. Ist dies aufgrund enthaltener Variablen nicht möglich, wird die Klammer mit Hilfe des Distributivgesetzes, das im Kapitel "1.1 Grundbegriffe" erklärt wurde, aufgelöst.

Der Faktor, der vor oder hinter der Klammer steht, wird auf jeden einzelnen Term in der Klammer angewendet. Die so entstehenden Terme ordnet man üblicherweise in alphabetischer Reihenfolge, zuerst die Terme mit Variablen, dann konstante Terme ohne Variablen. Die folgenden Beispiele verdeutlichen das Vorgehen:

$4 \cdot (3a + 4b)$	$(-3a + 2b) \cdot \frac{1}{2}$	$(4x^2 - 3y) : 2$
$= 4 \cdot 3a + 4 \cdot 4b$	$= \frac{1}{2} \cdot (-3a) + \frac{1}{2} \cdot 2b$	$= 4x^2 : 2 - 3y : 2$
$= 12a + 16b$	$= -1{,}5a + b$	$= 2x^2 - 1{,}5y$

Minusklammer (9DaE1h) ⓘ

Wenn eine Klammer ein Minuszeichen davor hat, spricht man von einer "Minusklammer". Das entspricht einer Multiplikation mit der Zahl –1.
Es gilt: $-(a + b) = -1(a + b) = -a - b$

Beim Auflösen einer Minuskammer werden **alle** Vorzeichen innerhalb der Klammer umgekehrt: Plus wird zu Minus und Minus zu Plus.

$-(3x - 8)$	$-(-5a + 3b)$	$-(6x - y - 2)$
$= -(+3x - 8)$	$= +5a - 3b$	$= -6x + y + 2$
$= -3x + 8$	$= 5a - 3b$	

Aufgabe 1.30 (cpz5gk)

Lösen Sie die Klammern durch Ausmultiplizieren auf.

a)	$4(x + 5)$	d)	$5(3x + 2)$	g)	$8(a - b) \cdot 3$	j)	$4b(2b + 5)$
b)	$7(a - 3)$	e)	$6(b - 4) \cdot 2$	h)	$3x(x + 2)$	k)	$5y(y - 3)$
c)	$3(2y + 4)$	f)	$2(3x + 2)$	i)	$2(a - 1) \cdot a$	l)	$(2x + 3y) \cdot 4$

Aufgabe 1.31 (A6jbFR)

Lösen Sie die Klammern durch Ausmultiplizieren auf.

a)	$1{,}5(3x - 2y)$	c)	$2{,}2(5x - 3)$	e)	$(6x^2 - 3y) : 2$
b)	$\frac{2}{3}a(4b + 6)$	d)	$\frac{3}{4}(2a + b)$	f)	$(8a - 4b) : 4$

Aufgabe 1.32 (PLgitF)

Lösen Sie die Minusklammern auf.

a)	$-(3x - 4)$	d)	$-(-5x + 3y)$	g)	$-(-3x - (-4y) + 3)$
b)	$-(a + 2b - 5)$	e)	$-(4a - b + 2)$	h)	$-2{,}5a - (4x - 5y)$
c)	$-(2y - 7 + z)$	f)	$-(-3x + 2y - 4)$	i)	$-(3 - (2x - (-4y)))$

Aufgabe 1.33 (d2AGLm)

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a)	$4(x + 2) + 3(x - 1 + y)$	d)	$7(y - 2) - 3(2y + 1 - z)$	g)	$6(x + 3 - y) - 2(x + 1)$
b)	$5(a + 3b) - 2(a - b + 4)$	e)	$3(2x + y - 3) + 4(x - y)$	h)	$5(x + y - 2) + 2(x - 3y)$
c)	$2(3x - 4 + z) + 6(x + 2)$	f)	$2(a + b + c) + 3(2a - b)$	i)	$4(a - b) - 3(2a + b - 1)$

Aufgabe 1.34 (4XmjnT)

Ergänzen Sie die fehlenden Zahlen.

a)	$2(x + 3) = 2x + \square$	c)	$3(\square + \square) = 3y + 9$	e)	$\square(b + 3) = \square + 21$
b)	$5(\square - 2) = 5a - \square$	d)	$4(2x - 1) = \square x - 4$	f)	$6(\square - \square) = 12 + 3x$

1.6 FAKTORISIEREN

ⓘ **Terme faktorisieren (Cnkz7C)**

Das Faktorisieren, auch als **Ausklammern** bekannt, ist das Gegenteil des Ausmultiplizierens oder des Auflösens von Klammern und wird häufig beim Lösen von Gleichungen angewendet. Dabei wird ein gemeinsamer Faktor aus mehreren Termen herausgezogen, um den mathematischen Ausdruck zu vereinfachen. Dieses Verfahren macht Gleichungen übersichtlicher und erleichtert dadurch deren Lösung.

Das Ziel des Ausklammerns besteht darin, eine Summe oder Differenz in ein Produkt mit einer Klammer zu verwandeln. Dies gelingt jedoch nur, wenn in allen Termen derselbe Faktor enthalten ist – daher wird dieser Vorgang auch Faktorisieren genannt. Der ausgeklammerte Faktor wird dabei vor die Klammer geschrieben, während die verbleibenden Terme innerhalb der Klammer stehen. Dazu wird nach einer Zahl und/oder einer Variablen gesucht, die in allen Termen vorkommt.

Achtung
Bei Zahlen ist es sinnvoll, den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zu finden und die Terme als Produkt zu schreiben.

Ⓑ **Beispiel**

$20x + 12$	1. Der ggT von 20 und 12 ist 4.
$= \mathbf{4} \cdot 5x + \mathbf{4} \cdot 3$	2. Dieser Schritt kann gerne auch im Kopf ausgeführt werden.
$= \mathbf{4}(5x + 3)$	3. Der ggT wird vor die Klammer und der Rest hinein geschrieben.

Achtung
Wird ein Teil komplett faktorisiert, bleibt 1 übrig.

$9xy - 3y$	1. In beiden Summanden ist 3y enthalten (der ggT von 9 und 3 ist 3).
$= \mathbf{3y} \cdot 3x - \mathbf{3y} \cdot 1$	2. Dieser Schritt kann gerne auch im Kopf ausgeführt werden.
$= \mathbf{3y}(3x - 1)$	3. 3y wird vor die Klammer und der Rest hinein geschrieben.

Aufgabe 1.35 (mBYESp)

Vervollständigen Sie die Faktorisierungen indem Sie die Lücken ergänzen.

a) $6x + 9 = 3(\square + \square)$
b) $12a - 8 = 4(\square - \square)$
c) $14y + 7 = 7(\square + \square)$
d) $20b - 10 = 10(\square - \square)$
e) $9s - 3 = 3(\square - \square)$
f) $18x + 24 = 6(\square + \square)$

Aufgabe 1.36 (tytGjk)

Vervollständigen Sie die Faktorisierungen indem Sie die Lücken ergänzen.

a) $16x^2 + 8x = 8x(\square + \square)$
b) $10ab - 15a^2 = 5a(\square - \square)$
c) $21xy^2 - 14x = 7x(\square - \square)$
d) $9a^2b - 6a = 3a(\square - \square)$
e) $24y^3 - 18y^2 = 6y^2(\square - \square)$
f) $30x^2 + 45y = 15(\square + \square)$

Aufgabe 1.37 (pK7fPi)

Faktorisieren Sie so weit wie möglich.

a) $18x + 24$
b) $20a - 30b$
c) $36y - 14$
d) $8x^2 + 12x$
e) $25s - 10t$
f) $14a^2 + 21a$
g) $16xy - 8x$
h) $24m - 36n$
i) $9ab - 6a$
j) $45x^2z - 15xy$
k) $32a^3 - 24a^2$
l) $27b^2 - 18b$

Aufgabe 1.38 (Qba76W)

Faktorisieren Sie so weit wie möglich.

a) $12a^2b - 18ab^2 + 6b$
b) $30x^2y + 45xy^2 - 15x$
c) $28a^3b^2 - 14a^2b + 7ab$
d) $9x^3 - 27x^2 + 18x$
e) $16y^2z - 24yz^2 + 8z$
f) $36a^2b^3 + 54ab^2 - 27b$
g) $24x^2y - 16xy + 8y$
h) $18a^3 - 9a^2b + 3ab$
i) $40x^2z + 20xz^2 - 10z$
j) $27b^3 - 18b^2 + 9b$
k) $12m^2n - 6mn + 3n$
l) $30a^2b^2 + 15ab - 45a$

Aufgabe 1.39 (5cKpPa)

Faktorisieren Sie so weit wie möglich.

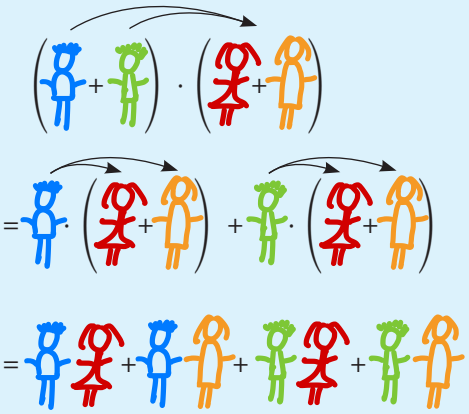
a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2$
b) $\frac{3}{5}a^2b - \frac{6}{5}ab$
c) $\frac{2}{3}y^3 - \frac{4}{9}y$
d) $\frac{5}{6}x^2y - \frac{1}{2}xy$
e) $\frac{7}{8}ab - \frac{3}{4}a$
f) $\frac{2}{5}x^3 - \frac{1}{5}x$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

1.7 KLAMMERN MULTIPLIZIEREN

Klammern miteinander multiplizieren (8UkH8F)
Beim Multiplizieren zweier Klammern werden zwei Summen oder Differenzen miteinander multipliziert. Dafür wird das Distributivgesetz zweimal angewendet.

anschaulich
Zwei Jungen treffen auf zwei Mädchen. Jeder Junge begrüßt jedes Mädchen, was bedeutet, dass der erste Junge beide Mädchen begrüßt und der zweite Junge ebenfalls beide Mädchen begrüßt.



mathematisch
Jeder Term aus der ersten Klammer wird mit jedem Term der zweiten Klammer multipliziert.

$$(a + b) \cdot (c + d)$$
$$= a(c + d) + b(c + d)$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

Kurzform
Erster Wert mal erster Wert und zweiter Wert mal zweiter Wert.

$$(a + b) \cdot (c + d)$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

Merke
Da jeder Junge jedes Mädchen begrüßt, könnten Sie diese Vorgehensweise auch als "**Höflichkeitssatz**" bezeichnen.

Beispiel

$$\begin{aligned}
&(3 + x)(x - 4) && \mid \text{ausmultiplizieren}\\
&= 3 \cdot x + 3 \cdot (-4) + x \cdot x + x \cdot (-4) && \mid \text{vereinfachen}\\
&= 3x - 12 + x^2 - 4x && \mid \text{sortieren}\\
&= x^2 + 3x - 4x - 12 && \mid \text{zusammenfassen}\\
&= x^2 - x - 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(3x + y)(-x + 4y - 5) && \mid \text{ausmultiplizieren}\\
&= 3x \cdot (-x) + 3x \cdot 4y + 3x \cdot (-5) + y \cdot (-x) + y \cdot 4y + y \cdot (-5) && \mid \text{vereinfachen}\\
&= -3x^2 + 12xy - 15x - xy + 4y^2 - 5y && \mid \text{sortieren}\\
&= -3x^2 + 12xy - xy - 15x + 4y^2 - 5y && \mid \text{zusammenfassen}\\
&= -3x^2 + 4y^2 + 11xy - 15x - 5y
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.40 (RbUqWj)
Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a) $(2x + 1)(x - 3)$
b) $(s + 4)(t - 2)$
c) $(y - 5)(2y + 3)$
d) $(3a - b)(a + 2b)$
e) $(x + 2)(2x - 5)$
f) $(m - 1)(3m + 4)$

Aufgabe 1.41 (zLRZ9A)
Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a) $(\frac{2}{3}x + 1)(3x - 2)$
b) $(4s - 3)(\frac{1}{2}s + 2)$
c) $(\frac{5}{6}a - 1)(2a + 4)$
d) $(3y + 2)(y - \frac{1}{2})$
e) $(\frac{2}{5}x - 4)(\frac{3}{4}x + 5)$
f) $(a + 1)(\frac{3}{2}a - 2)$
g) $(2m - 1)(\frac{1}{2}m + 3)$
h) $(x + 5)(\frac{4}{5}x - 3)$
i) $(\frac{5}{3}b - 4)(\frac{2}{5}b + 6)$

Aufgabe 1.42 (aPbmR6)
Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a) $(x + y)(x + y)$
b) $(2a - 3b)(2a - 3b)$
c) $(s - t)(s + t)$
d) $(x + 4)^2$
e) $(y + 5)^2$
f) $(x - 2)^2$
g) $(2x + 3)^2$
h) $(5a - 4)^2$
i) $(2m - 3n)^2$
j) $(6s - 2)^2$
k) $(7p + 2)^2$
l) $(3x - 4y)^2$

1.8 GLEICHUNGEN LÖSEN

ⓘ **Gleichungen lösen (jKA8YP)**

Eine Gleichung ist ein mathematischer Ausdruck, bei dem die Werte auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleich sind, also: linke Seite = rechte Seite.

Enthält eine Gleichung Variablen, wie zum Beispiel $x + 3 = 5$, besteht das Ziel meist darin, den Wert der Variablen zu finden. Dazu wird die Variable auf einer Seite der Gleichung isoliert, sodass sie allein steht. Die einzelnen Rechenschritte sollten dabei stets übersichtlich mit einem Äquivalenzumformungsstrich (|) rechts neben der Gleichung notiert werden.

Wichtig ist, bei jeder Umformung denselben Rechenschritt auf beiden Seiten der Gleichung durchzuführen. Dabei beginnt man mit der einfachsten Rechenoperation. Normalerweise folgt man der Reihenfolge: Klammern auflösen, Potenzen berechnen, Punktrechnungen (Multiplikation/Division) ausführen und zuletzt Strichrechnungen (Addition/Subtraktion) durchführen.

Die Reihenfolge kann jedoch je nach Aufgabentyp geringfügig variieren.

Beim Lösen von Gleichungen wird diese Reihenfolge jedoch umgekehrt: Zuerst werden Strichrechnungen durchgeführt, dann Punktrechnungen, gefolgt von Potenzen und schließlich Klammern. So wird die Gleichung Schritt für Schritt vereinfacht, bis die Variable isoliert ist.

Ⓑ **Beispiel**

Nur zur Veranschaulichung
Im ersten Beispiel dienen die Ausdrücke in den eckigen Klammern [ ] nur zur Veranschaulichung. Diese brauchen Sie nicht aufschreiben.

$$\begin{array}{r|l} 2x + 3 = 9 & |\,-3 \\ [\,2x + 3 - 3 = 9 - 3\,] & \\ 2x = 6 & |\,:2 \\ [\;\frac{2}{2}x = \frac{6}{2}\;] & \\ x = 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4x + 3 = 7x + 9 & |\,-7x \\ -3x + 3 = 9 & |\,-3 \\ -3x = 6 & |\,:(-3) \\ x = -3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4(x-2)^2 - 4 = 60 & |\,+4 \\ 4(x-2)^2 = 64 & |\,:4 \\ (x-2)^2 = 16 & |\,\sqrt{} \\ x - 2 = \pm 4 & |\,+2 \\ x = \pm 4 + 2 & \\ x_1 = 6 \;\vee\; x_2 = -2 & \end{array}$$

Aufgabe 1.43 (SRNNHu)

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $3x + 4 = 10$
b) $2x - 5 = 9$
c) $5x + 2 = 7x - 1$
d) $4x - 3 = 2x + 5$
e) $6 - 3x = 2x + 4$
f) $8x + 1 = 3x + 11$
g) $7x - 6 = 5x + 2$
h) $2x + 3 = 3x + 7$
i) $4x - 1 = 9 - 2x$
j) $6 + 4x = 3x + 14$
k) $5x + 2 = 8x - 7$
l) $7 - 2x = 3x + 3$

Aufgabe 1.44 (JCD81T)

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $4x - 7 = 13$
b) $3x + 8 = 5x - 4$
c) $6x - 3 = 2x + 15$
d) $9x + 5 = 8x + 12$
e) $7 - 4x = 2x + 1$
f) $5x - 10 = 3x + 6$
g) $8x + 3 = 7x - 2$
h) $10 - 3x = 2x + 4$
i) $4x + 9 = 3x + 18$
j) $6x - 11 = 4x + 5$
k) $2x + 7 = 9 - 3x$
l) $5x - 8 = 2x + 10$
m) $3x + 6 = 4x + 1$
n) $7x - 5 = 2x + 14$
o) $2x - 3 = 8 - 4x$

Aufgabe 1.45 (HvTExv)

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $\frac{1}{4}x = 3$
b) $\frac{3}{5}x = 6$
c) $2 + \frac{1}{3}x = 5$
d) $\frac{1}{2}x + 4 = 7$
e) $\frac{1}{3}x - 1 = 2$
f) $\frac{5x}{6} = 10$
g) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 5$
h) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}x = 3$
i) $\frac{4}{5}x - 2 = 0$
j) $1 + \frac{1}{3}x = \frac{5}{2}$
k) $\frac{2}{3}x + 6 = 12$
l) $\frac{1}{5}x - 3 = \frac{1}{2}$
m) $\frac{1}{4}x = 2$
n) $\frac{2}{7}x + 3 = 5$
o) $4 - \frac{1}{3}x = 2$
p) $\frac{5}{8}x - 2 = 3$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 1.46 (QceJqV)

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $3x + 4 - 2x + 5 = 6x - 3 + 2x - 2$
b) $5x - 7 + 4 - x = 2x + 11 - 3x + 6$
c) $2x + 3 - 5x + 7 = 4x - 2 + 6 - x$
d) $8 - 3x + 2 + 4x = 7x - 5 + 3 - 2x$
e) $6x + 9 - 4x + 1 = 5x + 3 - 2 + 2x$
f) $7 - 2x + 4 + 3x = 9x - 6 + 2 - 5x$
g) $4x - 3 + 2x + 5 = 3x + 7 - 2x$
h) $5 + 2x - 6 + 3x = 4x + 8 - x$

Aufgabe 1.47 (7HU6fQ)

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $3(x + 4) = 18$
b) $5(2x - 1) = 30$
c) $4(x - 3) + 2 = 14$
d) $6(3x + 2) - 5 = 25$
e) $7(2x + 1) = 35$
f) $8(3x - 4) = 24$
g) $9(2x + 5) - 3 = 60$
h) $4(2x + 6) = 40$
i) $5(x - 7) + 3 = 8$
j) $4(2x + 3) - 5 = 19$
k) $3(3x - 4) + 2 = 20$
l) $2(4x + 1) = 18$

Aufgabe 1.48 (3fyTBi)

Lösen Sie die Gleichungen sofern möglich.

a) $5(x + 2) - 3 = 2x + 7$
b) $3(x - 4) + 6 = 9 - 2x$
c) $2x + 7 - (4x - 3) = x + 5$
d) $4(2x - 1) - 3x = 5 + x$
e) $6x + 8 - (3x + 2) = 4x - 7$
f) $7 + 3(2x - 5) = x + 2$
g) $8(x - 3) + 4 = 5x - 2$
h) $9 - (x + 6) + 2x = 3x - 4$
i) $2(3x + 4) - 5 = 7x - 3$
j) $6x - 3 + (2x + 4) = 3x + 7$
k) $7 - (4x - 5) + 2x = 2x + 6$
l) $3 + 5x - (x + 2) = 4x - 1$

Aufgabe 1.49 (w62g13)

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $3(x + 2) + 4 = 2(x + 5)$
b) $4(2x - 3) - 5 = 3(x + 7)$
c) $5(x - 1) + 2x = 6(3 - x)$
d) $7x - 4(2 - x) = 2(3x + 5)$
e) $3x + 2(4x - 1) = 5(x + 6)$
f) $4x + 3(2x - 5) = 9 + 6(x - 1)$
g) $2(x + 3) - 5x = 4(2x + 1) - 3$
h) $8(x - 2) + 3x = 7x + 4(3 - x)$
i) $5(2x + 1) - 3x = 4(x + 7) + 2$
j) $6(x + 4) - 2x = 3(2x + 5) + 1$

Aufgabe 1.50 (UL3akx)

Lösen Sie die Gleichungen mit einer, keiner oder unendlich vielen Lösungen.

a) $(x + 2)(x - 4) = x^2 - 3x + 4$
b) $(2x + 3)(x - 5) = 2x^2 - 5x - 15$
c) $(x + 6)^2 = (x + 4)(x + 8)$
d) $(x - 1)(x + 3) = x^2 - 2$
e) $(x + 5)^2 = (x + 7)(x + 3)$
f) $(2x - 1)(x + 4) = 2x^2 + 7$
g) $(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$
h) $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$
i) $(3x + 2)(x - 3) = 3x^2 - 7x - 6$
j) $(x - 4)(x + 2) = x^2 - 6$

Aufgabe 1.51 (GK21XY)

Lösen Sie die Bruchgleichungen.

a) $\frac{x+3}{x-2} = 4$
b) $\frac{2x-1}{x+5} = 3$
c) $\frac{x-4}{x+1} = 2$
d) $\frac{3x+2}{x-3} = 5$
e) $\frac{x+7}{x-4} = 6$
f) $\frac{4x-3}{x+2} = 7$
g) $\frac{x-5}{x+6} = 8$
h) $\frac{5x+1}{x-7} = 9$
i) $\frac{x+9}{x+8} = 10$

Aufgabe 1.52 (wNGMq8)

Lösen Sie die Bruchgleichungen.

a) $3 + \frac{1}{x} = 4$
b) $\frac{x+2}{x-1} = 3$
c) $2 + \frac{x-1}{x+3} = 1$
d) $\frac{x+3}{x-2} = 4$
e) $\frac{2}{x+1} + 3 = 5$
f) $\frac{x-1}{x+4} + \frac{3}{x+4} = 2$
g) $1 + \frac{3}{x+2} = \frac{5}{x+2}$
h) $\frac{x+1}{x-3} + 2 = 4$

Aufgabe 1.53 (fhWJYm)

Lösen Sie die Bruchgleichungen.

a) $3 + \frac{x}{x+2} - 5 = 1$
b) $\frac{2x-3}{x+1} + 1 = 3$
c) $5 - \frac{x+4}{x-2} = 2$
d) $\frac{x+3}{2x-1} = \frac{x}{2x+2}$

1.9 UMRECHNEN VON EINHEITEN

Längenmaße (Umrechnungsfaktor: 10)

1 km	1 Kilometer	1000 m
1 m	1 Meter	1 m
1 dm	1 Dezimeter	0,1 m
1 cm	1 Zentimeter	0,01 m
1 mm	1 Millimeter	0,001 m

Flächenmaße (Umrechnungsfaktor: 100)

1 km²	1 Quadratkilometer	1000 m · 1000 m	1.000.000 m²
1 ha	1 Hektar	100 m · 100 m	10.000 m²
1 a	1 Ar	10 m · 10 m	100 m²
1 m²	1 Quadratmeter	1 m · 1 m	1 m²
1 dm²	1 Quadratdezimeter	0,1 m · 0,1 m	0,01 m²
1 cm²	1 Quadratzentimeter	0,01 m · 0,01 m	0,0001 m²
1 mm²	1 Quadratmillimeter	0,001 m · 0,001 m	0,000001 m²

Raummaße (Umrechnungsfaktor: 1000)

1 m³	1 Kubikmeter	1 m · 1 m · 1 m	1 m³
1 dm³	1 Kubikdezimeter	0,1 m · 0,1 m · 0,1 m	0,001 m³
1 cm³	1 Kubikzentimeter	0,01 m · 0,01 m · 0,01 m	0,000001 m³
1 mm³	1 Kubikmillimeter	0,001 m · 0,001 m · 0,001 m	0,000000001 m³

Liter

		1000 l	1 m³
1 hl	1 Hektoliter	100 l	
1 l	1 Liter	1 l	1 dm³
1 dl	1 Deziliter	0,1 l	
1 cl	1 Zentiliter	0,01 l	
1 ml	1 Milliliter	0,001 l	1 cm³

Zeit

1 d	1 Tag	24 h
1 h	1 Stunde	60 min
1 min	1 Minute	60 sec
1 sec	1 Sekunde	1000 ms

Gewicht (Umrechnungsfaktor: 1000)

1 t	1 Tonne	1000 kg
1 kg	1 Kilogramm	1 kg
1 g	1 Gramm	0,0001 kg
1 mg	1 Milligramm	0,0000001 kg

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Umrechnen von Längen-, Flächen-, Volumeneinheiten (gTpGLs) ⓘ

Das Umrechnen von Einheiten lässt sich mit einigen Regeln systematisch durchführen:

1. Wird die Maßeinheit **größer**, wird die Zahl **kleiner**.
   Wird die Maßeinheit **kleiner**, wird die Zahl **größer**.
2. Bei Umrechnung in eine **größere** Einheit verschiebt sich das Komma nach **links**.
   Bei Umrechnung in eine **kleinere** Einheit verschiebt sich das Komma nach **rechts**.
3. Bei Längeneinheiten verschiebt sich das Komma pro Einheit um **eine** Stelle,
   bei Flächeneinheiten um **zwei** Stellen (siehe Exponent ^{2}),
   bei Volumeneinheiten um **drei** Stellen (siehe Exponent ^{3}).
4. Beim Umrechnen von Volumeneinheiten in Liter ist es sinnvoll, in Kubikdezimeter umzurechnen, da 1 dm^3 = 1 Liter entspricht.

Beispiel Ⓑ

4 m^3 sollen in dm^3 umgerechnet werden:

1. Da die Einheit kleiner wird, vergrößert sich der Zahlwert.
2. Das Komma wird daher um drei Stellen nach rechts verschoben, da dm^3 die nächstkleinere Einheit unterhalb von m^3 ist.
3. Für eine einfachere Darstellung kann die Zahl von Nullen umgeben gedacht werden, bevor das Komma entsprechend verschoben wird:
   0 0 0 0 4 , 0 0 0 , 0 0 also 0 0 0 0 4 0 0 0 , 0 0
4. Nach Entfernen überflüssiger Nullen lautet das Ergebnis 4000 dm^3.

ACHTUNG: Die Umrechnung von m in km erfolgt mit dem Faktor 1000!

Beispiel

2,98 cm^2 sollen in m^2 umgerechnet werden: Ⓑ

1. Da die Einheit größer wird, muss die Zahl kleiner werden.
2. Pro Stufe (von cm^2 zu dm^2 und von dm^2 zu m^2) verschiebt sich das Komma jeweils um zwei Stellen nach links, insgesamt also um 2 + 2 = 4 Stellen.
3. Für eine einfachere Darstellung kann die Zahl von Nullen umgeben gedacht werden, bevor das Komma entsprechend verschoben wird:
   0 0 , 0 0 0 2 , 9 8 0 0 0 0 0
4. Nach Entfernen überflüssiger Nullen lautet das Ergebnis 0,000298 m^2.

Umrechnung von Zeitangaben (gTpGLs) ⓘ

Hin und wieder kommt es vor, dass Sie z. B. Stunden in Dezimalschreibweise in die Form "Stunden und Minuten" (hh:mm) umrechnen müssen. Die Zahl vor dem Komma entspricht den vollen Stunden. Die Zahl(en) nach dem Komma den anteiligen Stunden. Dies kann etwas für Verwirrung sorgen, weshalb Sie sich folgendes Beispiel anschauen sollten:

Beispiel Ⓑ

Eine Zeitangabe von 2,3 Stunden soll in Stunden und Minuten umgerechnet werden:

1. Der Wert vor dem Komma entspricht den vollen Stunden, in diesem Fall 2 Stunden.
2. Der Nachkommawert von 0,3 Stunden wird in Minuten umgerechnet, indem 0,3 mit 60 (der Anzahl Minuten pro Stunde) multipliziert wird: 0,3 · 60 = 18 Minuten.
3. Somit entsprechen 2,3 Stunden umgerechnet 2 Stunden und 18 Minuten.

Beispiel Ⓑ

Eine Zeitangabe von 84 Minuten soll in Stunden umgerechnet werden:

1. Die Minutenanzahl wird durch 60 geteilt, da eine Stunde 60 Minuten umfasst:
   84 : 60 = 1,4 Stunden.
2. Somit entsprechen 84 Minuten in eine Dezimalzahl umgerechnet 1,4 Stunden.

ⓘ **Umrechnung von Geschwindigkeitsangaben (gTpGLs)**

Das Umrechnen von Geschwindigkeiten erfolgt nach festen Regeln, um beispielsweise zwischen km/h und m/s zu wechseln. Dabei ist es wichtig zu wissen, dass eine Stunde 3600 Sekunden und ein Kilometer 1000 Meter hat.

1. Umrechnung von km/h in m/s:
   1 km/h entspricht 1000 m / 3600 s, also 1 km/h = 1000 : 3600 m/s = $\frac{1}{3{,}6}$ m/s.
   Um von km/h in m/s umzurechnen, teilt man den Wert also durch 3,6.
2. Umrechnung von m/s in km/h:
   Gemäß 1. entspricht 1 m/s einem Wert von 3,6 km/h.
   Um von m/s in km/h umzurechnen, multipliziert man den Wert also mit 3,6.

Ⓑ **Beispiel**

Eine Geschwindigkeit von 72 km/h soll in m/s umgerechnet werden:

1. Da km/h in m/s umgerechnet wird, muss der Wert durch 3,6 geteilt werden.
2. 72 : 3,6 = 20
3. Somit entsprechen 72 km/h genau 20 m/s.

Ⓑ **Beispiel**

Eine Geschwindigkeit von 8 m/s soll in km/h umgerechnet werden:

1. Da m/s in km/h umgerechnet wird, muss der Wert mit 3,6 multipliziert werden.
2. 8 · 3,6 = 28,8
3. Somit entsprechen 8 m/s genau 28,8 km/h.

Aufgabe 1.54 (PKX4sX)

Rechnen Sie folgenden Maßeinheiten um.

a) 48 cm = _____ dm = _____ m

b) 4 m = _____ dm = _____ cm = _____ mm

c) 12 mm^2 = _____ cm^2 = _____ dm^2

d) 9 dm^2 = _____ cm^2 = _____ mm^2

e) 15.000 cm^3 = _____ dm^3 = _____ l = _____ m^3

f) 80 l = _____ dm^3 = _____ cm^3 = _____ mm^3

g) 20 ml = _____ l = _____ dm^3 = _____ cm^3

h) 1 d = _____ h = _____ min = _____ sec

i) 2,5 h = _____ min = _____ sec

j) 2.880 min = _____ h = _____ d

k) 12 d = _____ h = _____ min = _____ sec

Aufgabe 1.55 (DzMQ5J)

Rechnen Sie folgende Maßeinheiten um.

a) 15 m in mm
b) 25,6 cm in mm
c) 85 cm in m
d) 5.200 cm^2 in mm^2
e) 9.800 mm^2 in cm^2
f) 4,75 m^2 in mm^2
g) 180.000 cm^3 in m^3
h) 72.400 m^3 in km^3
i) 315 h in min
j) 2.590 min in sec
k) 14.750 g in kg
l) 7 d in min

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

1.10 VERMISCHTE ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 1.56 (cY1hMF)

a) Ein Designer plant ein Stoffmuster, das $\frac{2}{5}$ Meter eines roten Stoffes und $\frac{1}{3}$ Meter eines blauen Stoffes benötigt. Wie viel Stoff wird insgesamt benötigt?
b) Für die Gestaltung eines Kunstwerks benötigt ein Künstler eine Farbmischung, die aus $\frac{3}{4}$ Liter Wasser und $\frac{2}{3}$ Liter Farbe besteht. Wie viele Liter Farbmischung werden benötigt, wenn er die Menge verdoppelt?
c) Für die Gestaltung eines Kunstwerks benötigt ein Künstler eine Farbmischung, die aus $\frac{3}{5}$ Liter Wasser und $\frac{1}{3}$ Liter Farbe besteht. Wie viel Flüssigkeit (Wasser und Farbe) wird benötigt, wenn die Menge verdreifacht wird?
d) Eine Designerin möchte eine quadratische Fläche mit Mustern verzieren. Sie hat $\frac{3}{4}$ der Fläche schon gestaltet. Wie viel Fläche bleibt übrig, wenn die Gesamtfläche 2 Quadratmeter beträgt?
e) Für eine Collage benötigt ein Künstler $\frac{2}{7}$ Meter Seidenstoff und $\frac{5}{14}$ Meter Leinenstoff. Wie viel Stoff benötigt er insgesamt?

Aufgabe 1.57 (g37cAF)

a) Ein Bauarbeiter benötigt $\frac{2}{3}$ Kubikmeter Beton für ein Fundament und $\frac{1}{4}$ Kubikmeter für einen angrenzenden Sockel. Wie viel Beton benötigt er?
b) Eine Fliese hat eine Fläche von $\frac{1}{3}$ Quadratmeter. Wie groß ist die Gesamtfläche bei 9 Fliesen?
c) Ein Holzbalken ist $\frac{9}{8}$ Meter lang und soll in Stücke von $\frac{1}{2}$ Meter Länge zersägt werden. Wie viele ganze Stücke erhält man? Wie viel bleibt übrig?
d) Ein Zimmermann benötigt $\frac{3}{4}$ Meter eines Holzbretts, das $\frac{5}{2}$ Meter lang ist. Wie viel Holz bleibt übrig?
e) Für eine Mauer werden $\frac{1}{5}$ der benötigten Ziegel an einer Seite verbaut und $\frac{1}{4}$ an einer anderen Seite. Wie viel der Ziegelmenge wurde insgesamt für alle vier Seiten verbaut, wenn Sie davon ausgehen, dass eine rechteckige Fläche entstehen soll? Wie viel bleibt übrig?

Aufgabe 1.58 (r9WtVD)

a) Ein Künstler mischt rote und blaue Farbe in einem Verhältnis von 2:3. Insgesamt verwendet er 25 Liter Farbe. Wie viel m^3 rote Farbe und wie viel mm^3 blaue Farbe hat er verwendet?
b) Ein Grafikdesigner entwirft ein rechteckiges Poster, dessen Länge 4 mal so groß ist wie die Breite. Der Umfang des Posters beträgt 60 cm. Wie lautet die Breite?
c) Ein Fotograf möchte einen Bildumfang auf 72 cm vergrößern. Die Breite beträgt x, und die Länge x + 2. Welche Maße hat das Bild?
d) Ein Bilderrahmen hat eine rechteckige Fläche von 50 cm^2. Die Länge des Rahmens ist doppelt so groß wie die Breite. Wie groß ist der Rahmen?
e) Ein Künstler plant eine quadratische Installation. Der Umfang beträgt 48 Meter. Wie lang ist eine Seite der Installation?

Aufgabe 1.59 (9m9ebP)

a) Ein Zimmermann hat zwei Holzbalken, deren Gesamtlänge 12 Meter beträgt. Der längere Balken ist 2 Meter länger als der kürzere. Wie lang ist der kürzere und wie lang der längere Balken?
b) Ein rechteckiges Fundament hat eine Fläche von 108 m^2. Die Länge ist 3 mal länger als die Breite. Wie lautet die Breite?
c) Ein Architekt plant eine Mauer, deren Höhe doppelt so groß wie die Breite ist. Der Umfang der Mauer beträgt 36 Meter. Wie groß ist die Breite?
d) Ein Bauarbeiter schneidet ein 12 Meter langes Stahlrohr in zwei Teile. Ein Teil ist dreimal so lang wie der andere. Wie lang ist der kürzere Teil?

Aufgabe 1.60 (RXGT2N)

a) Eine Künstlerin mischt rote, gelbe und blaue Farbe. Die rote Farbe entspricht der Menge $2x - 1$ Liter, die gelbe Farbe $x + 3$ Liter, und die blaue Farbe ist doppelt so viel wie die rote. Insgesamt verwendet sie 42 Liter Farbe. Wie viel Liter rote Farbe wurden verwendet?
b) Ein Fotograf hat ein Bild, dessen Höhe $x + 3$ cm und dessen Breite ist $x - 2$ cm beträgt. Der Umfang misst 50 cm. Wie groß ist die Breite?
c) Ein Künstler mischt rote Farbe ($3x + 5$ Liter) und gelbe Farbe ($x - 3$ Liter). Zusammen benötigt er 38 Liter Farbe. Wie viel Liter rote Farbe hat er verwendet?
d) Ein Grafikdesigner erstellt ein rechteckiges Poster, dessen Breite $2x$ cm und dessen Länge $3x + 2$ cm beträgt. Der Umfang misst 54 cm. Wie lautet die Breite?
e) Für eine Lichtinstallation benötigt ein Künstler LED-Streifen mit einer Länge von $4x - 2$ Metern. Dazu werden noch $3x + 6$ Meter Kabel für die Stromversorgung verwendet. Zusammen dürfen die Streifen und Kabel maximal 46 Meter lang sein. Wie lang sind die LED-Streifen?

Aufgabe 1.61 (XDUXJX)

a) Ein Bauunternehmer verwendet $3x + 2$ Quadratmeter Dämmmaterial für jede Wand eines Hauses. Das Haus hat 5 Wände. Insgesamt verbraucht er 115 Quadratmeter. Wie viel Dämmmaterial wird für eine Wand benötigt?
b) Für eine Mauer benötigt ein Maurer $4x - 3$ Ziegel pro Reihe. Die Mauer besteht aus 10 Reihen. Es werden 350 Ziegel benötigt. Wie viele Ziegel sind in einer Reihe?
c) Ein Holzbalken ist $10x - 4$ Meter lang. Ein Tischler schneidet zwei Stücke ab, eines mit $3x + 2$ Metern und eines mit $2x + 5$ Metern. Wie viel Holz bleibt vom Balken übrig?
d) Ein Bauarbeiter mischt Beton. Eine Charge benötigt $6x + 8$ kg Zement und $4x - 3$ kg Sand. Insgesamt wiegt die Mischung 95 kg. Wie viel kg Zement wird verwendet?
e) Ein Rohr hat eine Gesamtlänge von $5x + 10$ Metern. Davon werden $2x + 3$ Meter für ein Projekt verwendet. Wie lang ist das verbleibende Rohr?

Aufgabe 1.62 (ZqsWmm)

a) Eine Künstlerin transportiert ein großes Gemälde (Leinwand und Rahmen). Das Gemälde wiegt 8,5 kg und der Rahmen 2800 g. Wie viel wiegt die Leinwand in Gramm?
b) Ein Designer verwendet eine Papierrolle mit einer Länge von 12.000 mm. Wie lautet die Länge der Rolle in Metern?
c) Für eine Wand benötigt ein Maler 5.600 ml Farbe. Wie viel kostet die Farbe, wenn ein Liter 5,00 Euro kostet?
d) Ein Künstler benötigt für eine Lichtinstallation ein Kabel von 3,5 m. Wie viele Zentimeter Kabel benötigt er?
e) Ein Bildrahmen hat eine Fläche von 35.000 cm^2. Wie groß ist die Fläche des Rahmens in Quadratmetern?
f) Eine Künstlerin benötigt 4,2 l Farbe für ein großes Gemälde. Wie viele Flaschen muss die Künstlerin kaufen, wenn eine Flasche 500 ml Farbe enthält?

Aufgabe 1.63 (gekexc)

a) Ein Fundament für eine Gartenhütte benötigt 1,2 m^3 Beton. Wie schwer ist der Beton bei einem Gewicht von 2,5 kg/Liter?
b) Ein Holzbalken ist 2,75 m lang. Wie viel bleibt vom Balken übrig, wenn man 90 cm abschneidet?
c) Ein Stahlträger wiegt 35.000 g. Wie schwer ist der Träger in Kilogramm?
d) Eine Mauer mit einer Fläche von 480.000 cm^2 soll verklinkert werden. Wie viele Klinkersteine benötigt man, wenn man für einen Quadratmeter 45 Klinkersteine benötigt.
e) Das Dach eines Hauses hat eine Fläche von 158 m^2. Wie viele Dachziegel benötigt man, wenn ein Ziegel eine Fläche von 158 cm^2 abdeckt?
f) Ein Rohr ist 4,5 m lang. Wie lang ist das Rohr in Zentimeter, wenn 238 mm abgeschnitten werden?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



2.1 ABSOLUTE UND RELATIVE HÄUFIGKEITEN

"Ich glaube nur der Statistik, die ich selbst gefälscht habe."
Dieser Ausspruch wird dem britischen Politiker Winston Churchill (* 30. November 1874; † 24. Januar 1965) zugeschrieben und verdeutlicht, dass man Statistiken nicht blind vertrauen sollte, sondern sie kritisch hinterfragen muss. Statistiken beruhen meist auf umfangreichen Daten, deren Interpretation stets von der Sorgfalt und Intention des Auswertenden abhängt.

Beispiel
Nach langen Verzögerungen und erheblichen Kostensteigerungen wurde der *Flughafen Berlin Brandenburg*, auch bekannt als BER, am 31. Oktober 2020 endlich eröffnet. Der Bau des BER kostete die Steuerzahler insgesamt rund 7 Milliarden Euro (7.079.900.000,00 Euro)[2], was mehr als dreimal so viel ist wie die ursprünglich geplanten 2 Milliarden Euro. Diese Summe ist für viele Menschen kaum vorstellbar und lässt sich nur schwer einordnen. Um diese Kosten besser verständlich zu machen, kann man sie in Relation zu den jährlichen Gesamtausgaben des deutschen Staates, dem sogenannten Bundeshaushalt, setzen.

Im Jahr 2020 standen dem deutschen Staat laut Bundeshaushalt ungefähr 362 Milliarden Euro[3] zur Verfügung. Würde man die Baukosten des BER gleichmäßig über die 14 Jahre Bauzeit verteilen, ergäbe sich eine jährliche Belastung von etwa 505 Millionen Euro (genau: 505.707.142 Euro). Verglichen mit dem Bundeshaushalt entspricht das einem Anteil von nur 0,14 %. Diese Zahl lässt die hohen BER-Kosten relativ klein erscheinen. Um dies anschaulicher zu machen: Hätte eine Person ein Jahresbudget von 1.000 Euro, so entspräche der jährliche Anteil, den die BER-Kosten daran ausmachen würden, lediglich 1,40 Euro. Plötzlich wirkt die riesige Summe weit weniger einschüchternd.

Die Art und Weise, wie man Statistiken präsentiert, beeinflusst maßgeblich, wie die Zahlen wahrgenommen werden. Möchte man die hohen Ausgaben für den BER kritisieren, bietet es sich an, die Gesamtsumme von 7 Milliarden Euro hervorzuheben, die das ursprünglich geplante Budget bei Weitem übersteigt. Wer die Kosten jedoch relativieren will, könnte stattdessen betonen, dass sie über 14 Jahre verteilt nur 0,14 % des Bundeshaushalts ausmachen. Beide Perspektiven sind in gewisser Weise korrekt, und ein sachlicher Vergleich sollte beide Seiten zeigen, um eine fundierte Meinung zu ermöglichen.

Die 7 Milliarden Euro stellen einen absoluten Wert dar, während die 0,14 % ein relativer Wert sind. Absolute Werte geben eine konkrete Anzahl von etwas an (z. B. Geld oder Personen), die für sich allein oft wenig aussagekräftig sind, während relative Werte die Bedeutung im Verhältnis zu anderen Größen, z. B. einem Gesamtwert verdeutlichen.

2 vgl. https://www.flughafen-berlin-kosten.de, abgerufen am 04.10.2020
3 vgl. https://www.bundestag.de/dokumente/textarchiv/2019/kw48-de-haushaltsgesetz-668634, abgerufen am 04.10.2020

ⓘ **Definition (nKWxH9)**

Die **absolute Häufigkeit (H)** gibt an, wie oft ein bestimmtes Ergebnis, eine Antwort oder ein gemessener Wert in einer Datenerhebung vorkommt.
Die **relative Häufigkeit (h)** beschreibt den prozentualen Anteil eines Wertes im Verhältnis zur Gesamtzahl (n) der Messungen. Sie eignet sich gut zum Vergleich von Ergebnissen:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}} \quad \text{also in Kurzform: } h = \frac{H}{n}$$

Eine **Urliste** ist eine (meist unsortierte) Auflistung von Messwerten in der Reihenfolge, in der sie erfasst wurden.

Eine **Rangliste** ist die (meist aufsteigend) sortierte Version der Urliste.

In einer **Häufigkeitstabelle** werden die Häufigkeiten der verschiedenen Werte aus einer Rangliste in tabellarischer Form dargestellt. Sie zeigt meist sowohl die absoluten als auch die relativen Häufigkeiten der Daten an.

Ⓑ **Beispiel**

Ein sechsseitiger Würfel wird insgesamt 10 Mal geworfen, und die erzielten Zahlen werden in einer **Urliste** festgehalten: 4, 6, 2, 3, 2, 1, 2, 2, 4, 3

Daraus ergibt sich die folgende **Rangliste**: 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6

In der **Häufigkeitstabelle** sind die Anzahl der jeweiligen Würfelergebnisse (absolute Häufigkeit H) sowie die dazugehörigen prozentualen Anteile (relative Häufigkeit h) aufgeführt.

Wert	1	2	3	4	6
absolute Häufigkeit (H)	1	4	2	2	1
relative Häufigkeit (h)	10%	40%	20%	20%	10%

Beispielrechnung für die Zahl 2:
Wenn die **absolute Häufigkeit** bekannt ist, berechnet man die relative Häufigkeit mit:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}, \text{ hier also } \quad h = \frac{4}{10} = 0{,}4 \mathrel{\hat{=}} 40\,\%$$

Hinweis
Bei einer relativen Häufigkeit in Dezimalschreibweise (also 0,4 statt 40 %) entfällt der Schritt "durch 100".

Wenn die **relative Häufigkeit** als Prozentzahl vorliegt, kann man die absolute Häufigkeit so berechnen:

$$\text{absolute Häufigkeit} = \text{Gesamtzahl} \cdot \frac{\text{Relative Häufigkeit in \%}}{100}, \text{ hier also } \quad H = 10 \cdot \frac{40}{100} = 10 \cdot 0{,}4 = 4$$

Aufgabe 2.1 **(5ZhLDm)**

Geben Sie für die folgenden Urlisten die Rangliste und die Häufigkeitstabelle an.

a) 4, 2, 7, 3, 5, 4, 6, 4, 3, 1, 2, 5, 4, 3

b) 3, 2, 4, 6, 1, 8, 3, 5, 7, 4, 6, 2, 9, 3, 4, 9

Aufgabe 2.2 **(E5eXns)**

500 Schülerinnen und Schüler wurden gefragt, ob sie Interesse hätten, an einem Sportprogramm teilzunehmen. Berechnen Sie die absoluten Häufigkeiten für folgende Umfrage:

sehr interessiert	15 %	unentschieden	20 %	gar nicht interessiert	11 %
interessiert	30 %	eher nicht interessiert	24 %		

Aufgabe 2.3 **(f7hqiu)**

Geben Sie die relative Häufigkeit jeweils als Bruch, als Dezimalzahl und in Prozent an.

a)	15 von 50	c)	9 von 20	e)	123 von 246	g)	87 von 290
b)	300 von 500	d)	40 von 90	f)	275 von 1100	h)	918 von 459

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



2.2 DATEN DARSTELLEN

Situationsbeschreibung – Abschlussprüfung

Bei 55 Schülerinnen und Schülern wurde die Durchschnittsnote der Abschlussprüfung gebildet. Daraus ergab sich folgende Urliste der Noten:

1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,8	1,8
2,0	2,0	2,1	2,1	2,3	2,3	2,3	2,4	2,5	2,5	2,7
2,7	2,7	2,8	2,8	2,9	2,9	2,9	3,0	3,0	3,0	3,0
3,0	3,0	3,1	3,1	3,2	3,2	3,2	3,2	3,3	3,3	3,3
3,3	3,3	3,4	3,4	3,4	3,4	3,7	3,7	3,7	3,7	3,7

Als Urliste bezeichnen Sie die Werte $\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ einer Erhebung/Umfrage.

Um die Übersichtlichkeit dieser umfangreichen Liste zu erhöhen, wurden die Noten in Gruppen, sogenannten **Merkmalsklassen**, eingeteilt.
Diese Einteilung erfolgte in diesem Beispiel wie folgt: *sehr gut* mit $1{,}0 \le x \le 1{,}5$, *gut* mit $1{,}6 \le x \le 2{,}5$, *befriedigend* mit $2{,}6 \le x \le 3{,}5$, *ausreichend* mit $3{,}6 \le x \le 4{,}0$

Klasse	sehr gut	gut	befriedigend	ausreichend
H	4	17	29	5
h	0,073 ≙ 7,3 %	0,309 ≙ 30,9 %	0,527 ≙ 52,7 %	0,091 ≙ 9,1 %

Es hat sich bewährt, die Angaben der relativen Häufigkeiten auf drei Stellen hinter dem Komma zu runden (auf eine Stelle in Prozent-Schreibweise).

ⓘ

Sorgen Sie für eine übersichtliche Darstellung (AKEEun)

Daten lassen sich auf vielfältige Weise visualisieren. Die Auswahl an Diagrammtypen ist nahezu unbegrenzt, wobei jede Form der Darstellung ihre eigenen Vor- und Nachteile hat. Die Entscheidung für einen bestimmten Diagrammtyp hängt häufig von der Art der Daten ab, die präsentiert werden sollen. Im Folgenden werden Sie die drei am häufigsten genutzten Diagrammarten kennenlernen und lernen, wie man diese zeichnet.

Ⓑ

Kreisdiagramm

In einem Kreisdiagramm werden die 360° des Kreises proportional zu den relativen Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen aufgeteilt und im Uhrzeigersinn dargestellt. Für die jeweiligen Winkel ergeben sich aufgrund der oben bestimmten relativen Häufigkeiten folgende Werte:

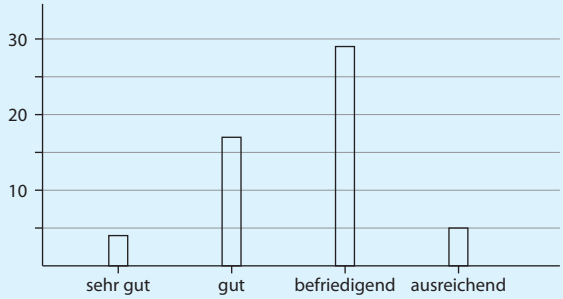
$\alpha_{\text{sehr gut}} = 0{,}073 \cdot 360° = \mathbf{26{,}28°}$
$\alpha_{\text{gut}} = 0{,}309 \cdot 360° = \mathbf{111{,}24°}$
$\alpha_{\text{befr.}} = 0{,}527 \cdot 360° = \mathbf{189{,}72°}$
$\alpha_{\text{ausr.}} = 0{,}091 \cdot 360° = \mathbf{32{,}76°}$



Diese Winkel bestimmen die Sektoren des Kreisdiagramms und zeigen anschaulich die Verteilung der Merkmalsklassen.

Ⓑ **Säulendiagramm**

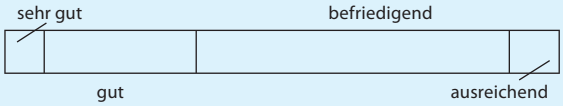
Im Säulendiagramm werden auf der horizontalen Achse die Merkmalsausprägungen eingetragen und auf der vertikalen Achse die absoluten oder relativen Häufigkeiten. Diese Darstellungsart ermöglicht eine sehr flexible Skalierung.



Ⓑ **Streifendiagramm**

Das Streifendiagramm funktioniert ähnlich wie das Kreisdiagramm, jedoch auf einer linearen Skala. Ein Streifen mit festgelegter Gesamtlänge, zum Beispiel 10 cm, wird proportional zu den Anteilen der Merkmalsausprägungen unterteilt. Beispielsweise wird die Länge für die Note "befriedigend" mit einem prozentualen Anteil von 52,7 % (= 0,527) folgendermaßen berechnet:

$l_{befr.} = 0{,}527 \cdot 10\text{ cm} = 5{,}27\text{ cm}$



Aufgabe 2.4 (u9TLMK)

Ein Kulturzentrum hat die Besuchshäufigkeit seiner Gäste dokumentiert. Von den 250 Besucherinnen und Besuchern kamen 55 Personen einmal in der Woche, 80 Gäste zwei- bis viermal pro Woche, 65 Menschen häufiger als viermal pro Woche, und der verbleibende Teil der Gäste besuchte das Zentrum weniger als einmal pro Woche. Stellen Sie die Daten in einer Tabelle dar und fertigen Sie ein Säulendiagramm für die absoluten Häufigkeiten und ein Streifendiagramm für die relativen Häufigkeiten an.

Aufgabe 2.5 (82Nita)

Ein medizinisches Zentrum misst täglich den Blutzuckerspiegel mehrerer Patienten. Die folgende Tabelle zeigt die gemessenen Blutzuckerwerte (in mg/dl) im Verlauf einer Woche:

Wochentag	**Mo**	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**	**Sa**	**So**
Blutzuckerwert (in mg/dl)	75, 110, 250, 95, 120	100, 85, 200, 50, 125	300, 70, 175, 65, 140	92, 115, 55, 98, 170	130, 80, 150, 110, 99	60, 105, 120, 85, 140	80, 95, 130, 295, 310

Die Blutzuckerwerte werden zur Analyse in drei Kategorien eingeteilt:
Werte unter 70 mg/dl werden als Unterzuckerung, Werte zwischen 70 mg/dl und 170 mg/dl als akzeptabel, und Werte über 170 mg/dl als Überzuckerung bewertet.

a) Sortieren Sie die Werte der Woche in die drei definierten Merkmalsklassen ein.
b) Stellen Sie die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Häufigkeitstabelle dar.
c) Visualisieren Sie die absoluten Häufigkeiten mithilfe zweier Diagrammtypen.

Aufgabe 2.6 (c3QJgr)

In einem Unternehmen sind im vergangenen Jahr die folgenden Kosten angefallen. Stellen Sie die prozentualen Anteile der einzelnen Kostenarten in einem Kreisdiagramm dar.

Kostenart	Personal	Material	Maschinen	Finanzierung
Kosten (in Euro)	4.000.000	6.800.000	2.500.000	900.000

Aufgabe 2.7 (wSMPu8)

Ein 600 g schweres Mischbrot besteht aus 250 g Weizenmehl, 150 g Roggenmehl, 120 g Wasser und 80 g sonstigen Bestandteilen (wie Sauerteig, Hefe und Salz).

a) Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle, in der die absoluten Mengen und die relativen Anteile (in Prozent) der einzelnen Zutaten eingetragen sind.
b) Stellen Sie das Verhältnis der Zutaten in allen drei Diagrammtypen dar.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



2.3 ARITHMETISCHES MITTEL, MODALWERT UND MEDIAN

Situationsbeschreibung – Zeit am Computer
Die Schülerzeitung führte eine Umfrage unter 24 Schülerinnen und Schülern der 11. Klasse durch, um zu ermitteln, wie viele Stunden sie täglich am Computer verbringen. Die erhobenen Daten sind wie folgt:

Urliste: 2, 4, 1, 2, 0, 3, 1, 4, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 4, 1, 2, 1, 0, 1, 4, 1, 1, 2

Die Ergebnisse lassen sich in einer Häufigkeitstabelle zusammenfassen:

Zeit in Stunden (x_i)	0	1	2	3	4
Anzahl (H_i)	2	11	6	2	3

Arithmetisches Mittel ($\bar{x}$) anhand einer Urliste/Rangliste (Bp4t7s)
Der Begriff des *arithmetischen Mittels* mag zunächst neu wirken, doch das zugrunde liegende Konzept ist bereits bekannt: Es beschreibt nichts anderes als den mathematischen Ausdruck für den "Durchschnittswert". Um das arithmetische Mittel aus einer Urliste oder Rangliste zu berechnen, addiert man alle Werte und teilt diese Summe durch die Gesamtanzahl der Werte.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Arithmetisches Mittel ($\bar{x}$) mit absoluten Häufigkeiten (Bp4t7s)
Zur Berechnung des *arithmetischen Mittels* bei absoluten Häufigkeiten wird jeder Wert mit seiner absoluten Häufigkeit multipliziert. Die Ergebnisse werden addiert, und diese Summe durch die Gesamtanzahl der Werte, also die Summe der absoluten Häufigkeiten, geteilt.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot H_i = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + x_3 \cdot H_3 + ... + x_m \cdot H_m}{n}$$

Arithmetisches Mittel ($\bar{x}$) mit relativen Häufigkeiten (Bp4t7s)
Das *arithmetische Mittel* wird mithilfe relativer Häufigkeiten berechnet, indem jeder Wert mit seiner relativen Häufigkeit multipliziert und die Ergebnisse addiert werden.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot h_i = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + x_3 \cdot h_3 + ... + x_m \cdot h_m$$

Modalwert ($\bar{x}_d$) (Bp4t7s)
Der *Modalwert*, auch *Modus* genannt, bezeichnet den Wert, der in einer Datenreihe am häufigsten auftritt. Wenn mehrere Werte die gleiche höchste Häufigkeit aufweisen, gibt es keinen eindeutigen Modalwert. In diesem Fall wird das Fehlen eines eindeutigen Modus durch die Angabe $\bar{x}_d = Ø$ dargestellt.

Ø ist das Symbol für die **leere Menge** und besagt in diesem Fall, dass es keinen (passenden) Wert gibt.

ⓘ **Median ($\tilde{x}$) (Bp4t7s)**

Der *Median* oder *Zentralwert* wird ermittelt, indem alle Werte zunächst der Größe nach geordnet werden. Der Median ist der Wert, der genau in der Mitte dieser Rangliste liegt. Wenn die Anzahl der Werte ungerade ist, gibt es einen eindeutigen mittleren Wert. Bei einer geraden Anzahl an Werten wird der Median als das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte berechnet. Der Median teilt die Datenmenge in zwei gleich große Hälften: Eine Hälfte der Werte liegt über dem Median, die andere darunter.

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{für n ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) & \text{für n gerade} \end{cases}$$

Ⓑ **Beispiel**

Zur Berechnung des *arithmetischen Mittels* mit den absoluten Häufigkeiten aus der Situationsbeschreibung wird berücksichtigt, dass null Stunden zweimal, eine Stunde elfmal, zwei Stunden sechsmal und so weiter gezählt wurden. Das Ergebnis lautet:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3}{24} = \frac{41}{24} = 1{,}708$$

Hinweis
Bei der Berechnung des arithmetischen Mittels mit den relativen Häufigkeiten werden gerundete Werte verwendet, was zu einer Abweichung in der dritten Nachkommastelle führen kann. Dies stellt jedoch kein Problem dar.

Für das *arithmetische Mittel* mit relativen Häufigkeiten werden diese zunächst bestimmt:

Zeit (in Stunden)	0	1	2	3	4
Anzahl (h)	0,083	0,458	0,25	0,083	0,125

Sie erhalten somit: $\bar{x} = 0 \cdot 0{,}083 + 1 \cdot 0{,}458 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}083 + 4 \cdot 0{,}125 = 1{,}707$

Der *Modalwert* ist in diesem Fall $\bar{x}_d = 1$, da die 1 am häufigsten auftaucht.

Für den *Median* wird eine Rangliste erstellt: 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 (1 1) 2 2 2 2 2 2 3 3 4 4 4
Da die Anzahl der Werte gerade ist, wird der Median als arithmetisches Mittel der beiden mittleren Werte berechnet: $\tilde{x} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$

Aufgabe 2.8 **(cPZEnp)**

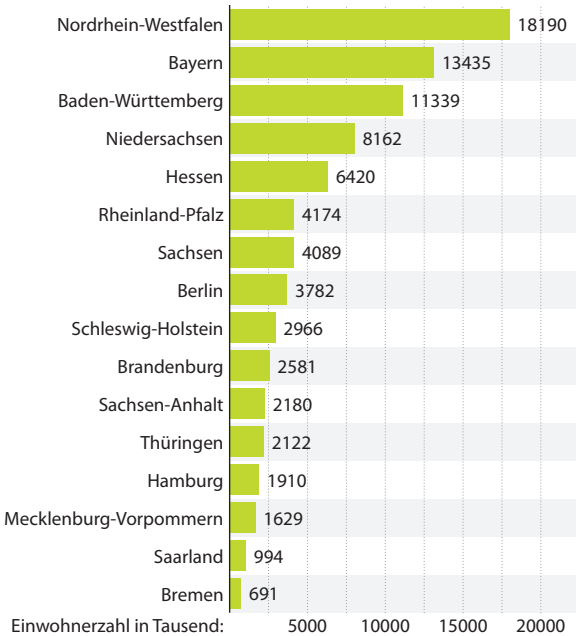
Berechnen Sie das arithmetische Mittel, den Median und, falls vorhanden, den Modalwert.

a) 7; 10; 14; 16; 18; 21; 24; 26; 28
b) 3; 5; 8; 10; 11; 13; 15; 15; 17; 19; 22
c) 4; 6; 9; 12; 12; 14; 15; 17; 17; 17; 18; 35
d) 1; 3; 27; 30; 32; 37; 40; 42; 45; 67

Aufgabe 2.9 **(EKZGeC)**

Das Balkendiagramm zeigt, vom größten zum kleinsten Bundesland geordnet, die Verteilung der insgesamt 84.669.326 Einwohner Deutschlands auf die 16 Bundesländer, basierend auf Daten des Statistischen Bundesamtes vom 31.12.2023[4] (gerundet auf Tausend).

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Einwohnerzahlen (in Millionen Einwohnern).
b) Bestimmen Sie den Median der Einwohnerzahlen in Millionen.
c) Erklären Sie, warum hier kein Modalwert ermittelt werden kann.



4 vgl. https://www.destatis.de/DE/Themen/Gesellschaft-Umwelt/Bevoelkerung/Bevoelkerungsstand/Tabellen/bevoelkerung-nichtdeutsch-laender.html, abgerufen am 23.11.2024

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



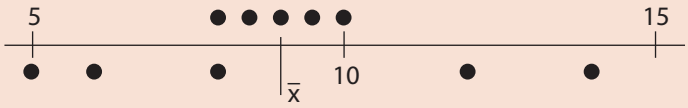
2.4 STREUUNGSMASSE

Situationsbeschreibung –Wochenarbeitsstunden
Nina und Mike sind beide selbstständig tätig. Nina leitet eine Werbeagentur, während Mike ein Architekturbüro führt. Beide arbeiten normalerweise mindestens 45 Stunden pro Woche, oft auch mehr. In der Tabelle sind exemplarisch ihre Arbeitszeiten für eine Woche dargestellt, in der sie ausnahmsweise nicht am Wochenende gearbeitet haben:

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
Nina	8,5	10	8	9	9,5
Mike	12	5	14	6	8

Anhand der Daten lassen sich die folgenden Aussagen treffen:
1. Beide haben in dieser Woche jeweils genau 45 Stunden gearbeitet.
2. Das arithmetische Mittel der Arbeitsstunden beträgt für beide 9 Stunden pro Tag.
3. Der Median der Arbeitsstunden liegt bei Nina bei 9 Stunden und bei Mike bei 8 Stunden, was nur einen Unterschied von 1 Stunde ausmacht.

Obwohl diese statistischen Kennzahlen darauf hindeuten, dass die Arbeitszeiten von Nina und Mike sehr ähnlich sind, zeigt ein Punktediagramm einen deutlichen Unterschied in der Verteilung der Arbeitsstunden.



Ninas Arbeitszeiten (oben) sind gleichmäßig verteilt und liegen eng beieinander. Mikes Arbeitszeiten (unten) hingegen sind stark unterschiedlich und weit gestreut.

Um solche Unterschiede statistisch auszudrücken, verwenden Statistikerinnen und Statistiker sogenannte Streuungsmaße. Diese Kennzahlen geben an, wie stark Daten variieren. Streuungsmaße helfen dabei, den Grad der Ungleichheit oder Verteilung zu quantifizieren. In der folgenden Erklärung werden verschiedene Streuungsmaße beschrieben.

Quantifizieren bedeutet, eine Eigenschaft oder Beobachtung in eine messbare, numerische Größe umzuwandeln.

Spannweite (R) (mcs1iV) ⓘ
Die *Spannweite* ist das einfachste Maß für die Streuung und beschreibt den Abstand zwischen dem größten und dem kleinsten Wert in einer Datenreihe. Man spricht dabei manchmal auch von "Range", dem englischen Ausdruck dafür. Die Spannweite gibt an, wie stark die Werte in einer Liste oder Rangfolge auseinanderliegen.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

Betragsstriche
Der Betrag einer Zahl gibt an, wie weit diese Zahl von der 0 entfernt ist. Daher erhalten Sie den Betrag einer Zahl durch Weglassen des Vorzeichens:
$|-3| = 3$ und $|3| = 3$

Mittlere absolute Abweichung ($\bar{d}$) (mcs1iV)

Die *mittlere absolute Abweichung* misst die durchschnittliche Entfernung aller Werte vom arithmetischen Mittel. Sie wird berechnet, indem die Abstände jedes Wertes vom Mittelwert addiert und durch die Anzahl der Werte geteilt werden.

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| = \frac{|x_1-\bar{x}| + |x_2-\bar{x}| + ... + |x_n-\bar{x}|}{n}$$

Varianz (v oder s^2) (mcs1iV)

Die mittlere absolute Abweichung hat den Nachteil, dass sie mit Betragsstrichen arbeitet, was ihre automatisierte Berechnung umständlicher macht. Daher wird die *Varianz* als ein weiteres Streuungsmaß verwendet. Der Unterschied besteht darin, dass anstelle von Betragsstrichen die Abweichungen quadriert werden, wodurch die Werte immer positiv sind.

$$v = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + ... + (x_n-\bar{x})^2}{n}$$

Tipp
Wenn Sie sich die Gleichung der mittleren absoluten Abweichung merken können, gilt für die Formel der Standardabweichung: Betragsstriche in Klammern mit Quadrat umwandeln und alles unter eine Wurzel.

Standardabweichung (s) (mcs1iV)

Da die Varianz durch die Quadrierung der Werte oft zu unverhältnismäßig hohen Zahlen führt, wird die *Standardabweichung* als die Quadratwurzel der Varianz berechnet. Sie ist die am häufigsten verwendete Kennzahl für die Streuung und zeigt zumindest annähernd an, wie weit die Werte im Durchschnitt vom Mittelwert entfernt sind:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + ... + (x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

Variationskoeffizient (VK) (mcs1iV)

Zur Einschätzung, ob die Standardabweichung groß oder klein ist, gilt $VK = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%$

- Für $VK \leq 10\,\%$ ist die Streuung gering
- Für $10\,\% < VK < 20\,\%$ ist die Streuung moderat
- Für $VK \geq 20\,\%$ ist die Streuung hoch.

Beispiel

In Bezug auf die Situationsbeschreibung erhalten Sie für die *Spannweite*:

$R_{Nina} = x_{max} - x_{min} = 10 - 8 = 2$

$R_{Mike} = x_{max} - x_{min} = 14 - 5 = 9$

Die *mittlere absolute Abweichung* ergibt mit $\bar{x} = 9$:

$$\bar{d}_{Nina} = \frac{|8-9| + |8{,}5-9| + |9-9| + |9{,}5-9| + |10-9|}{5} = \frac{1 + 0{,}5 + 0 + 0{,}5 + 1}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\bar{d}_{Mike} = \frac{|5-9| + |6-9| + |8-9| + |12-9| + |14-9|}{5} = \frac{4 + 3 + 1 + 3 + 5}{5} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

Ninas Arbeitszeiten weichen im Durchschnitt nur um 0,6 Stunden vom Mittelwert ab, während Mikes Arbeitszeiten eine mittlere Abweichung von 3,2 Stunden aufweisen. Das zeigt, dass Mikes Arbeitszeiten deutlich unregelmäßiger sind.

Für die *Varianz* erhalten Sie mit $\bar{x} = 9$:

$$v = s^2_{Nina} = \frac{(8-9)^2 + (8{,}5-9)^2 + (9-9)^2 + (9{,}5-9)^2 + (10-9)^2}{5} = \frac{1 + 0{,}25 + 0 + 0{,}25 + 1}{5} = \frac{2{,}5}{5} = 0{,}5$$

$$v = s^2_{Mike} = \frac{(5-9)^2 + (6-9)^2 + (8-9)^2 + (12-9)^2 + (14-9)^2}{5} = \frac{16 + 9 + 1 + 9 + 25}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

Hier wird klar, dass die Streuung der Arbeitsstunden um das arithmetische Mittel bei Mike deutlich größer ist als bei Nina. Zudem wird deutlich, warum neben der Varianz auch die Standardabweichung verwendet wird: Mikes Varianz, also seine Streuung, ist fast so hoch wie seine höchste Stundenanzahl, was in der Praxis wenig sinnvoll ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Für die Berechnung der *Standardabweichung* zieht man einfach die Quadratwurzel aus der Varianz. Die Formeln für Nina und Mike lauten mit $\bar{x} = 9$:

$$s_{Nina} = \sqrt{\frac{(8-9)^2 + (8{,}5-9)^2 + (9-9)^2 + (9{,}5-9)^2 + (10-9)^2}{5}} = \sqrt{\frac{1 + 0{,}25 + 0 + 0{,}25 + 1}{5}} = \sqrt{0{,}5} \approx 0{,}71$$

$$s_{Mike} = \sqrt{\frac{(5-9)^2 + (6-9)^2 + (8-9)^2 + (12-9)^2 + (14-9)^2}{5}} = \sqrt{\frac{16 + 9 + 1 + 9 + 25}{5}} = \sqrt{12} \approx 3{,}46$$

Mit dem *Variationskoeffizienten* können die Standardabweichungen eingeschätzt werden:

$VK_{Nina} = \frac{0{,}71}{9} \cdot 100\,\% = 7{,}89\,\%$ Da der VK hier unter 10 % liegt, ist die Streuung gering.

$VK_{Mike} = \frac{3{,}46}{9} \cdot 100\,\% = 38{,}44\,\%$ Da der VK hier über 20 % liegt, ist die Streuung hoch.

Standardabweichung
Die Standardabweichung ist eine gängige Kennzahl und zeigt, ähnlich wie die mittlere absolute Abweichung, wie stark die einzelnen Werte um den Mittelwert variieren.

Variationskoeffizient
Der Variationskoeffizient ist der prozentuale Anteil der Standardabweichung am arithmetischen Mittel.

Aufgabe 2.10 (ZFL3kr)
Berechnen Sie die Spannweite, das arithmetische Mittel, die mittlere absolute Abweichung und die Standardabweichung:

a) 4; 9; 6; 8; 3
b) 7; 8; 5; 6; 4
c) 2; 4; 6; 6; 8; 10
d) 1; 3; 3; 4; 6; 8; 10
e) 5; 5; 7; 7; 8; 9; 9; 10
f) 4; 4; 4; 8; 10; 12; 15; 15
g) 2; 3; 4; 5; 5; 7; 9
h) 10; 12; 15; 15; 18; 20
i) 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 10

Aufgabe 2.11 (t7Wa75)
Eine Schokoladenfabrik stellt die Sorte "Zartbitter Plus" her. Im Rahmen der Qualitätskontrolle wird das Gewicht der fertigen Tafeln auf Genauigkeit geprüft:

Gewicht (in g)	64	67	69	71	73	75
H	10	15	20	130	15	10

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung des Gewichts.
b) Um wie viel Prozent weicht das arithmetische Mittel vom Sollwert (70 g) ab?
c) Bestimmen Sie den Modalwert und den Median des Gewichts.

Aufgabe 2.12 (EULmxp)
Als Betriebsratsmitglied sollen Sie die Löhne einer Abteilung analysieren. In dieser Abteilung verdienen die sechs Teamleiter jeweils 4500 Euro im Monat, die zehn Sachbearbeiter jeweils 3000 Euro, der Prokurist 9500 Euro und der Geschäftsführer 13.000 Euro.

a) Erstellen Sie eine Übersicht über die Verdienste in dieser Abteilung. Berechnen Sie die Spannweite, das durchschnittliche Einkommen und die Standardabweichung.
b) Halten Sie die hohe Spannweite der verschiedenen Gehaltsstufen für gerechtfertigt? Begründen Sie Ihre Meinung.

Prokurist
Ein Prokurist ist eine Person, die von einem Unternehmen eine umfassende Handlungsvollmacht (Prokura) erhalten hat und im Namen des Unternehmens rechtsgeschäftlich handeln darf.

Aufgabe 2.13 (VjHJe5)
Ein Würfel wurde 10-mal geworfen, und die folgenden Augenzahlen wurden in einer Urliste notiert: 4; 2; 5; 5; 6; 3; 4; 2; 5; 1.

a) Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle für die Zahlenreihe.
b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Augenzahlen.
c) Zeichnen Sie ein Säulendiagramm, das die Häufigkeiten der Augenzahlen darstellt.

Aufgabe 2.14 (b8dnw9)
Mit einer elektronischen Waage wurde mehrfach das Gewicht eines Briefes (in g) gemessen. Die Werte in der Urliste sind:
23,02 22,98 23,01 23,03 22,99 23,00 23,01 22,97 23,02 22,97

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung dieser Messwerte.

Das "Gütesiegel 0,1 %" bedeutet, dass die Standardabweichung höchstens um 0,1 % vom "wahren Wert" (hier dem arithmetischen Mittel) abweichen darf.

b) Darf die Waage das Gütesiegel tragen?

Aufgabe 2.15 (9itjWL)

Die folgende Tabelle zeigt die Umsätze (in Tausend Euro) eines Unternehmens pro Quartal für verschiedene Abteilungen.

a) Erstellen Sie ein Diagramm, das jeweils alle vier Quartalsumsätze der drei Abteilungen kumuliert als prozentuale Anteile am Gesamtumsatz der Abteilung darstellt.

b) Berechnen Sie für jede Abteilung den durchschnittlichen Quartalsumsatz und die Standardabweichung. Vergleichen und bewerten Sie die Höhe der Standardabweichungen.

	1. Quartal	2. Quartal	3. Quartal	4. Quartal
Versand	265	340	315	415
Einzelhandel	435	450	431	480
Großhandel	955	975	1040	1125

Aufgabe 2.16 (gsWTDw)

Beim Wiegen von "Pfundschalen" mit Erdbeeren ergaben sich folgende Gewichte in g:
485 490 500 505 490 485 500 495 495 505

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Gewichte.

b) Bilden Sie sinnvolle Merkmalsklassen und stellen Sie die Daten in einem Schaubild dar.

c) Beurteilen Sie die Abfüllmengen im Hinblick auf die Vorgabe eines "Pfunds".

Aufgabe 2.17 (XQzz29)

Ein Backmittelhersteller testet zwei Maschinen, Maschine X und Maschine Y, um Mehl automatisch mit einem Sollgewicht von 500 g in Tüten abzufüllen. Nach einer Messreihe mit beiden Maschinen ergab sich folgende Verteilung der Füllgewichte. Entscheiden Sie mithilfe statistischer Kennzahlen, welche der beiden Maschinen das Sollgewicht von 500 g besser einhält, und begründen Sie Ihre Wahl.

Füllgewicht in g	495	498	500	503	505	506
h (Maschine X)	0,06	0,20	0,45	0,18	0,08	0,03
h (Maschine Y)	0,08	0,18	0,50	0,15	0,07	0,02

Aufgabe 2.18 (Vae6LJ)

Die Mitgliederzahlen eines Sportvereins wurden über mehrere Jahre beobachtet und sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Jahr	2021	2022	2023	2024	2025
Mitgliederanzahl	800	910	895	870	820

a) Berechnen Sie die mittlere absolute Abweichung und die Standardabweichung der Mitgliederzahlen über die Jahre.

b) Erstellen Sie zwei Säulendiagramme: Eines, das den Eindruck vermittelt, dass die Mitgliederzahlen relativ konstant geblieben sind, und ein weiteres, das den Eindruck einer stark schwankenden Mitgliederzahl vermittelt.

Aufgabe 2.19 (wVPc3U)

Ein Unternehmen analysiert die Verkaufszahlen eines Produkts in der ersten Jahreshälfte, um die Stabilität der Verkaufsentwicklung zu beurteilen. Die monatlichen Verkaufszahlen sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Jahr	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
H	1.120	1.080	1.050	1.100	1.030	968

a) Berechnen Sie die mittlere absolute Abweichung der Verkaufszahlen.

b) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Verkaufszahlen.

c) Interpretieren Sie die Ergebnisse: Wie gleichmäßig sind die Verkaufszahlen über die Monate verteilt? Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe des Variationskoeffizienten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



2.5 BOXPLOTDIAGRAMME

Situationsbeschreibung – Alter von Schüler:innen
Die neue Unterstufe der Mediengestalter Digital- & Printmedien umfasst 19 Schülerinnen und Schüler. Im Rahmen der Einschulung wurde das Alter der Lernenden erhoben. Die Ergebnisse sind in folgender Rangliste aufgeführt:
16, 17, 18, 19, 19, 22, 23, 23, 23, 23, 24, 24, 25, 25, 25, 25, 33, 42

Die Altersverteilung soll zur besseren Anschauung in einem Boxplot visualisiert werden.

Achtung
Sollte nur eine Urliste gegeben sein, müssen Sie die Werte in jedem Fall als Rangliste sortieren.

Erstellung von Boxplotdiagrammen (DPpbaU)
Zusätzlich zu den bisher kennengelernten Diagrammtypen gibt es das Boxplotdiagramm, das eine weitere gängige Möglichkeit bietet, Daten grafisch darzustellen.

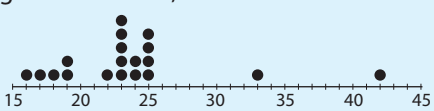
Zur Erstellung eines Boxplots müssen zunächst verschiedene Kenngrößen berechnet werden:
Der **Median** ($\tilde{x}$) ist bereits aus Kapitel 2.3 bekannt und teilt die Datenreihe in zwei gleich große Teile. Diese beiden Hälften werden für die Bestimmung der nächsten Werte benötigt.

Das **untere Quartil** (q_u) ist der Median der unteren Hälfte der Datenreihe und liegt an der Position $x_u = 0{,}25 \cdot (n + 1)$. Bei Werten mit x,75 wird der nächsthöhere Wert verwendet. Bei x,25 oder x,5 wird das arithmetische Mittel der benachbarten Werte gebildet.

Das **obere Quartil** (q_o) ist der Median der oberen Hälfte der Datenreihe und liegt an der Position $x_o = 0{,}75 \cdot (n + 1)$. Bei x,25 wird der nächstkleinere Wert genommen, und bei x,5 oder x,75 wird das arithmetische Mittel der umliegenden Werte verwendet.

Der **Interquartilsabstand** (q_A) ergibt sich aus der Differenz zwischen dem oberen und dem unteren Quartil: $q_A = q_o - q_u$.

Wenn die Altersdaten in einem Punktediagramm dargestellt werden, stechen manche Werte besonders hervor, die nicht in den allgemeinen Trend passen. Solche Werte werden, basierend auf der folgenden Regel, als Ausreißer bezeichnet:



Ein Wert ist ein **Ausreißer**, wenn er kleiner als $q_u - 1{,}5 \cdot q_A$ oder größer als $q_o + 1{,}5 \cdot q_A$ ist.
Im Boxplot werden Ausreißer als Punkte oder Kreise dargestellt.

Der **untere Whisker** entspricht dem nächstgrößeren Wert oberhalb der Grenze $q_u - 1{,}5 \cdot q_A$ während der **obere Whisker** dem nächstkleineren Wert unterhalb der Grenze $q_o + 1{,}5 \cdot q_A$ entspricht.
Sind keine Ausreißer vorhanden, repräsentieren die Whisker den kleinsten (x_{min}) und größten (x_{max}) Wert der Datenreihe.

ⓘ

Abkürzungen
$\tilde{x}$ = Median
q_u = unteres Quartil
q_o = oberes Quartil
q_A = Interquartilsabstand

Sofern es keine Ausreißer gibt, gilt weiterhin:
x_{min} = unterer Whisker
x_{max} = oberer Whisker

Beispiel
Für die fiktive Datenreihe 3, 4, 5, 6 ergäben sich:
$x_u = 4$ => $q_u = 4$
$x_u = 4{,}25$ => $q_u = 4{,}5$
$x_u = 4{,}5$ => $q_u = 4{,}5$
$x_u = 4{,}75$ => $q_u = 5$

Für die fiktive Datenreihe 6, 7, 8, 9 ergäben sich:
$x_o = 7$ => $q_o = 7$
$x_o = 7{,}25$ => $q_o = 7$
$x_o = 7{,}5$ => $q_o = 7{,}5$
$x_o = 7{,}75$ => $q_o = 7{,}5$

Zeichnen des Boxplots
Beim Zeichnen eines Boxplots bilden das untere und obere Quartil sowie der Median die eigentliche Box. Die Whisker ragen von der Box aus nach oben und unten, und Ausreißer werden durch Punkte dargestellt.

Ⓑ **Beispiel**

Median
$\tilde{x} = \frac{23+23}{2} = 23$

1. Mit den ersten beiden Schritten wird die Datenreihe in vier gleich große Abschnitte unterteilt. Der **Median** ($\tilde{x}$) wird bestimmt, um die Daten zu halbieren. Für die gerade Anzahl an Werten (20) liegt der Median an der Stelle: $x_M = \frac{n+1}{2} = \frac{20+1}{2} = 10{,}5$. Also zwischen dem zehnten und elften Wert der Datenreihe:
$16_{1}, 17_{2}, 18_{3}, 19_{4}, 19_{5}, 20_{6}, 22_{7}, 23_{8}, 23_{9}, (23_{10}, 23_{11}), 23_{12}, 24_{13}, 24_{14}, 25_{15}, 25_{16}, 25_{17}, 25_{18}, 33_{19}, 42_{20}$

Quartile
$q_u = \frac{19+20}{2} = 19{,}5$
$q_o = \frac{25+25}{2} = 25$

2. Das **untere Quartil** (q_u) ist der Median der unteren Hälfte und liegt an der Stelle $x_u = 0{,}25 \cdot (n+1) = 0{,}25 \cdot (20+1) = 5{,}25$ und das **obere Quartil** q_o liegt an der Stelle $x_o = 0{,}75 \cdot (n+1) = 0{,}75 \cdot (20+1) = 15{,}75$ der Rangliste:
$16_{1}, 17_{2}, 18_{3}, 19_{4}, (19_{5}, 20_{6}), 22_{7}, 23_{8}, 23_{9}, (23_{10}, 23_{11}), 23_{12}, 24_{13}, 24_{14}, (25_{15}, 25_{16}), 25_{17}, 25_{18}, 33_{19}, 42_{20}$

Interquartilsabstand
$q_A = 5{,}5$

3. Der **Interquartilsabstand** (q_A) beträgt somit $q_A = q_o - q_u = 25 - 19{,}5 = 5{,}5$.

Ausreißer
$x_A = 42$

4. Um festzustellen, ob **Ausreißer** vorhanden sind, wird geprüft, ob Werte außerhalb der berechneten Grenzen liegen:
untere Grenze: $q_u - 1{,}5 \cdot q_A = 19{,}5 - 1{,}5 \cdot 5{,}5 = 19{,}5 - 8{,}25 = 11{,}25$.
obere Grenze: $q_o + 1{,}5 \cdot q_A = 25 + 1{,}5 \cdot 5{,}5 = 25 + 8{,}25 = 33{,}25$.
Es gibt keine Werte unterhalb der unteren Grenze (kleiner als 11,25). Der Wert 42 liegt jedoch über der oberen Grenze (größer als 33,25), und ist somit ein Ausreißer.

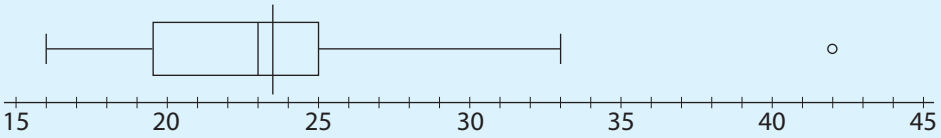
Whisker
$x_{min} = 16$
$x_{max} = 33$

5. Der **untere Whisker** ist der kleinste Wert der Reihe, $x_{min} = 16$, und der **obere Whisker** ist der größte Wert unterhalb der Grenze von 33,25, in diesem Fall $x_{max} = 33$.

arithmetisches Mittel
$\bar{x} = 23{,}45$

6. Oft wird auch das **arithmetische Mittel** als längerer Strich in den Boxplot eingetragen:
$\bar{x} = \frac{16+17+18+2\cdot19+20+22+5\cdot23+2\cdot24+4\cdot25+33+42}{20} = 23{,}45$

7. Zum **Zeichnen** des Boxplots wird eine Skala gewählt, die mindestens von x_{min} bis x_{max} reicht. Je nach Spannweite kann es einfacher sein, eine Skala in beispielsweise 5er-Schritten oder einer anderen Schrittweite zu verwenden. In diesem Beispiel beträgt der kleinste Wert der Skala 15 und der größte Wert 45.



Aufgabe 2.20 (NJDJQd)

In einer Klasse wurden die Körpergewichte der Schülerinnen und Schüler nach Geschlecht getrennt in Kilogramm erfasst. Berechnen Sie für beide Gruppen die jeweils erforderlichen Kennwerte um einen Boxplot zu zeichnen. Visualisieren Sie die Ergebnisse als zwei Boxplots auf derselben Skala (untereinander dargestellt).

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
m	68	62	72	80	85	70	69	71	74	76	65	78	77	
w	54	57	65	66	60	58	61	59	53	62	67	55	56	64

Aufgabe 2.21 (6zxieG)

Um Informationen über die durchschnittliche jährliche Fahrleistung von Pkw-Besitzerinnen und Pkw-Besitzern zu ermitteln, wurden 22 Personen befragt, die ihre im letzten Jahr gefahrenen Strecken (in 1.000 km) angaben:
13, 9, 17, 24, 6, 28, 7, 11, 14, 22, 29, 12, 12, 19, 26, 8, 11, 13, 33, 42, 4, 3

a) Berechnen Sie die Kennwerte, die für die Erstellung eines Boxplots erforderlich sind, einschließlich des arithmetischen Mittels $\bar{x}$.
b) Zeichnen Sie den zu den berechneten Kennwerten gehörigen Boxplot.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



2.6 VERMISCHTE ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 2.22 (7tDGfv)

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung der Körpergrößen von Schülerinnen und Schülern einer Abschlussklasse:

Körpergröße	150–160	160–165	165–170	170–175	175–180	180–200
H	20	15	22	19	14	17

a) Stellen Sie die Verteilung der Körpergrößen als Säulendiagramm dar.
b) Stellen Sie die Verteilung der Körpergrößen als Streifendiagramm dar.

Aufgabe 2.23 (ZBBZk7)

Bei der Klassensprecherwahl erhielt jeder Kandidat die folgende Anzahl an Stimmen. Stellen Sie das Wahlergebnis in einem Kreisdiagramm dar, um die Stimmenanteile zu verdeutlichen.

Kandidat	Manfred	Hildegard	Mareike
Stimmen	12	10	7

Aufgabe 2.24 (2Y4auY)

Eine Umfrage zur Anzahl der Kinder in Familien ergab folgende Ergebnisse:
2 0 1 3 2 1 0 2 1 4 0 3 2 1 3 1 0 1 2 3 4 2 0 1 3 2
a) Erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle für die Anzahl der Kinder.
b) Stellen Sie die Verteilung in einem Säulen-, Streifen- und Kreisdiagramm dar.

Aufgabe 2.25 (c4ZMfR)

Die Abteilungsleiterin erkundigt sich bei den Klassenleitungen der Gestaltungstechnischen Assistenten nach der Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die in der vergangenen Woche abwesend waren. Visualisieren Sie die Ergebnisse in Form eines Streifendiagramms.

Klasse	11GT1	11GT2	12GT1	12GT2	13GT1	13GT2
fehlende Schüler	10	7	12	9	6	8

Aufgabe 2.26 (xpdGqK)

Im Rahmen einer Geschwindigkeitsmessung innerhalb einer geschlossenen Ortschaft wurden von der Polizei folgende Geschwindigkeiten in km/h erfasst:
45; 60; 58; 53; 55; 65; 70; 56; 63; 50; 75; 52; 48; 58; 64; 40; 68; 71; 79; 57
a) Gruppieren Sie die erfassten Werte in geeignete Merkmalsklassen und erstellen Sie eine Häufigkeitstabelle. Berücksichtigen Sie, dass die Polizei erst ab einer Überschreitung der Geschwindigkeit von mehr als 2 km/h über dem Limit ein Bußgeld verhängt.
b) Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Fahrzeuge, die ein Bußgeld erhalten würden.

○ **Aufgabe 2.27 (CdaBRh)**

Ein Lehrer gibt die Verteilung der Abschlussnoten einer Jahrgangsstufe bekannt. Die Notenverteilung ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

Note	1	2	3	4	5	6
Anzahl	6	12	15	14	8	5

a) Berechnen Sie den Durchschnitt der Noten und bestimmen Sie den Median.
b) Ermitteln Sie den Prozentsatz der Schülerinnen und Schüler, die keine Defizite haben (Noten besser als 5).
c) Stellen Sie die Verteilung der Noten in einem Säulendiagramm dar.

○ **Aufgabe 2.28 (DWJZGn)**

In einem Unternehmen arbeiten 12 Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter im Bereich des Facility-Managements und verdienen jeweils 538 Euro pro Monat. Eine neue Teamleiterin wird eingestellt, die ein Bruttogehalt von 3200 Euro pro Monat erhält. Welche Auswirkungen hat diese Neueinstellung auf den Modalwert, den Median und das arithmetische Mittel der Monatseinkommen? Beurteilen Sie die Aussagekraft des arithmetischen Mittels in diesem Fall.

○ **Aufgabe 2.29 (rJcj3r)**

Zehn Studierende haben ihre monatlichen Ausgaben (in Euro) wie folgt angegeben:
1400 1200 3000 700 300 1450 1500 800 800 1000

a) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel, den Median und den Modalwert dieser Daten.
b) Ein Studierender korrigiert seine Angabe dahingehend, dass seine tatsächlichen Ausgaben nicht 3000, sondern 900 Euro betragen. Untersuchen Sie, wie sich diese Korrektur auf das arithmetische Mittel, den Median und den Modalwert auswirkt. Begründen Sie, welche der drei Kennzahlen am empfindlichsten auf solche Änderungen reagiert.

◒ **Aufgabe 2.30 (zcyuk1)**

Der Kraftstoffverbrauch zweier Automodelle (Typ A und Typ B) wurde getestet. Die Verbrauchswerte (in Liter/100 km) sind in der Tabelle aufgeführt:

Typ A	8,0	7,2	8,4	7,9	8,3	7,8	8,2	8,1	7,5	8,6	8,0	
Typ B	8,3	7,1	8,6	7,8	8,2	8,4	7,9	7,4	8,1	8,0	8,5	7,7

a) Sortieren Sie die Verbrauchswerte der beiden Typen in aufsteigender Reihenfolge.
b) Ermitteln Sie den Median für Typ A und Typ B und vergleichen Sie die Ergebnisse.
c) Berechnen Sie den durchschnittlichen Verbrauch $\bar{x}$ für beide Typen.
d) Bestimmen Sie die mittlere absolute Abweichung der Werte für beide Datensätze.
e) Welches der Modelle zeigt den gleichmäßigeren Verbrauch? Begründen Sie.

◒ **Aufgabe 2.31 (mUk7Xj)**

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung der Fehleranzahl, die bei einem Mathetest gemacht wurden. Berechnen Sie die Standardabweichung dieser Fehlerverteilung.

Anzahl Fehler	0	1	2	5
H	12	7	5	6

○ **Aufgabe 2.32 (AQXbFr)**

Bei einer Geschwindigkeitsüberwachung in einer 30 km/h-Zone wurde folgende Verteilung der gefahrenen Geschwindigkeiten ermittelt:

Geschwindigkeit in km/h	30	35	40	45	50
H	101	77	43	19	10

Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Geschwindigkeitsverteilung. Geben Sie ebenfalls den Median an.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 2.33 (Cxh3LR)

Die folgende Tabelle zeigt die Altersverteilung der Kinder in einer Kindertagesstätte:

Alter in Jahren	2	3	4	5
Anzahl	5	9	8	6

a) Berechnen Sie die Standardabweichung des Alters der Kinder in Jahren.
b) In einer anderen Kindertagesstätte beträgt das Durchschnittsalter $\bar{x} = 4{,}3$ Jahre und die Standardabweichung $s = 0{,}6$. In welcher Einrichtung würden Sie lieber arbeiten? Begründen Sie Ihre Wahl anhand der angegebenen statistischen Kennzahlen.

Aufgabe 2.34 (PTjZeB)

Die folgende Tabelle zeigt die Weiten der Sprünge der vier besten Teilnehmerinnen des Weitsprungs bei einem Schulsportfest.

Versuch	1	2	3	4
Luise	4,01	3,97	3,50	4,05
Johanna	3,92	3,94	3,90	3,96
Willow	3,95	3,98	3,90	3,95
Maja	3,98	4,02	3,20	3,60

a) Bestimmen Sie, wer den ersten, zweiten und dritten Platz belegt.
b) Berechnen Sie für jede Teilnehmerin die Kennwerte $\bar{x}$ und s der Sprungweiten.
c) Welche alternativen Kriterien für die Platzierung könnten noch herangezogen werden?

Aufgabe 2.35 (G1UyTg)

Die Tabelle zeigt die monatlichen Einnahmen und Ausgaben in Euro von zehn Haushalten.

Haushalt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Einnahmen	900	2400	1900	2300	1700	1100	2100	1300	1200	1800
Ausgaben	900	1900	1600	1800	1500	1000	1700	1250	1060	1540
Sparbetrag										

a) Berechnen Sie die Sparbeträge und tragen Sie diese in die letzte Zeile der Tabelle ein.
b) Ermitteln Sie die Standardabweichung der Sparbeträge.
c) Beurteilen Sie die Aussage: "Im Durchschnitt spart jeder Haushalt 250 Euro im Monat." Stimmen Sie dieser Aussage zu oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.36 (u8n5yy)

In einem Betrieb verdienen Auszubildende 700 Euro pro Monat, Fachkräfte 1800 Euro, Meister 4000 Euro und die Geschäftsführerin 9000 Euro. Der Betrieb beschäftigt insgesamt vier Auszubildende, fünf Fachkräfte, drei Meister und eine Geschäftsführerin.

a) Berechnen Sie das durchschnittliche Gehalt ($\bar{x}$) aller Betriebsangehörigen und die Standardabweichung (s) der Gehälter.
b) Ein anderer Betrieb mit ähnlichen Personalstruktur hat ein durchschnittliches Gehalt von $\bar{x} = 2500$ Euro und eine Standardabweichung von $s = 500$ Euro. Welcher Betrieb weist Ihrer Meinung nach ein ausgeglicheneres Gehaltsgefüge auf? Begründen Sie.
c) In welchem der beiden Betriebe würden Sie lieber arbeiten? Erläutern Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 2.37 (rhYCN9)

Ein Team von fünf Mitarbeitern erhält monatlich folgende Gehälter (in Euro):

1200 1500 1800 2000 2500

a) Berechnen Sie die Standardabweichung der Gehälter.
b) Bewerten Sie die Standardabweichung im Verhältnis zum durchschnittlichen Gehalt. Halten Sie die Abweichung für hoch oder niedrig? Begründen Sie Ihre Einschätzung.

◒ **Aufgabe 2.38 (zPpaCn)**

Eine Wetterstation misst die Tageshöchsttemperaturen in °C. Die Werte für September 2024 sind bereits sortiert und wie folgt angegeben:

13 14 14 14 15 15 15 16 16 18 18 18 18 19 19
19 20 21 21 22 23 23 23 25 25 26 28 29 29 30

a) Berechnen Sie die durchschnittliche Tageshöchsttemperatur $\bar{x}$.
b) Bestimmen Sie den Median, den Quartilsabstand und die Spannweite der Werte.
c) Vergleichen Sie die ermittelte durchschnittliche Temperatur mit einem über Jahre gemittelten Monatswert von 19,5 °C. Können hierdurch Rückschlüsse auf eine mögliche Änderung der klimatischen Verhältnisse gezogen werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

● **Aufgabe 2.39 (1d1GB4)**

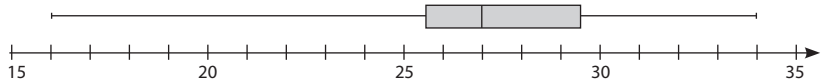
In einer Ausgabe des Epos *Der Herr der Ringe*, die insgesamt 1296 Seiten in der gesamten Trilogie umfasst, wurden auf zehn zufällig ausgewählten Seiten die Anzahl der Zeilen sowie die Anzahl der Wörter pro Zeile erfasst. Die Daten sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Zeilen/Seite	33	34	32	31	33	34	32	33	31	32
Wörter/Zeile	10	9	11	8	10	9	10	11	8	9

a) Schätzen Sie auf Grundlage der gegebenen Werte die durchschnittliche Anzahl der Wörter pro Seite.
b) Ermitteln Sie die geschätzte Gesamtanzahl der Wörter in der gesamten Trilogie, indem Sie den Durchschnitt der Wörter pro Seite mit der Gesamtseitenzahl multiplizieren.
c) Beurteilen Sie die Genauigkeit der Schätzung: Welche Faktoren könnten die Genauigkeit der Berechnung beeinflussen?

◒ **Aufgabe 2.40 (pPH7WC)**

Welche der Datenlisten passen zum Boxplot? Begründen Sie Ihre Antwort.



a) 16; 24; 25; 26; 27; 27; 27; 30; 31; 34
b) 16; 24; 25; 26; 27; 27; 27; 30; 31; 40
c) 16; 25; 26; 27; 29; 30; 34
d) 16; 17; 18; 19; 27; 29; 30; 31; 34

○ **Aufgabe 2.41 (KuJYye)**

Zeichnen Sie mithilfe der folgenden Aussagen einen einzigen Boxplot.

– Der Zentralwert beträgt 15.
– Das Minimum liegt bei 5.
– Das untere Quartil ist um 4 kleiner als der Zentralwert.
– Das Maximum ist doppelt so groß wie der Zentralwert.
– Das obere Quartil ist 25.

○ **Aufgabe 2.42 (G6CSE5)**

Zeichnen Sie für die beiden geordneten Listen die Boxplots.

a) 0; 4; 4; 4; 6; 6; 6; 8; 8; 8; 14; 14; 14
b) 0; 0; 0; 6; 6; 6; 8; 8; 8; 10; 10; 10; 16

◒ **Aufgabe 2.43 (9D6iaj)**

Die folgende Tabelle zeigt die Häufigkeiten von Abweichungen, die bei der Herstellung von Schrauben aufgetreten sind. Die Produktion darf nur dann weiterlaufen, wenn das arithmetische Mittel der Abweichungen unter dem Grenzwert von 0,1 mm liegt. Andernfalls müsste der Herstellungsprozess überprüft oder möglicherweise abgebrochen werden.
Ist die Fortsetzung der Produktion in diesem Fall zulässig?

Abweichung	0,5 mm	0,4 mm	0,3 mm	0,2 mm	0,1 mm	0 mm
Anzahl	250	750	1200	1800	2600	8000

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 2.44 (6phdrq)

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle und erstellen Sie je einen Boxplot. Begründen Sie, welcher der Boxplots auffällig ist und was die Ursache für diese Auffälligkeit sein könnte.

	x_{min}	q_u	$\tilde{x}$	q_o	x_{max}	q_A	R	$\bar{x}$
a)	4	15	22		44	12		21
b)	5	18	30	40			43	33
c)			424	430	500	20	100	480

Aufgabe 2.45 (7cQ1y2)

Eine Fachzeitschrift hat einen Preisvergleich für verschiedene Digitalkamera-Modelle durchgeführt. Für das Modell MW512 haben die befragten Anbieter folgende, in einer Rangliste sortierte Preise (in Euro) angegeben:

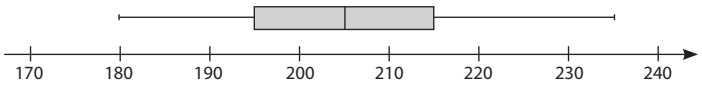
89,90 102,50 115,90 118,00 119,95 120,00 123,80 129,90 135,50 140,90

a) Stellen Sie die Preisangaben mithilfe eines Boxplots grafisch dar, um die Datenverteilung zu analysieren
Hinweis: Es gibt keine Ausreißer

b) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel der angegebenen Preise. Was fällt Ihnen auf?

c) Beschreiben Sie die Preisdaten anhand des in a) erstellten Boxplots.

d) Der folgende Boxplot zeigt die Verteilung der Preisdaten für das Modell SW205. Nehmen Sie zur Aussage des Autors Stellung:
"Bei einem Viertel der Anbieter ist die Kamera für weniger als 200,00 Euro zu haben."



Aufgabe 2.46 (xCkN76)

Nina und Mike haben eine Unlimited Card des UCI in Bochum, mit der sie so oft ins Kino gehen können, wie sie möchten. Als sie in die Neuverfilmung von "Der König der Löwen" gehen wollten, wurden sie am Eingang von einer Kino-Mitarbeiterin für eine kurze Befragung angesprochen: "Wie oft waren Sie im letzten Jahr im Kino?"
Die Umfrageergebnisse aus Bochum, aber auch die Ergebnisse anderer Städte, sollen dann im KINO&CO MAGAZIN veröffentlicht zu werden.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	17	19	24
Jugendliche (n = 117)	3	7	14	23	21	17	11	5	7	3	1	2	1	1	1
Erwachsene (n = 121)	22	26	25	17	14	7	2	3	1	0	3	1	0	0	0

Sie haben vom UCI nun den Auftrag erhalten, die Bochumer Umfrageergebnisse visuell in je einem Boxplot-Diagramm aufzubereiten. Zeichnen Sie dazu beide Boxplots untereinander auf die selbe Skala und achten Sie auf Ausreißer.

Aufgabe 2.47 (ijuniN)

Ein Unternehmen erfasst die monatlichen Verkaufszahlen (in Stück) für ein Produkt während der ersten beiden Quartale des Jahres:

Jahr	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni
Mitgliederanzahl	150	180	165	140	155	170

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der monatlichen Verkaufszahlen.

b) Bestimmen Sie die Standardabweichung der Verkaufszahlen.

c) Interpretieren Sie, ob die Verkaufszahlen eher stark schwanken oder relativ stabil sind.

2.7 CHECKLISTE – STATISTIK

Mit dieser Checkliste können Sie sich optimal auf die Klassenarbeit vorbereiten, indem Sie überprüfen, welche grundlegenden Themen der Unterrichtsreihe Sie sicher beherrschen und bei welchen Bereichen Sie noch Übungsbedarf haben. Wenn Sie die Checkliste vollständig und sorgfältig durchgearbeitet haben, sollten Sie in der Lage sein, in der Klassenarbeit eine solide Leistung zu erzielen.

	Meine Kompetenzen (bitte kreuzen Sie entsprechend an):	Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
1	Ich kann den Begriff "absolute Häufigkeiten" erläutern und diese auf Basis einer Urliste angeben.				
2	Ich kann den Begriff "relative Häufigkeiten" erläutern und diese auf Basis einer Urliste angeben und berechnen.				
3	Ich kann relative Häufigkeiten in absolute Häufigkeiten umrechnen und umgekehrt.				
4	Ich kenne die drei häufigsten Diagrammarten.				
5	Ich kann Säulen-, Kreis- und Balkendiagramme anhand gegebener Daten zeichnen.				
6	Ich kann das arithmetische Mittel beschreiben, kenne das mathematische Zeichen und kann es auf Basis einer Urliste berechnen.				
7	Ich kann den Modalwert beschreiben, kenne das mathematische Zeichen und kann ihn auf Basis einer Urliste und anhand von Häufigkeitstabellen angeben.				
8	Ich kann den Median beschreiben, kenne das mathematische Zeichen und kann ihn auf Basis einer Urliste und anhand von Häufigkeitstabellen angeben.				
9	Ich kann die Spannweite eines Datensatzes berechnen.				
10	Ich kann die mittlere absolute Abweichung erläutern, kenne das mathematische Zeichen und kann sie auf Basis eines Datensatzes berechnen.				
11	Ich kenne den Begriff der Varianz.				
12	Ich kann die Standardabweichung berechnen und deren Aussagekraft erläutern.				

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

		Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
13	Ich kann die Standardabweichung anhand des Variations-koeffizienten einschätzen.				
14	Ich kenne alle Kenngrößen eines Boxplots (Median, Quartile, Quartilsabstand, Ausreißer, Minimum, Maximum, Whisker) und kann diese beschreiben und berechnen.				
15	Ich kann die Whisker auf Basis einer Urliste benennen und deren Bedeutung erläutern.				
16	Ich kann Boxplottdiagramme zeichnen.				
17	Ich kann Boxplots interpretieren und Besonderheiten (z. B. Ausreißer) erkennen und beschreiben.				
18	Ich kann Daten aus praktischen Beispielen (z. B. Umfragen oder Messreihen) analysieren und interpretieren.				
19	Ich kann die Ergebnisse meiner Berechnungen in einem Kontext interpretieren und klare Schlussfolgerungen ziehen.				

Hilfestellung

Beim Durchgehen der Checkliste sind noch folgende Fragen aufgetaucht:

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



3.1 EINFÜHRUNG IN LINEARE FUNKTIONEN

Situationsbeschreibung – Kinobesuch
Nina und Mike haben sich im Kino den "Herr der Ringe Extended Marathon" mit einer Laufzeit von stolzen 726 Minuten angesehen. Nach der Vorstellung haben sie festgestellt, dass keine Busse mehr fuhren. Also haben sie ein Taxi gerufen, um nach Hause zu kommen. Die 5 Kilometer lange Fahrt kostete sie insgesamt 12,40 Euro.

Eine Woche später brauchte Mike wieder ein Taxi, weil er schnell zum Bahnhof musste. Dieses Mal war die Strecke mit 10 Kilometern doppelt so lang, und er zahlte 18,40 Euro. Das brachte die beiden ins Grübeln: Wie werden die Preise für eine Taxifahrt eigentlich berechnet? Sie beschlossen, der Sache auf den Grund zu gehen.

Aufgabe 3.1 (7YxzSP)
Welche Faktoren könnten dazu führen, dass unterschiedliche Fahrpreise berechnet werden? Überlegen Sie, welche Gründe dafür eine Rolle spielen könnten, und notieren Sie mindestens drei mögliche Ursachen. Berücksichtigen Sie dabei sowohl externe Einflüsse als auch mögliche Unterschiede im Preismodell.

– _____

– _____

– _____

Vergleichen Sie Ihre Überlegungen mit denen Ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler. Ergänzen oder korrigieren Sie Ihre Notizen basierend auf den Diskussionen in der Klasse.

Aufgabe 3.2 (X9dxzj)
Entwickeln Sie eine allgemeine Gleichung, die den Fahrpreis für eine beliebige Strecke berechnet. Dabei sollen sowohl der Grundpreis als auch der Preis pro Kilometer berücksichtigt werden. Nutzen Sie die Begriffe Kilometerpreis, gefahrene Kilometer und Grundpreis.

a) **In Worten**: Formulieren Sie eine Beschreibung des Fahrpreises in Textform.

Fahrpreis = _____

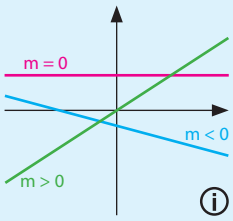
b) **Als Gleichung**: Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf und verwenden Sie passende Bezeichnungen für die in a) genannten Werte.

f(x) = y = _____

ⓘ

Funktionsname
f(x) spricht man als "f von x". Das f in f(x) beschreibt lediglich den Namen der Funktion. Sie könnte auch g(x) oder Karl(x) heißen.

Geradenverlauf
- m positiv: nach oben
- m negativ: nach unten
- m gleich null: waagerecht



ⓘ

Denken Sie nach...
Wieso muss hier die Einschränkung "x_1 ungleich x_2" gemacht werden?

Lineare Funktion (r3cjsX)

Eine Funktion der Form **$f(x) = m \cdot x + b$** wird als **lineare Funktion** bezeichnet. Man spricht auch von einer **Geradengleichung**, da das Schaubild dieser Funktion im Koordinatensystem immer eine gerade Linie darstellt, diese also mit einem Lineal gezeichnet werden kann. Die lineare Funktion wird durch zwei charakteristische Werte beschrieben:

– Die **Steigung (m)** gibt an, wie stark der y-Wert zunimmt oder abnimmt, wenn sich der x-Wert um eine Einheit erhöht. Dieser Wert wird auch als **Änderungsrate** bezeichnet.
– Der **y-Achsenabschnitt (b)** ist der Funktionswert bei $x = 0$. Grafisch gesehen entspricht er dem Punkt $(0|b)$, an dem die Gerade die y-Achse schneidet. Ist $b = 0$, verläuft die Gerade durch den Koordinatenursprung $(0|0)$ und wird als **Ursprungsgerade** bezeichnet.

Das **Argument (x)**, auch einfach x-Wert genannt, ist die unabhängige Variable der Geradengleichung. Setzt man einen x-Wert in die Funktion ein, erhält man als Ergebnis den zugehörigen **Funktionswert f(x)**, der auch als y-Wert bezeichnet wird. Die sogenannte **Funktionsvorschrift** $f(x) = m \cdot x + b$ beschreibt, wie der y-Wert von der Variablen x abhängt.

ⓘ

Berechnung der Steigung (r3cjsX)

Verläuft eine Gerade durch zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$, so kann die **Steigung (m)** berechnet werden mit:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{für } x_1 \neq x_2).$$

ⓘ

Steigungswinkel (r3cjsX)

Der **Steigungswinkel α** einer Geraden in Bezug auf die x-Achse kann bei gegebener Steigung m über folgende Formel berechnet werden: $\alpha = \tan^{-1}(m)$
Bei gegebenem Winkel α ergibt sich für die Steigung: $m = \tan(\alpha)$

Ⓑ

Beispiel

Ein Bankkonto hat zu Beginn, zum Zeitpunkt $x = 0$, ein Guthaben von 500 Euro. Jede Woche x verändert sich das Guthaben abhängig davon, ob Geld eingezahlt oder abgehoben wird:

Steigung m > 0
Eine positive Steigung entspricht einer Einzahlung, sodass das Guthaben steigt.

1. **Positive Änderungsrate:**
   Wird jede Woche ein Betrag in Höhe von 100 Euro eingezahlt, steigt das Guthaben mit einer Steigung von $m = 100$. Die Funktionsgleichung lautet:
   $$f(x) = 100 \cdot x + 500$$
   Hier gibt x die Anzahl der Wochen an, und f(x) beschreibt das aktuelle Guthaben in Euro nach x Wochen.

   Beispielrechnung nach vier Wochen ($x = 4$):
   $f(4) = 100 \cdot 4 + 500 = 400 + 500 = 900$

Steigung m < 0
Eine negative Steigung entspricht einer Auszahlung, sodass das Guthaben sinkt.

2. **Negative Änderungsrate:**
   Wenn jede Woche 50 Euro abgehoben werden, verringert sich das Guthaben mit einer Steigung von $m = -50$. Die Funktionsgleichung lautet:
   $$f(x) = -50 \cdot x + 500$$

   Beispielrechnung nach sechs Wochen ($x = 6$):
   $f(6) = -50 \cdot 6 + 500 = -300 + 500 = 200$

Steigung m = 0
Wenn die Steigung gleich null ist, verändert sich der Guthabenbetrag nicht.

3. **Änderungsrate gleich null:**
   Zahlt man weder Geld auf das Konto ein noch hebt man Geld ab, entspricht das einer Steigung von $m = 0$. Die Funktionsgleichung lautet:
   $$f(x) = 0 \cdot x + 500 = 0 + 500 = 500$$

   Beispielrechnung nach 9 Wochen ($x = 9$):
   Da das x in der Funktionsgleichung keinen Einfluss mehr hat, ist es egal, welcher Wert für x eingesetzt wird, der Funktionswert bleibt immer gleich.
   $f(9) = 500$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.3 (wdypzG)

Mike hat ein Taxiunternehmen gefunden, das eine Grundgebühr von 3 Euro erhebt und zusätzlich 1,50 Euro pro gefahrenem Kilometer berechnet.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung K(x) auf, die den Fahrpreis (in Euro) in Abhängigkeit von der Strecke x (in Kilometern) beschreibt.
b) Berechnen Sie die Kosten für die Fahrten zum Kino (5 km) und zum Bahnhof (10 km) basierend auf der neuen Tarifregelung.
c) Mike und Nina haben nach einem Discobesuch zusammen noch 12 Euro übrig. Wie weit können sie mit diesem Betrag gemeinsam fahren? Begründen Sie rechnerisch.
d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion K(x) in ein geeignetes Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die Grundgebühr.

Aufgabe 3.4 (RJr6aP)

Zu Beginn eines Regenschauers befinden sich bereits 25 Liter Wasser in einer Tonne. Während des Regens steigt der Wasserstand alle 2 Minuten um 1 Liter.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung f(x) auf, die den Wasserstand in der Tonne (in Litern) nach x Minuten beschreibt.
b) Berechnen Sie die Wassermenge, die sich nach 12 Minuten in der Tonne befindet.
c) Die Tonne hat ein Fassungsvermögen von 65 Litern. Berechnen Sie, wie lange der Regen andauern muss, bis die Tonne überläuft. Geben Sie die Zeit in der Form hh:mm an.

Aufgabe 3.5 (q5sUGd)

Die Nachbarin von Mike und Nina, Frau Liselotte Bachorz, ist mit ihren 80 Jahren körperlich nicht mehr in der Lage, weite Strecken zu Fuß zurückzulegen. Für Einkäufe und andere Besorgungen nutzt sie daher ein Taxi. Das von ihr gewählte Taxiunternehmen berechnet den Fahrpreis auf Grundlage der Fahrzeit. Dabei beträgt die Grundgebühr 5,00 Euro, und pro gefahrene Minute werden zusätzlich 2,50 Euro berechnet.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung p(x) auf, die den Fahrpreis (in Euro) in Abhängigkeit von der Fahrzeit x (in Minuten) angibt.
b) Berechnen Sie die Fahrpreise für folgende Fahrzeiten:
   - Postfiliale: 5 Minuten Fahrzeit
   - Bahnhof: 12 Minuten Fahrzeit
   - Supermarkt: 15 Minuten Fahrzeit
c) Zeichnen Sie ein Koordinatensystem mit den folgenden Angaben:
   - x-Achse: Fahrzeit x (in Minuten) mit $0 \leq x \leq 15$ und dem Maßstab 1 min = 0,5 cm.
   - y-Achse: Fahrpreis y (in Euro) mit dem Maßstab 2 Euro = 0,5 cm

   Wie lang muss die y-Achse mindestens sein, damit die Kosten für die längste Fahrzeit vollständig abgebildet werden können?
d) Tragen Sie die Funktion p(x) anhand der Punkte aus b) und mit Hilfe des y-Achsenabschnitts in das Koordinatensystem ein und zeichnen Sie den Graphen, der den Fahrpreis in Abhängigkeit von der Fahrzeit darstellt.

Aufgabe 3.6 (euEeMy)



Mike und Nina verbringen ihren Urlaub auf Lanzarote und mieten bei CICAR ein Auto für einen Tag, um die Werke des spanischen Malers, Architekten und Bildhauers César Manrique zu besichtigen. Die Mietkosten setzen sich aus einem Tagesgrundpreis in Höhe von 71,50 Euro und einer kilometerabhängigen Gebühr von 12 Cent pro gefahrenem Kilometer zusammen.

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung K(x) auf, die die Gesamtkosten (in Euro) in Abhängigkeit von der gefahrenen Strecke x (in Kilometern) beschreibt.
b) Mike und Nina planen eine Rundfahrt mit einer Gesamtstrecke von 228 Kilometern. Berechnen Sie die zu erwartenden Gesamtkosten für diese Fahrt.
c) Bei der Rückgabe des Autos erhalten Mike und Nina eine Rechnung über 124,84 Euro. Ermitteln Sie, wie viele Kilometer sie tatsächlich gefahren sind.

Aufgabe 3.7 (nnuPpP)

Nina mietet bei einem Verleih ein Fahrrad für eine Tagesradtour. Der Fahrradverleih berechnet eine Grundgebühr von 8 Euro. Zusätzlich kostet jeder gefahrene Kilometer 0,50 Euro.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung K(x) auf, die die Gesamtkosten (in Euro) in Abhängigkeit von der Strecke x (in Kilometern) beschreibt.
b) Berechnen Sie die Kosten, wenn Nina folgende Strecken zurücklegt:
   - 15 Kilometer
   - 25 Kilometer
   - 40 Kilometer
c) Nina hat ein Budget von 30 Euro. Wie viele Kilometer kann sie damit fahren?
d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion K(x) in ein geeignetes Koordinatensystem und kennzeichnen Sie dabei die Grundgebühr.
e) Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Grundgebühr an den Gesamtkosten, wenn Nina 40 Kilometer fährt.

Aufgabe 3.8 (v2sUn6)

Ein Pool mit einem Fassungsvermögen von 3000 Litern wird mit einem Schlauch befüllt. Pro Minute fließen 23,4 Liter Wasser in den Pool. Zu Beginn befinden sich bereits 238 Liter Regenwasser im Pool.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung w(x) auf, welche die Wassermenge (in Litern) nach x Minuten beschreibt.
b) Wie viel Wasser befindet sich nach 20 Minuten, 50 Minuten und 90 Minuten im Pool?
c) Nach welcher Zeit (hh:mm:ss) ist der Pool vollständig gefüllt?
d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion w(x) in ein Koordinatensystem mit folgenden Eigenschaften:
   - x-Achse: Zeit x (in Minuten), 1cm = 10 Minuten,
   - y-Achse: Wassermenge w(x) (in Litern), 0,5 cm = 200 Liter.
e) Bestimmen Sie anhand des Graphen den Zeitpunkt, an dem der Pool halbvoll ist.

Aufgabe 3.9 (7Rfsfx)

Der beste Pizzalieferdienst der Stadt berechnet für die Lieferung eine Grundgebühr von 3 Euro und zusätzlich 2,50 Euro pro Kilometer für die Anfahrt.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung p(x) auf, die die Lieferkosten (in Euro) in Abhängigkeit von der Entfernung x (in Kilometern) beschreibt.
b) Wie viel kosten Lieferungen zu Kunden, die 2 Kilometer, 6 Kilometer und 12 Kilometer entfernt wohnen?
c) Ein Kunde hat noch 20 Euro in bar. Wie weit darf er maximal vom Restaurant entfernt wohnen, damit er eine 6,50 Euro teure Margherita und die Lieferkosten bezahlen kann?
d) Der Kunde möcht auch noch sehr gerne 2 Euro Trinkgeld geben. Wie weit darf er maximal vom Restaurant entfernt wohnen, damit sein Budget in Höhe von 20 Euro für die Bestellung ausreicht?

Aufgabe 3.10 (zaULqq)

Ein Lkw startet seine Fahrt mit einem vollen Tank von 800 Litern Diesel. Der Verbrauch des Fahrzeugs beträgt 30 Liter pro 100 Kilometer.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung d(x) auf, die die verbleibende Kraftstoffmenge (in Litern) nach x gefahrenen Kilometern beschreibt.
b) Wie viel Diesel befindet sich nach 200 Kilometern, 400 Kilometern und 600 Kilometern noch im Tank?
c) Wie viel Diesel verbleibt im Tank, wenn der Lastwagen insgesamt 500 Kilometer gefahren ist?
d) Nach welcher Fahrstrecke ist der Tank vollständig leer?
e) Wie viel würde eine Tankfüllung kosten, wenn noch 10 % des ursprünglichen Tankvolumens vorhanden sind und ein Liter Lkw-Diesel 1,56 Euro kostet?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



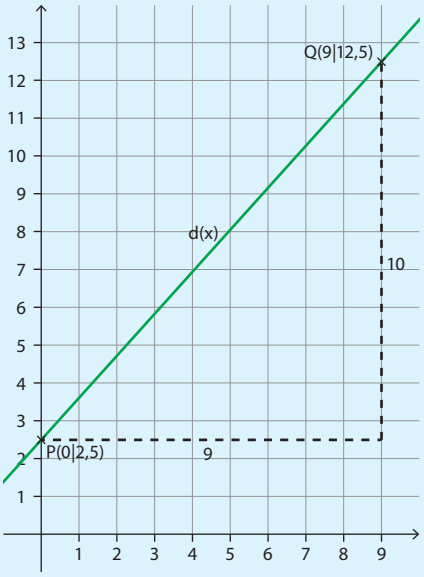
3.2 STEIGUNGSDREIECK

Situationsbeschreibung – Festival im Westfalenpark

Das Festival *Juicy Beats* findet im Dortmunder Westfalenpark statt, der 9 Kilometer von Ninas und Mikes Wohnung entfernt ist. Um bequem zum Festival zu gelangen, beschließen beide, ein Taxi zu nehmen. Letztes Jahr nutzten sie den Dienst von *Taxi Dortmund* und zahlten einen Endpreis von 12,50 Euro, wobei eine Grundgebühr von 2,50 Euro inbegriffen war. Dieses Jahr möchte Mike einen anderen Fahrdienst ausprobieren und hat sich für *Taxi Funk* entschieden. Dieser Anbieter nimmt nur 1 Euro Grundgebühr, berechnet dafür aber einen etwas höheren Kilometerpreis. Für die gleiche Strecke bezahlen sie diesmal 15,50 Euro.

Geradengleichung mit Hilfe eines Steigungsdreiecks bestimmen (vqMqVz)

1. *Skalierung des Koordinatensystems*:
   Um eine passende Skalierung für das Koordinatensystem zu wählen, muss die jeweilige Aufgabe betrachtet werden.
   In der obigen Situationsbeschreibung beträgt die Entfernung zum Festival **9 Kilometer** weshalb die **x-Achse** mindestens von **0 bis 9 Einheiten** dargestellt werden muss. Der maximale Preis lag im letzten Jahr bei **12,50 Euro**, sodass die **y-Achse** mindestens von **0 bis 12,5 Einheiten** reichen muss. Um unpraktische "krumme" Werte zu vermeiden, sollte eine Skalierung mit "ganzen Werten" gewählt werden. In diesem Beispiel bietet sich eine **x-Achse von 0 bis 9 Einheiten** und eine **y-Achse von 0 bis 13 Einheiten** an. Andere Skalierungen sind natürlich ebenfalls möglich, sofern sie die Werte aus der Aufgabe abdecken.



2. *Punkte und Gerade einzeichnen*:
   Aus den Werten der Aufgabe ergeben sich zwei Punkte, die für das Zeichnen der Geraden von *Taxi Dortmund* genutzt werden: Der **erste Punkt ist P(0|2,5)**. Dieser ergibt sich aus der Grundgebühr von **2,50 Euro**, die auch dann anfällt, wenn **0 Kilometer** gefahren werden. Der **zweite Punkt ist Q(9|12,5)**. Dieser ergibt sich aus der Strecke von **9 Kilometern** und einem Gesamtpreis von **12,50 Euro**. Verbinden Sie diese Punkte mit einer Geraden. Diese beschreibt den Zusammenhang zwischen der Strecke und den Kosten.
3. *Einzeichnen des Steigungsdreiecks*:
   Um die Steigung der Geraden zu verdeutlichen, zeichnen Sie ein Steigungsdreieck ein: Starten Sie am ersten Punkt P(0|2,5) und zeichnen Sie eine waagerechte Linie nach rechts bis zur x-Koordinate des zweiten Punktes. Diese Linie ist **9 Einheiten lang**.

Skalierung der Achsen
Eine Skalierung der Achsen muss nicht immer in 1er-Schritten erfolgen. Bei großen Zahlenwerten kann z. B. 1 cm oder ein Kästchen auch für 10, 100 oder sogar 1000 Einheiten stehen. Die Achsen dürfen dabei auch unterschiedlich skaliert sein – etwa die x-Achse in 1er-Schritten und die y-Achse in 100er-Schritten.
Wählen Sie die Skalierung so, dass das Koordinatensystem übersichtlich bleibt und auf das Papier passt.

Zeichnen der Geraden
Zeichnen Sie die Gerade durch die Punkte "hindurch" bis an die Grenzen Ihres Koordinatensystems. Also **nicht** nur vom einen Punkt zum anderen. Dann wäre es lediglich eine Strecke und keine Gerade!

Zeichnen Sie anschließend vom zweiten Punkt Q(9|12,5) eine senkrechte Linie nach unten, bis sie die y-Koordinate von P(9|2,5) erreicht. Diese Linie ist **10 Einheiten** lang.

4. *Berechnung der Steigung*:
   Die Steigung (m) kann anhand des Steigungsdreiecks berechnet werden, woraus sich die bereits bekannte Formel für die Bestimmung der Steigung ergibt:

$$m = \frac{\text{senkrechter Abstand der Punkte}}{\text{waagerechter Abstand der Punkte}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12{,}5 - 2{,}5}{9 - 0} = \frac{10}{9} \; (= 1{,}\overline{1} \approx 1{,}11)$$

   Die Gerade d(x) hat somit die Steigung $m = \frac{10}{9}$. Das bedeutet, dass die Fahrtkosten um 1,11 Euro pro gefahrenem Kilometer steigen. Der Wert m sollte wie in diesem Beispiel bei so kleinen Zahlen innerhalb des Bruchs nicht als Dezimalzahl geschrieben werden. Ausnahmen wären Brüche, die als Dezimalzahl maximal drei Nachkommastellen haben, wie $\frac{3}{4}$ oder $\frac{1}{8}$. Lediglich in einem Antwortsatz bei dem die Lösung mit einer Einheit (wie Euro oder cm) angegeben wird, sollte auf zwei Nachkommastellen gerundet werden.

5. *Aufstellen der Geradengleichung*:
   Die Steigung (m) wurde mit $\frac{10}{9}$ (Euro pro Kilometer) berechnet, und der y-Achsenabschnitt (b) entspricht der Grundgebühr in Höhe von 2,5 Euro. Somit lautet die zugehörige Geradengleichung der Form d(x) = mx + b wie folgt:

$$d(x) = \frac{10}{9}x + 2{,}5$$

Delta Δ:
Δ (Delta) ist der vierte Buchstabe des griechischen Alphabets und entspricht dem deutschen D. In der Mathematik steht Δ für den Begriff **Differenz**. Δy beschreibt die Differenz zwischen zwei y-Werten, in diesem Fall den y-Werten der beiden Punkte P und Q.

Dezimal vs. Bruch:
Brüche, die einer Dezimalzahl mit maximal drei Nachkommastellen entsprechen, können auch als solche angegeben werden ($\frac{1}{2} = 0{,}5$ oder $\frac{1}{8} = 0{,}125$). Ansonsten immer den Bruch notieren.

Aufgabe 3.11 (ZGC3zU)

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f(x) für *Taxi Funk* anhand der Daten aus der Situationsbeschreibung in ein passendes Koordinatensystem ein. Ermitteln Sie anschließend die Funktionsgleichung mithilfe des Steigungsdreiecks.

Aufgabe 3.12 (qReM8X)

Ein Busunternehmen berechnet die Fahrtkosten in Abhängigkeit von der Strecke. Bei 10 Kilometern kostet das Ticket 4 Euro, für eine Strecke von 30 Kilometern zahlt man 10 Euro. Zeichnen Sie ein Koordinatensystem und tragen Sie die beiden Punkte ein, die sich aus den angegebenen Daten ergeben. Verbinden Sie diese Punkte zu einer Geraden, zeichnen Sie das Steigungsdreieck ein und bestimmen Sie die Funktion b(x). Erklären Sie anschließend, was die Steigung m und der y-Achsenabschnitt b in diesem Zusammenhang bedeuten.

Aufgabe 3.13 (rXPBpN)

Auf der Internetseite der *taxi dortmund eG* finden Sie die rechts angegebenen Tarifinformationen[5].

Kosten für die Fahrt zum Hbf. Dortmund:
Mike und Nina fahren mit dem Taxi an einem Samstag um 23:30 Uhr vom Dortmunder Hbf zum Phoenix-See. Die zurückgelegte Strecke beträgt 7 km.

a) Stellen Sie die Situation grafisch in einem geeigneten Koordinatensystem dar (bestimmen Sie vorher die Gesamtkosten, um die Skalierung zu wählen!).

b) Überlegen Sie, wie Sie einen durchschnittlichen Preis pro Kilometer für die gesamte Fahrt bestimmen können.

montags - samstags 6 uhr - 22 uhr

Grundpreis:	**4,50 €**
erster gefahrener Kilometer:	**2,50 €**
jeder weitere Kilometer (innerhalb Do.):	**1,95 €**
jeder Kilometer außerhalb Do.:	**2,20 €**
Wartezeitgebühr je Stunde:	**33,00 €**

montags - samstags 22 uhr - 6 uhr / sonn- und feiertags

Grundpreis:	**5,00 €**
erster gefahrener Kilometer:	**2,65 €**
jeder weitere Kilometer (innerhalb Do.):	**2,10 €**
jeder Kilometer außerhalb Do.:	**2,20 €**
Wartezeitgebühr je Stunde:	**38,00 €**

tarife für zusatzleistungen

Kombizuschlag:	**6,00 €**
Großraumzuschlag:	**6,00 €**
Kofferservice (Wohnung > Bahnsteig):	**kostenlos**
Starthilfe:	**20,00 €**
Besorgungs- u. Kurierfahrten:	**3,00 €**

Hinweis
Hier ergibt sich aufgrund der in der Tabelle angegebenen Teilpreise keine durchgehend gerade Linie!

Hinweis
Machen Sie aus der "gestückelten" Linie aus a) eine lineare Funktion (Ursprungsgerade) um eine Steigung zu bestimmen.

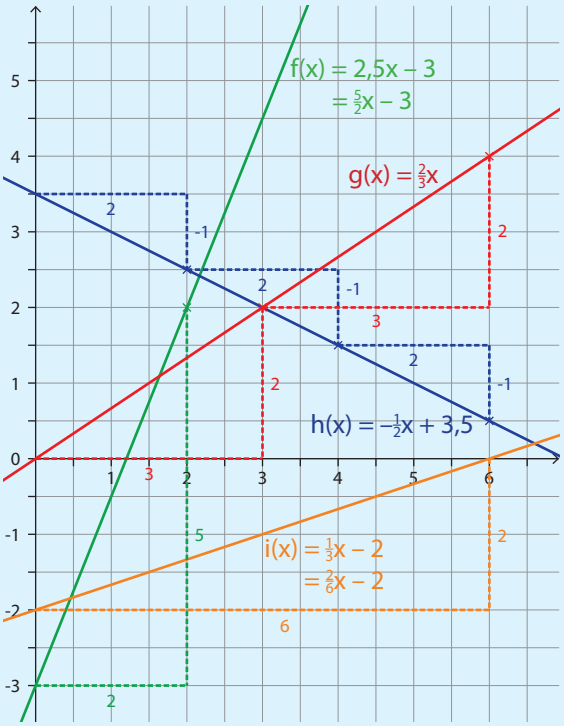
5 vgl. https://www.taxi-dortmund.de/html/tarife.php, abgerufen am 23.11.2024

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Gerade mit Hilfe eines Steigungsdreiecks zeichnen (XTZty4)

Ist die Geradengleichung gegeben, lässt sich die Funktion mit Hilfe eines Steigungsdreiecks ganz einfach zeichnen.

1. Ist die Steigung als Dezimalzahl angegeben, wandeln Sie diese in einen **Bruch** um (z. B. $m = -2 = -\frac{2}{1}$ oder $m = 1{,}75 = \frac{7}{4}$), siehe f(x).
2. Gehen Sie vom y-Achsenabschnitt aus den Wert des Nenners immer nach **rechts**.
3. Bewegen Sie sich um den Wert des Zählers nach **oben** (bei positiver Steigung) oder nach **unten** (bei negativer Steigung).
4. Bei sehr kleinen Werten von m wird empfohlen, die Schritte 2 und 3 gegebenenfalls mehrfach zu wiederholen oder den Bruch zu **erweitern** (z. B. $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ oder $\frac{1}{2} = \frac{10}{20}$) um eine höhere Genauigkeit beim Zeichnen zu erzielen, siehe i(x).
5. Die Gerade wird nun durch den y-Achsenabschnitt und den/die markierten Punkt(e) **gezeichnet**.



Aufgabe 3.14 (v71gFX)

Zeichnen Sie die folgenden Funktionsgleichungen in je ein geeignetes Koordinatensystem:

a) $f(x) = 3x - 2$
b) $f(x) = -2x + 4{,}5$
c) $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$
d) $f(x) = -\frac{4}{5}x + 3$
e) $f(x) = x - 4$
f) $f(x) = -\frac{5}{2}x - 1$
g) $f(x) = -4x + 8$
h) $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{2}$
i) $f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

Aufgabe 3.15 (Y3erEw)

Eine kleine Schnecke hat sich auf Mikes Terrasse verirrt. Sie bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2,5 Metern pro Stunde (entspricht $\frac{1}{24}$ Metern pro Minute) vorwärts. Die Terrasse, die die Schnecke überqueren möchte, hat eine Breite von 3 Metern.

a) Stellen Sie eine Funktion s(x) auf, welche die noch zu überquerende Strecke y (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit x (in Minuten) beschreibt. Beachten Sie, dass die Schnecke anfangs 3 Meter von ihrem Ziel entfernt ist.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion s(x) in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 60$ mit 1 cm = 10 min; y-Achse: $0 \le y \le 4$ mit 2 cm = 1 m)
c) Bestimmen Sie anhand des Graphen, wie viele Minuten die Schnecke benötigt, um die Terrasse komplett zu überqueren.
d) Prüfen Sie den in Teilaufgabe c) bestimmten Wert rechnerisch.

Aufgabe 3.16 (zk9NwR)

Ninas altes Auto verbrauchte 8 Liter auf 100 km (8 l/100 km = 0,08 l/km), wobei der Tank ein Fassungsvermögen von 50 Litern hatte. Ihr neues Auto hingegen benötigt nur 6 Liter auf 100 km, bei einem Tankvolumen von 40 Litern.

a) Geben Sie zwei Funktionen $t_a(x)$ (für das alte Auto) und $t_n(x)$ (für das neue Auto) an, die den jeweiligen Tankinhalt (nicht den Verbrauch!) in Abhängigkeit von der gefahrenen Strecke x (in km) beschreiben.
b) Zeichnen Sie beide Funktionen in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 1000$ mit 1 cm = 100 km; y-Achse: $0 \le y \le 60$ mit 1 cm = 5 l)
c) Lesen Sie die maximale Reichweite der Fahrzeuge aus dem Koordinatensystem ab.

Aufgabe 3.17 (yfMGwt)

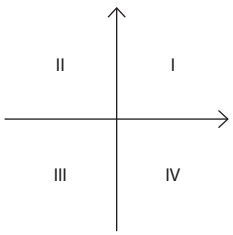
Mike installiert neben seinem Gewächshaus ein neues Regenfass mit einem Fassungsvermögen von 30 Litern.

a) Übersetzen Sie die folgenden Sachverhalte in je eine lineare Funktion $f(x) = mx + b$.
   f(x): Es regnet 0,25 l/h, das Fass ist noch leer.
   g(x): Mike lässt 2 l/h ab, das Fass enthält 10 Liter.
   h(x): Es regnet 2 l/h, das Fass enthält bereits 2 Liter.
   i(x): Mike lässt 0,5 l/h ab, das Fass enthält 3 Liter.

b) Zeichnen und beschriften Sie alle Funktionen in **ein** Koordinatensystem. Auch wenn es im Sachzusammenhang nicht sinnvoll erscheint, zeichnen Sie die Geraden in allen vier Quadranten des Koordinatensystems.
   (Koordinatensystem: x-Achse: $-10 \le x \le 10$ mit 0,5 cm = 1 h; y-Achse: $-4 \le y \le 10$ mit 0,5 cm = 1 l)

c) Ermitteln Sie rechnerisch für die Funktionen aus a), je nach Kontext, wann das Fass voll bzw. wann es komplett leer ist.

Quadranten eines Koordinatensystems:



Aufgabe 3.18 (93p6vS)

Ein Fahrstuhl in einem Hochhaus fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2,5 Metern pro Sekunde nach oben. Der Fahrstuhl startet auf einer Höhe von 10 Metern über dem Boden und die oberste Etage befindet sich in einer Höhe von 150 Metern.

a) Stellen Sie eine Funktion h(x) auf, die die Höhe (in Metern) des Fahrstuhls in Abhängigkeit von der Zeit x (in Sekunden) beschreibt.

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h(x) in ein Koordinatensystem.
   (Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 60$ mit 1 cm = 10 s; y-Achse: $0 \le y \le 150$ mit 0,5 cm = 10 m)

c) Bestimmen Sie aus dem Graphen, wie lange der Fahrstuhl benötigt, um die oberste Etage des Gebäudes zu erreichen.

d) Prüfen Sie den in Teilaufgabe c) bestimmten Wert rechnerisch.

Aufgabe 3.19 (GunB9D)

Ein Wissenschaftler untersucht das Schmelzen von Eiswürfeln unter unterschiedlichen Bedingungen. Ein Eiswürfel der ersten Probe schmilzt mit einer konstanten Rate von 1,5 Gramm pro Minute, während der Eiswürfel der zweiten Probe mit 2,5 Gramm pro Minute schmilzt. Beide Eiswürfel haben anfangs ein Gewicht von 60 Gramm.

a) Erstellen Sie die Funktionen $m_1(x)$ und $m_2(x)$, die das verbleibende Gewicht der Eiswürfel (in Gramm) in Abhängigkeit von der Zeit x (in Minuten) beschreiben.

b) Nach wie vielen Minuten sind die beiden Eiswürfel vollständig geschmolzen? Geben Sie die Ergebnisse für beide Proben sowohl grafisch als auch rechnerisch an.

c) Berechnen Sie, wie viel Gramm Eis nach 10 Minuten bei beiden Proben jeweils übrig sind.

Aufgabe 3.20 (THyEbS)

Ein Fütterungsautomat verteilt alle 12 Minuten 0,4 Kilogramm Futter in ein Gehege. Der Automat wurde vor der ersten Fütterung mit insgesamt 23 Kilogramm Futter befüllt.

a) Stellen Sie eine Funktion f(x) auf, die die verbleibende Futtermenge (in kg) im Automaten in Abhängigkeit von der Zeit x (in Minuten) beschreibt und zeichnen Sie diese.
   (Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 800$ mit 1 cm = 100 min; y-Achse: $0 \le y \le 28$ mit 1 cm = 4 kg)

b) Wenn der Futterautomat nur noch zu 20 % gefüllt ist, bekommt der Landwirt eine automatische Nachricht auf sein Handy. Nach welcher Zeit (hh:mm:ss) ist das der Fall.

c) Wie lange hat der Landwirt nach der Nachricht noch Zeit, bis der Automat leer ist?

Aufgabe 3.21 (qQWbsK)

Ein Kaninchen frisst täglich 0,3 Kilogramm Futter. Der Vorrat umfasst anfangs 5 Kilogramm.

a) Stellen Sie eine Funktion v(x) auf, die den verbleibenden Futtervorrat (in Kilogramm) in Abhängigkeit von der Zeit x (in Tagen) beschreibt und zeichnen Sie diese.

b) Wie lange könnten die Besitzer demnach in den Urlaub fahren, ohne das es verhungert?

WICHTIG
Natürlich sollte man ein Tier nie über einen so langen Zeitraum alleine lassen!

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



3.3 GERADENGLEICHUNG MIT ZWEI PUNKTEN BESTIMMEN

Situationsbeschreibung – neue Fische im Aquarium

Nina hat von Mike zum Geburtstag neue Fische für das großes Aquarium geschenkt bekommen. Bevor sie die neuen Fische einsetzt, erneuert sie das Wasser im Aquarium. Dazu lässt sie mithilfe eines Schlauches einen Großteil des Wassers ablaufen. Um den Vorgang besser überwachen zu können, notiert sie zu bestimmten Zeitpunkten die aktuelle Füllhöhe des Wassers. Nach zwei Minuten beträgt die Füllhöhe 51,6 cm. Nach insgesamt fünf Minuten ist das Wasser noch 39 cm hoch. Mithilfe dieser Werte möchte Nina berechnen, wann das Aquarium komplett leer ist, damit sie den Wasserabfluss rechtzeitig stoppen kann.

Geradengleichung durch zwei Punkten bestimmen (kyVw56)

Um die Gleichung einer Geraden in der Form $f(x) = mx + b$ zu bestimmen, müssen die Steigung m und der y-Achsenabschnitt b berechnet werden. Die Berechnung der Steigung sollte bereits aus Kapitel 3.2 bekannt sein. Doch wie wird b ermittelt, wenn dieser Wert nicht direkt gegeben ist? Die Vorgehensweise sieht wie folgt aus:

1. Es werden zwei Punkte auf der Geraden benötigt. Diese können vorgegeben sein, aus einer Textaufgabe hervorgehen oder aus einem Koordinatensystem abgelesen werden.
2. Die Steigung wird mit der Formel $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bestimmt.
3. m sowie die Koordinaten einer der beiden Punkte (die Wahl ist beliebig) werden in die Geradengleichung $f(x) = mx + b$ eingesetzt.
4. Der y-Achsenabschnitt b wird bestimmt, indem die Gleichung nach b umgeformt wird.
5. Um die Funktionsgleichung zu erhalten, wird m und b in $f(x) = mx + b$ eingesetzt.

Beispiel

1.	Folgende Punkte sind gegeben:	A(6|–9), B(–1|5)	A(2|4), B(–13|–5)
2.	Bestimmung der Steigung:	$m = \frac{5-(-9)}{-1-6} = \frac{14}{-7} = -2$	$m = \frac{-5-4}{-13-2} = \frac{-9}{-15} = \frac{3}{5}$
3.	A/B und m einsetzen in $f(x) = mx + b$:	$5 = -2 \cdot (-1) + b$	$4 = \frac{3}{5} \cdot 2 + b$
4.	Auf b umstellen:	$5 = 2 + b \quad \vert -2$	$4 = \frac{6}{5} + b \quad \vert -\frac{6}{5}$
		$b = 3$	$b = \frac{14}{5}$
5.	Funktionsgleichung aufstellen:	$f(x) = -2x + 3$	$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$

Ⓑ

Sollten Sie **Hilfestellung beim Bruchrechnen** benötigen, so schauen Sie sich das **Kapitel 1.2 "Bruchrechnen"** in diesem Buch nochmals an.

Aufgabe 3.22 (jXmzTA)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die durch das Punktepaar A und B verläuft.

a) A(2|5), B(5|14) c) A(0|6), B(4|14) e) A(1|10), B(4|22) g) A(–3|–5), B(2|15)
b) A(–3|–8), B(1|4) d) A(–2|7), B(3|–3) f) A(–4|12), B(2|–6) h) A(–5|–9), B(1|9)

Aufgabe 3.23 (LDWWec)

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die durch das Punktepaar A und B verläuft.

a) A(2|3), B(8|5)
b) A(−3|2), B(3|−1)
c) A(−4|5), B(0|7)
d) A(−6|−4), B(0|−1)
e) A(1|2), B(7|5)
f) A(−8|6), B(4|−3)
g) A(−5|−7), B(5|3)
h) A(−7|4), B(2|−2)

Aufgabe 3.24 (NKvVTf)

Schauen Sie sich die Situationsbeschreibung auf der vorherigen Seite erneut an.

a) Verwenden Sie die vorgegebenen Werte, um zwei Punkte im Koordinatensystem festzulegen, und bestimmen Sie die Funktionsgleichung w(x), die den Wasserstand (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit x (in Minuten) beschreibt.
b) Zeichnen Sie die ermittelte Funktion in ein Koordinatensystem ein.
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 15$, mit 0,5 cm = 1 min; y-Achse: $0 \le y \le 70$, mit 1 cm = 10 cm Füllhöhe)
c) Beantworten Sie anhand des Koordinatensystems folgende Fragen:
- Wie hoch war der Wasserstand im Aquarium zu Beginn?
- Wie viele Minuten benötigt es, bis der Wasserstand auf genau 20 cm abgesunken ist?

Aufgabe 3.25 (ePsebZ)



Nina sammelt Regenwasser, um ihre Blumen im Garten zu gießen. Dafür hat sie eine Klappe am Fallrohr installiert. Wenn es regnet, kann Nina die Klappe öffnen, damit das Regenwasser in das Fass fließt. Sobald das Fass voll ist, kann sie die Klappe wieder schließen, sodass das überschüssige Wasser durch das Fallrohr abfließt.
Am Morgen beginnt es zu regnen, und Nina öffnet die Klappe, um das Wasser ins Fass zu leiten. Nach 2 Stunden überprüft sie den Wasserstand und stellt fest, dass sich 25 cm Wasser im Fass befinden. Nach weiteren 3 Stunden misst sie erneut und notiert eine Füllhöhe von 40 cm.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung w(x), die den Wasserstand (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit x (in Stunden) beschreibt.
b) Mit welcher Geschwindigkeit (in cm pro Stunde) füllt sich das Fass?
c) Wie hoch war der Wasserstand im Fass, bevor es zu regnen begann?
d) Nach wie vielen Stunden ist das Fass vollständig gefüllt, wenn es eine Höhe von 70 cm hat, sodass Nina die Klappe schließen muss?

Tipp zu a)
Achten Sie genau auf die Formulierung der Aufgabe und überlegen Sie dann, wie die Wertepaare lauten müssen, um die Steigung zu berechnen.

Aufgabe 3.26 (mRAWvL)



Einige Tage nach dem Regen möchte Nina ihren Rasen mit dem gesammelten Regenwasser bewässern. Dazu schließt sie eine Wasserpumpe und einen Rasensprenger an ihr Regenfass an. Die Pumpe lässt das Wasser durch den Sprenger fließen und verringert dabei den Wasserstand im Fass. Innerhalb von 1,5 Stunden sinkt der Wasserstand von 59 cm auf 39,5 cm.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung h(x) auf, die den abnehmenden Wasserstand im Regenfass in cm in Abhängigkeit von der Zeit x in Stunden beschreibt.
b) Lesen Sie aus der Funktionsgleichung ab, wie viel Zentimeter Regenwasser die Pumpe pro Stunde aus der Tonne abpumpt.
c) Berechnen Sie, wie viel Liter Wasser die Sprühvorrichtung pro Stunde abgibt, wenn das Regenfass einen zylindrischen Querschnitt mit einem Durchmesser von 80 cm hat.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



3.4 SCHNITTPUNKTE MIT DEN KOORDINATENACHSEN

Situationsbeschreibung – Stromausfall
Stromausfall am Abend! Die ganze Wohnung ist in Dunkelheit gehüllt, doch Mike und Nina haben zum Glück noch ein paar Kerzen im Haus, die sie schnell anzünden. Die beiden beobachten, wie eine der Kerzen langsam abbrennt. Als sie die Länge der Kerze nach einer Stunde zum ersten Mal messen, stellen sie fest, dass sie noch 14 cm hoch ist. Nach weiteren drei Stunden messen sie erneut und bemerken, dass die Kerze auf eine Höhe von nur noch 9,5 cm geschrumpft ist.

Bestimmung der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (yfN38y)
Die Schnittpunkte einer linearen Funktion mit den Koordinatenachsen liefern je nach Kontext wichtige Informationen. Hier wird gezeigt, wie diese Punkte berechnet werden.
Gegeben sei die Funktion: $f(x) = -4x + 5$

Der **Schnittpunkt mit der y-Achse** entspricht dem sogenannten **y-Achsenabschnitt**. Dieser kann direkt aus der Funktionsgleichung abgelesen werden. Der Wert der Funktion f(x) an der Stelle x = 0 gibt die y-Koordinate des Schnittpunkts an. Zur vollständigen Darstellung soll hier auch beispielhaft der Rechenweg angegeben werden:

$$y = f(0) = -4 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$$

Der y-Achsenabschnitt liegt bei $y_0 = 5$.
Die Formulierung als Schnittpunkt mit der y-Achse $S_y(0|5)$ ist eher unüblich.

Der **Schnittpunkt mit der x-Achse** ist der Punkt, an dem die Funktionsgleichung den Funktionswert f(x) = 0 erreicht. Dieser Punkt wird als **Nullstelle** der Funktion bezeichnet. Um diese zu berechnen, wird f(x) = 0 gesetzt und die entstehende Gleichung nach x umgestellt:

$$\begin{aligned} f(x) &= -4x + 5 && | \; f(x) = 0 \\ 0 &= -4x + 5 && | \; +4x \\ 4x &= 5 && | \; :4 \\ x &= \frac{5}{4} = 1{,}25 \end{aligned}$$

Die Nullstelle liegt bei $x_0 = 1{,}25$.
Die Formulierung als Schnittpunkt mit der x-Achse bei $S_x(1{,}25|0)$ ist eher unüblich.

Merke
Eine *Stelle*, z. B. $x_0 = 2$, beschreibt lediglich eine x-Koordinate.
Ein *Punkt*, z. B. P(3|4), beschreibt immer eine x- und eine y-Koordinate.

Aufgabe 3.27 (Zvd4HK)
Bestimmen Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 3x + 6$
b) $f(x) = -2x + 8$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
d) $f(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$
e) $f(x) = 4x - 1$
f) $f(x) = -x + 5$
g) $f(x) = 2x - \frac{9}{2}$
h) $f(x) = -3x + 10$

Tipp zu a)
Achten Sie genau auf die Formulierung der Situation und überlegen Sie dann, wie die Wertepaare lauten müssen.

Aufgabe 3.28 (vs6jJt)

Lesen Sie die Situationsbeschreibung auf der vorherigen Seite nochmals sorgfältig durch.

a) Formulieren Sie eine Funktionsgleichung, die die Länge der Kerze l(t) in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.
b) Wie lang war die Kerze zu Beginn, bevor sie angezündet wurde?
c) Nach welcher Zeit ist die Kerze vollständig abgebrannt?

Tipp
Wandeln Sie bei der Bestimmung der Punkte die Uhrzeiten in Dezimalzahlen um. Setzen Sie dabei den Startpunkt um 16:30 Uhr mit **x = 0** fest, sodass x die Brenndauer angibt.

Aufgabe 3.29 (LDxbaG)

Eine neue Kerze wird um 16:30 Uhr angezündet. Zwischen 18:30 Uhr und 21:00 Uhr reduziert sich die Länge der Kerze von 20 cm auf 17 cm.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung l(t), die die Abhängigkeit der Kerzenlänge (in cm) von der Brennzeit t (in Stunden) beschreibt.
b) Wie lang war die Kerze ursprünglich, bevor sie angezündet wurde? Wie lang ist die Kerze nach einer weiteren Brenndauer von 2 Stunden (um 23:00 Uhr)?
c) Nach wie vielen Stunden beträgt die Länge der Kerze noch 5 cm?
d) Nach welcher Zeit ist die Kerze vollständig abgebrannt?

YouTube

Aufgabe 3.30 (7aaPv5)



Nina hat sich aufgrund ihrer Begeisterung für Nachhaltigkeit ein Elektroauto gekauft. Als erfolgreiche Grafikdesignerin kann sie sich den neuen *Tesla Model 3* leisten. Das Auto zeigt auf dem Display an, wie viel Prozent der Batteriekapazität noch verfügbar ist.

a) Nina startet mit einer vollständig aufgeladenen Batterie (100 %). Nach 60 km beträgt der Ladezustand noch 82 %, und nach 200 km zeigt das Display nur noch 48 % an. Berechnen Sie die Reichweite des *Tesla Model 3* basierend auf diesem Energieverbrauch. (Verwenden Sie die Änderungsrate als vollständig gekürzten Bruch!)
b) Beim nächsten Ausflug hat Nina vergessen, ihr Auto voll aufzuladen. Sie startet mit einer unbekannten Kapazität und stellt nach 30 km fest, dass der Ladezustand bei 40 % liegt. Nach 80 km beträgt die Kapazität noch 25 %.
Wie hoch war die Kapazität der Batterie zu Beginn der Fahrt?
Kann Nina eine Strecke von 150 km zurücklegen, ohne das Auto zu laden?
c) Diskutieren Sie mögliche Gründe, warum der Stromverbrauch im zweiten Szenario (b) höher ist als im ersten Szenario (a). Welche Maßnahmen könnte Nina ergreifen, um den Stromverbrauch zu senken?

Aufgabe 3.31 (3Ab6y6)

Während des Landeanflugs eines Verkehrsflugzeugs werden die Flughöhen zu verschiedenen Zeitpunkten notiert. Nach 4 Minuten beträgt die Höhe des Flugzeugs noch 3500 Meter. Nach weiteren 6 Minuten, also insgesamt 10 Minuten nach Beginn des Landeanflugs, ist die Höhe auf 1200 Meter gesunken.

a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung h(t), die die Flughöhe (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) beschreibt.
b) Wie hoch war das Flugzeug zu Beginn der Messung, also direkt vor dem Landeanflug?
c) Nach wie vielen Minuten wird das Flugzeug voraussichtlich sicher den Boden erreichen?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



3.5 LAGEBEZIEHUNG VON GERADEN

Situationsbeschreibung – Campingurlaub

Es ist Zeit für den Sommerurlaub. Nina und Mike lieben die Natur und fahren wieder zum Camping auf einen Campingplatz am Gardasee. Im Nachhinein betrachtet haben sie im letzten Jahr zu viel für die Standmiete bezahlt, weswegen sie in diesem Jahr die Preise besser vergleichen wollen. Für den Campingplatz *Garden Tourist* finden die beiden folgende Preise für die Saison: 120,00 Euro für den Stellplatz und 7,50 Euro pro Erwachsenem pro Tag.
Der Campingplatz *Fontanelle* berechnet keine Stellplatzgebühr, verlangt aber dafür eine Tagespauschale in Höhe von 17,50 Euro pro Person.

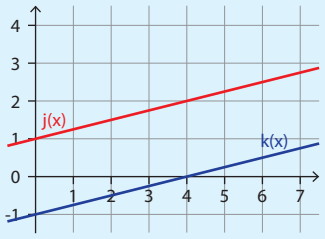
Mögliche Lage zweier Geraden zueinander (P8PsWA)

Im zweidimensionalen Raum gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, wie zwei Geraden zueinander stehen können: Sie sind **identisch**, **parallel,** oder sie **schneiden** sich.

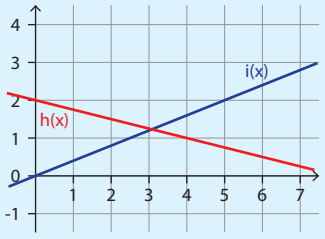
Zwei Geraden sind **identisch**, wenn sowohl ihre Steigung als auch ihr y-Achsenabschnitt übereinstimmen. In diesem Fall liegen beide Geraden exakt aufeinander.
$f(x) = \frac{4}{3}x - 1$ und $g(x) = \frac{4}{3}x - 1$
Mathematische Schreibweise: $g \equiv h: m_g = m_h \wedge b_g = b_h$



Zwei Geraden sind **parallel**, wenn ihre Steigungen gleich, aber ihre y-Achsenabschnitte unterschiedlich sind. In diesem Fall haben die Geraden keinen Schnittpunkt.
$j(x) = 0{,}5x + 1$ und $k(x) = 0{,}5x - 1$
Mathematische Schreibweise: $g \parallel h: m_g = m_h \wedge b_g \neq b_h$



Wenn die Steigungen zweier Geraden unterschiedlich sind, **schneiden** sie sich immer an einem Punkt. Dabei spielt es keine Rolle, ob die y-Achsenabschnitte gleich oder verschieden sind.
$h(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ und $i(x) = \frac{2}{5}x$
Mathematische Schreibweise: $g \cap h: m_g \neq m_h$



Mathematische Symbole:
≡ : identisch
|| : parallel
∩ : Schnittmenge/-punkt
⊥ : senkrecht

senkrechte Geraden
Zwei Geraden sind senkrecht (⊥) zueinander, sofern die Steigungen negative Kehrwerte voneinander sind:
$g(x) = 4x + 3$; $h(x) = -\frac{1}{4}x + 3$

mathematisch ausgedrückt:
$g \perp h: m_g \cdot m_h = -1$

Aufgabe 3.32 (R1L17z)

Nennen Sie begründet, aber ohne zu rechnen die Lagebeziehung der Funktionspaare.

a) $j(x) = 0{,}5x + 2$; $k(x) = \frac{1}{2}x - 3$
b) $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = -x + 1$
c) $h(x) = -\frac{3}{4}x + 1$; $i(x) = -\frac{6}{8}x + \frac{2}{2}$
d) $p(x) = 0{,}3x + 4$; $q(x) = 0{,}3x - 4$

ⓘ **Berechnung des Schnittpunktes zweier Geraden (PSv7ux)**

Wenn sich zwei Geraden an genau einem Punkt schneiden, wird dieser als Schnittpunkt bezeichnet. Um diesen zu berechnen, setzt man die Funktionsgleichungen der beiden Geraden gleich, da in genau diesem Punkt beide Funktionen den gleichen x- und y-Wert haben.
Seien die folgenden Funktionen gegeben: $f(x) = -x + 5$ und $g(x) = 0{,}5x - 1$

Merke
Eine *Stelle*, z. B. $x_0 = 2$, beschreibt lediglich eine x-Koordinate.
Ein *Punkt*, z. B. P(3|4), beschreibt immer eine x- und eine y-Koordinate.

Um zunächst die **Schnittstelle** zu bestimmen, werden die beiden Funktionen gleichgesetzt, also $f(x) = g(x)$ und stellen auf x um:

$$\begin{aligned} -x + 5 &= 0{,}5x - 1 && \mid -0{,}5x \\ -1{,}5x + 5 &= -1 && \mid -5 \\ -1{,}5x &= -6 && \mid :(-1{,}5) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Um den zugehörigen **Funktionswert** (y-Wert) zu bestimmen, wird die Schnittstelle $x = 4$ in eine der beiden Funktionen eingesetzt. Dabei ist es egal, in welche der beiden Funktionen der Wert eingesetzt wird. Am besten ist es, mit der Funktion zu rechnen, die am einfachsten aussieht (z. B. weniger Minuszeichen oder nur ganze Zahlen hat):

$f(4) = -4 + 5 = 1$

Zur Sicherheit kann auch noch eine Probe mit der zweiten Funktion durchgeführt werden:

$g(4) = 0{,}5 \cdot 4 - 1 = 2 - 1 = 1$

Somit lautet der Schnittpunkt S(4|1).

Aufgabe 3.33 (dfJgBr)

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der folgenden Funktionspaare.

a) $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = -x + 5$
b) $f(x) = -3x + 7$; $g(x) = x - 1$
c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$; $g(x) = -\frac{3}{2}x + 2$
d) $f(x) = 5x - 8$; $g(x) = -2x + 10$
e) $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$; $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$
f) $f(x) = -x + 6$; $g(x) = 2x - 4$

Aufgabe 3.34 (NMD41L)

Lesen Sie die Situationsbeschreibung auf der vorherigen Seite nochmals sorgfältig durch.

a) Erstellen Sie für die beiden Campingplätze *Garden Tourist* g(x) und *Fontanelle* f(x) je eine lineare Funktion, die die Kosten für zwei Personen beschreibt.
b) Zeichnen Sie beide Funktionen in EIN gemeinsames Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse von $0 \le x \le 16$, mit 1 cm = 2 Tage; y-Achse: $0 \le y \le 400$, mit 1 cm = 50 Euro)
c) Bestimmen Sie anhand der Graphen, ab wie vielen Tagen sich Nina und Mike für den Campingplatz *Garden Tourist* entscheiden sollten. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
d) Bestätigen Sie den in c) ermittelten Wert nun algebraisch und geben Sie weiterhin an, welche Kosten für einen Aufenthalt für diese Anzahl an Tagen bei den Campingplätzen entstehen würden.

Merke
"algebraisch" ist lediglich ein mathematischer Fachbegriff für "rechnerisch"

Aufgabe 3.35 (fnY77u)

Die Unternehmen *QuickShip* und *FastCargo* bieten Lieferdienste mit Frachtschiffen an. Die Kosten y (in Hundert Euro) hängen von der Liefermenge x (in Tonnen) ab.
QuickShip hat eine Preisfunktion: $f(x) = 5x + 20$. Bei *FastCargo* liegen folgende Werte vor:

– Bei x = 5 betragen die Kosten 5000 Euro
– Bei x = 10 betragen die Kosten 7000 Euro

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für *FastCargo*.
b) Berechnen Sie die Liefermenge, bei der die Kosten für beide Dienstleister gleich sind.
c) Für welche Liefermengen x ist *QuickShip* günstiger als *FastCargo*?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.36 (Rijryh)

Der Waldkindergarten *Adventure* startet mit 100 Kindern und wächst jährlich um 10 Kinder. Der Stadtkindergarten *Sunshine* hat anfangs 200 Kinder, verliert aber jährlich 20 Kinder. Wann (YY:MM) wird der Waldkindergarten mehr Kinder als der Stadtkindergarten haben?

Aufgabe 3.37 (Kda54S)

Die Stadtwerke *Nordstrom* berechnen für Trinkwasser 1,95 Euro, für Abwasser 2,50 Euro pro verbrauchtem Kubikmeter und eine monatliche Grundgebühr von 12 Euro. Die Stadtwerke *Südstrom* verlangen einen mehr als dreifachen Preis von 6,10 Euro für Trinkwasser und 2,80 Euro für Abwasser pro Kubikmeter, berechnen jedoch keine Grundgebühr.

a) Stellen Sie für die Stadtwerke *Nordstrom* und *Südstrom* jeweils eine Funktion auf, mit der die monatlichen Gesamtkosten in Abhängigkeit von der verbrauchten Wassermenge x in Kubikmetern berechnet werden können.
b) Ab welchem monatlichen Wasserverbrauch sind die Stadtwerke *Südstrom* günstiger als die Stadtwerke Nordstrom?
c) Wie viele Kubikmeter Wasser können Sie bei *Nordstrom* für 30 Euro/Monat beziehen?
d) Recherchieren Sie den durchschnittlichen Wasserverbrauch pro Person und Tag in Deutschland und rechnen Sie diesen in den Verbrauch in Kubikmetern pro Monat um. Wie hoch wären die monatlichen Kosten für diesen Verbrauch bei den beiden Stadtwerken?
e) Um wie viel Prozent liegt der Monatspreis von *Nordstrom* höher als von *Südstrom*?

Aufgabe 3.38 (U2rVeA)

Nina und Mike überlegen, eine Reise nach Bangkok, Thailand, zu unternehmen, und vergleichen Angebote für Flüge und Unterkünfte, um die Kosten zu berechnen. Die Anzahl der möglichen Urlaubstage hängt davon ab, wie viele Tage Urlaub Mike bekommt.



Nina findet bei momondo.de einen Direktflug nach Bangkok und zurück nach Frankfurt mit *Thai-Airways* für 729 Euro pro Person. Das Hotel *Rembrandt* im Ortsteil Sukhumvit bietet ein Frühbucherangebot zum Preis von 63,20 Euro pro Nacht und Person.

Mike hat bei fluege.de einen Hin- und Rückflug mit *Etihad* und einem Zwischenstopp in Abu Dhabi für 485 Euro gefunden. Das Hotel *JW Marriott*, ebenfalls im Ortsteil Sukhumvit, verlangt 104,50 Euro pro Person und Nacht.

a) Stellen Sie zwei Funktionsgleichungen für den Preis pro Person in Abhängigkeit der Anzahl der Nächte x auf und berechnen Sie, ab wie vielen Nächten Ninas Angebot günstiger ist als das von Mike.
b) Entscheiden Sie, welches Angebot die beiden wählen sollten, wenn Mike nur fünf Tage Urlaub bekommt (vier Übernachtungen).
c) Prüfen Sie, ob sich die Wahl ändert, falls Mike zehn Tage Urlaub bekommt (neun Übernachtungen). Begründen Sie Ihre Entscheidung anhand der Gesamtkosten.
d) Wie viel kosteten zehn Tage Urlaub (neun Nächte) für beide zusammen, wenn sie Ninas bzw. Mikes Angebot wählen?
e) Überlegen Sie, wie sich beide Angebote kombinieren lassen, um möglichst günstig zu verreisen. Geben Sie eine Funktion für den Preis pro Person an. Was kostet nun ein Urlaub für neun Nächte für beide zusammen?

Aufgabe 3.39 (3C9A4G)

Ein Start-up möchte die Verkaufszahlen für ein neues Produkt in zwei Regionen analysieren. Die Verkaufszahlen hängen von der Zeit x (in Monaten) ab. Die folgende Funktion beschreibt die Entwicklung in Region A: $a(x) = 300x + 1500$

In Region B gibt es keine Funktion, aber die Verkaufszahlen für zwei Zeitpunkte:

Nach 3 Monaten sind es 2900 Einheiten und nach 5 Monaten sind es 3400 Einheiten

a) Bestimmen Sie die Gleichung, welche die Verkaufszahlen für Region B beschreibt.
b) Berechnen Sie, wann die Verkaufszahlen in beiden Regionen gleich hoch sind.
c) Zeichnen Sie die Geraden für Region A und Region B in einem Koordinatensystem und markieren Sie den Schnittpunkt.
d) Für welche Region ist eine stärkere Wachstumsstrategie sinnvoll? Begründen Sie anhand der Steigungen.

Aufgabe 3.40 (uuRVUE)

Der Energiekonzern *ElektraPlus* bietet seit Kurzem einen neuen Stromtarif an, der speziell für Familienhaushalte mit hohem Verbrauch gedacht ist. Das bisherige Konkurrenzunternehmen *PowerDirect* hat hingegen einen Tarif für Single-Haushalte optimiert. Beide Tarife sollen miteinander verglichen werden, um zu prüfen, welches Angebot für Haushalte mit unterschiedlichen Verbrauchsmengen in Kilowattstunden (kWh) sinnvoller ist.

– *ElektraPlus*: Grundgebühr von 20 Euro pro Monat, zzgl. 0,25 Euro pro verbrauchte kWh.
– *PowerDirect*: Keine Grundgebühr, jedoch 0,35 Euro pro verbrauchte kWh.

Der Vergleich soll auf einer Verbrauchsskala von 0 bis 500 Kilowattstunden/Monat erfolgen.

a) Stellen Sie die Kostenmodelle als lineare Funktionen dar.
b) Zeichnen Sie beide Kostenverläufe in ein geeignetes Koordinatensystem.
c) Erläutern Sie, für welche Verbrauchsmengen *PowerDirect* günstiger ist als *ElektraPlus*.
d) Berücksichtigen Sie Sonderbedingungen: *PowerDirect* bietet ab 300 Kilowattstunden einen Rabatt von 5 % auf den kompletten Monatsverbrauch. Wie viel Euro sparen Sie dadurch bei einem Verbrauch von 420 Kilowattstunden ein?

Aufgabe 3.41 (tD8pP1)

Im Zuge der Modernisierung einer B236 soll eine neue Fußgängerüberführung den Parkplatz mit dem Gelände des Signal Iduna Parks verbinden. Die Überführung besteht aus einer schrägen Rampe, die zu einer zentralen Plattform führt, und einer zweiten schrägen Rampe, die von der Plattform wieder auf die andere Seite abfällt. Die Rampen verlaufen in gerader Linie schräg nach oben bzw. unten, während die Plattform horizontal bleibt.

– **Rampe 1**: Diese Rampe beginnt auf der linken Seite bei einem Punkt A(0|0), also am Boden, und wird durch einen Pfeiler im Punkt B(45|2,25) gestützt.
– **Plattform**: Die Plattform verläuft horizontal von P(96|4,8) bis C(150|4,8).
– **Rampe 2**: Die zweite Rampe führt vom Ende der Plattform bis zum Punkt D(210|0).

Die Stadtverwaltung möchte die Rampenlängen und die Steigungen planen, um sicherzustellen, dass die Bauvorschriften eingehalten werden. Diese besagen:

– Für den **öffentlichen Bereich** gilt eine maximale Steigung von 3,43°.
– Für den **privaten Bereich** gilt eine maximale Steigung von 11,31°.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen der beiden Rampen auf, die ihre Höhenverläufe in Abhängigkeit der horizontalen Strecke beschreiben.
b) Berechnen Sie ob die Rampe 1 tatsächlich den Punkt P(96|4,8) der Plattform trifft.
c) Berechnen Sie die Steigungen der beiden Rampen. Prüfen Sie, welche der beiden Rampen die Bauvorschriften für den öffentlichen Bereich erfüllt.
d) Zeichnen Sie die Überführung in einem Koordinatensystem, indem Sie die Rampen und die Plattform darstellen.
e) Berechnen Sie die Längen der beiden Rampen. Falls Sie den Satzes des Pythagoras nicht mehr kennen, recherchieren Sie seine Funktionsweise.
f) Falls die Steigungen von Rampe 1 oder 2 die Vorschriften überschreiten, überlegen Sie, wie der Verlauf der Rampen geändert werden könnte, um die Normen einzuhalten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



3.6 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME (ZWEI UNBEKANNTE)

Situationsbeschreibung – Abschlussprüfung geschafft

Florian und Yannik gehen abends in die gemütliche Esskneipe *Die Keule* in Schwerte, um mit alkoholfreien Getränken auf die bestandene Fachhochschulreifeprüfung anzustoßen.
Florian hat 4 Cola und 1 Eistee getrunken und dafür 15,40 Euro bezahlt.
Yannik hat 1 Cola und 5 Eistee getrunken und dafür 16,20 Euro bezahlt.
Aber wie viel kostet denn je eine Cola und ein Eistee? Können Sie den beiden helfen?

Die Keule ist auf jeden Fall einen Besuch wert :) Es gibt leckeres Essen zu einem guten Preis: fb.com/DieKeuleSchwerte/

Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additions-/Subtraktionsverfahren (Ebx3A4)

Um lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten zu lösen, gibt es drei gängige Verfahren. Zunächst wird der Sachzusammenhang in ein sogenanntes **Lineares Gleichungssystem** (LGS) übersetzt. Dabei wird die Variable x für die Menge Cola und y für die Menge Eistee verwendet (es ginge aber auch mit anderen Variablen wie c für Cola und e für Eistee). Daraus ergeben sich folgende mit I und II benannte Gleichungen:

I $4x + 1y = 15{,}4$
II $1x + 5y = 16{,}2$

Gleichsetzungsverfahren

Das Ziel des Gleichsetzungsverfahrens ist es, die beiden Gleichungen durch geeignete Umformungen so anzupassen, dass entweder die x- oder die y-Terme identisch sind. Welche der beiden Variablen gleichgesetzt wird, kann frei gewählt werden, sollte aber so gewählt werden, dass einfache Zahlwerte herauskommen. Wichtig ist nur, dass in beiden Gleichungen der Wert der entsprechenden Terme gleich ist. Im vorliegenden Fall wird y gleichgesetzt, indem die erste Gleichung mit 5 multipliziert wird:

I $4x + 1y = 15{,}4 \quad | \cdot 5$
II $1x + 5y = 16{,}2$

Alternativ könnte man auch die zweite Gleichung mit 4 multiplizieren um x gleichzusetzen.

I $20x + 5y = 77$
II $1x + 5y = 16{,}2$

Nun sind in beiden Gleichungen die y-Terme identisch (5y). Um die Berechnungen weiterzuführen, können in diesem Fall beide Gleichungen nach 5y umgestellt werden:

I $20x + 5y = 77 \quad | -20x$
II $1x + 5y = 16{,}2 \quad | -x$

I $5y = 77 - 20x$
II $5y = 16{,}2 - x$

Da die beiden y-Terme nun gleich sind, können die Gleichungen gleichgesetzt werden:
$77 - 20x = 16{,}2 - x$

Diese Gleichung kann anschließend gelöst werden, um den Wert von x zu bestimmen.

$$\begin{aligned} 77 - 20x &= 16{,}2 - x && | +x \\ 77 - 19x &= 16{,}2 && | -77 \\ -19x &= -60{,}8 && | :(-19) \\ \mathbf{x} &\mathbf{= 3{,}2} \end{aligned}$$

Da x den Preis für eine Cola repräsentiert, kostet diese 3,20 Euro.

Nun bleibt noch zu ermitteln, wie viel ein Eistee kostet. Mit dem berechneten Wert für x lässt sich eine der beiden Ausgangsgleichungen verwenden um y, den Preis für den Eistee zu bestimmen. Dabei ist es unerheblich, welche der beiden Gleichungen gewählt wird, da beide zum gleichen Ergebnis führen. Im folgenden Beispiel wird der Wert von x in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3{,}2 + 5y &= 16{,}2 \\ 3{,}2 + 5y &= 16{,}2 && | -3{,}2 \\ 5y &= 13 && | :5 \\ \mathbf{y} &\mathbf{= 2{,}6} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Preis für einen Eistee mit 2,60 Euro.

ⓘ **Einsetzungsverfahren**

Das Einsetzungsverfahren wird verwendet, um Gleichungen ineinander einzusetzen. Dafür wird eine der beiden Gleichungen nach einer der Variablen (x oder y) umgestellt, um diese dann in die andere Gleichung einzusetzen. Dadurch wird die Anzahl der Unbekannten auf eine reduziert, sodass die Gleichung gelöst werden kann.

Im gegebenen Beispiel kann die zweite Gleichung ganz einfach auf x umgestellt werden:

$$\begin{aligned} &\text{I} && 4x + 1y = 15{,}4 \\ &\text{II} && 1x + 5y = 16{,}2 && | -5y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} && 4x + 1y = 15{,}4 \\ &\text{II} && x = 16{,}2 - 5y \end{aligned}$$

Klammern auflösen
Sollten Sie Übungen zum Klammern auflösen, Zusammenfassen oder Gleichungen umstellen benötigen, so schauen Sie sich die entsprechenden Seiten der Grundlagenwiederholung in diesem Buch nochmals an.

Nun wird der Ausdruck für x aus der zweiten Gleichung in die erste Gleichung eingesetzt. Dabei ist es wichtig, Klammern korrekt zu verwenden:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (16{,}2 - 5y) + y &= 15{,}4 && | \text{Klammer auflösen} \\ 64{,}8 - 20y + y &= 15{,}4 && | -64{,}8 \\ -19y &= -49{,}4 && | :(-19) \\ \mathbf{y} &\mathbf{= 2{,}6} \end{aligned}$$

Nun wird der Wert von y analog zum Gleichsetzungsverfahren in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt, um x zu berechnen. Hier kann die bereits auf x umgestellte zweite Gleichung verwendet werden.

$$\begin{aligned} x &= 16{,}2 - 5y && | \text{y-Wert einsetzen} \\ x &= 16{,}2 - 5 \cdot 2{,}6 \\ x &= 16{,}2 - 13 \\ \mathbf{x} &\mathbf{= 3{,}2} \end{aligned}$$

Wie erwartet ergeben sich hier die gleichen Lösungen wie beim Gleichsetzungsverfahren.

Hinweis: Es ist nicht notwendig, nach x umzustellen, sofern in beiden Gleichungen dieselbe Variable mit dem gleichen Koeffizienten vorkommt. Hier ein Beispiel mit anderen Zahlen:

$$\begin{aligned} &\text{I} && 3x + 2y = 4 \\ &\text{II} && -4x + 2y = -3 \end{aligned}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

In diesem Fall wird z. B. die zweite Gleichung nach 2y umgestellt:

I $3x + 2y = 4$
II $-4x + 2y = -3 \quad | +4x$

I $3x + 2y = 4$
II $2y = -3 + 4x$

Der Ausdruck für 2y wird nun in die erste Gleichung eingesetzt, Klammern aufgelöst und nach x umgestellt:

$3x + (-3 + 4x) = 4 \quad |$ Klammern auflösen
$3x - 3 + 4x = 4 \quad | +3$
$7x = 7 \quad | :7$
$\mathbf{x = 1}$

Im nächsten Schritt wird der Wert von x in eine der Ausgangsgleichungen eingesetzt, um y zu berechnen. Hier beispielsweise in die erste Gleichung:

$3 \cdot 1 + 2y = 4$
$3 + 2y = 4 \quad | -3$
$2y = 1 \quad | :2$
$\mathbf{y = 0{,}5}$

Sollte, so wie in diesem gesonderten Beispiel, kein Sachzusammenhang bestehen, wie beispielsweise die Getränke von Florian und Yannik, geben Sie die Lösungen bitte immer als **Lösungsmenge** an: L = {(1 ; 0,5)}

Additions-/Subtraktionsverfahren

Das Additionsverfahren ist ein grundlegendes Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen und wird in späteren Kapiteln sowie in der Abschlussprüfung häufig benötigt. Daher ist es sinnvoll, sich die Grundlagen dieses Verfahrens einzuprägen.
Das Subtraktionsverfahren funktioniert prinzipiell identisch zum Additionsverfahren – der einzige Unterschied besteht darin, dass bei der Addition die Gleichungen addiert und bei der Subtraktion die Gleichungen voneinander subtrahiert werden. Wichtig ist, dass dabei stets vollständige Gleichungen miteinander verrechnet werden, wie im folgenden Beispiel veranschaulicht wird.

Das Ziel besteht darin, eine der beiden Variablen zu eliminieren, sodass die verbleibende Gleichung nur noch eine Unbekannte enthält. Es ist frei wählbar, welche Variable eliminiert wird. Häufig wird diese Entscheidung davon beeinflusst, welche Zahlen dabei einfacher zu handhaben sind.

Der erste Schritt dieses Verfahrens ist hier zufälligerweise so wie beim Gleichsetzungsverfahren. Die erste Gleichung wird mit 5 multipliziert und man erhält:

I $20x + 5y = 77$
II $1x + 5y = 16{,}2$

Hier sind die Terme 5y in beiden Gleichungen identisch. Dies ermöglicht eine direkte Verrechnung der Gleichungen. Wird nun die zweite Gleichung minus die erste Gleichung gerechnet (II – I), ergibt sich:

II–I $-19x = -60{,}8$

Der nächste Schritt besteht darin, nach x umzustellen und wir erhalten x = 3,2

Nachdem x berechnet wurde, kann der Wert in eine der beiden Ausgangsgleichungen eingesetzt werden, um y zu bestimmen.

ⓘ

Merke
Das Lösen von Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten ist nichts anderes, als die Berechnung des Schnittpunktes von zwei Geraden!

Auch die Preisberechnung von Cola und Eistee aus dem vorherigen Beispiel ist aus mathematischer Sicht nichts anderes, als die Berechnung des Schnittpunktes von zwei Geraden!

Nicht jedes lineare Gleichungssystem hat eine **eindeutige Lösung** mit genau einem x- und einem y-Wert (einen Schnittpunkt). Es gibt auch Sonderfälle, bei denen entweder **keine Lösung** existiert (die Geraden sind parallel und schneiden sich nicht) oder **unendlich viele Lösungen** möglich sind (die Geraden liegen aufeinander und sind identisch). Diese Fälle lassen sich durch das Ergebnis der Rechnung eindeutig erkennen:

eindeutige Lösung

1. Wenn am Ende der Berechnung ein Ergebnis wie etwa $x = -1$ herauskommt, lässt sich der dazugehörige y-Wert berechnen. In diesem Fall gibt es eine **eindeutige Lösung**, also genau **einen Schnittpunkt** der Geraden. Man schreibt zum Beispiel: $L = \{(3\,;\,4)\}$

keine Lösung

2. Wenn die Rechnung zu einem Ergebnis wie beispielsweise $-1 = 2$ führt, das offensichtlich falsch ist, bedeutet dies, dass das Gleichungssystem **keine Lösung** hat. In diesem Fall sind die Geraden **parallel**. Die Lösungsmenge ist dann leer, was wie folgt geschrieben wird: $L = \{\}$ oder $L = \emptyset$.

unendlich viele Lösungen

3. Wenn das Ergebnis der Rechnung auf eine immer wahre Aussage wie $-1 = -1$ hinausläuft, gibt es **unendlich viele Lösungen**. Dies tritt auf, wenn die beiden Gleichungen **identisch** sind und somit dieselbe Gerade beschreiben. In diesem Fall wird die Lösungsmenge mit einem Parameter angegeben, beispielsweise: $L = \{(x\,;\,3x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3.42 (JWpBfA)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) $y = 2x + 1$; $y = -x + 4$

b) $3x - y = 6$; $x + y = 4$

c) $y = -x + 3$; $y = 2x - 2$

d) $2x + y = 5{,}5$; $x - 2y = -1$

e) $y = 4x - 3$; $y = -x + 7$

f) $2x - y = 1$; $x + y = 3$

g) $2x + y = 7$; $3x - y = 4$

h) $y = \frac{1}{2}x + 2$; $y = -\frac{1}{3}x + 4$

Aufgabe 3.43 (razTZi)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Einsetzungsverfahren.

a) $3x + y = 7$; $y - 2x = 1$

b) $x - y = 2$; $2x + y = 10$

c) $5x - y = 15$; $y = 3x - 6$

d) $4x + y = 12$; $y - x = 2$

e) $3x - y = 6$; $y = -x + 4$

f) $2x + y = 3$; $x - 2y = -1$

g) $2x - y = 3$; $3x + y = 7$

h) $x + 2y = 4$; $3x - y = 5$

Aufgabe 3.44 (LWNQnP)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit dem Additions–/Subtraktionsverfahren.

a) $2x + y = 5$; $3x - y = 7$

b) $x - 2y = -3$; $2x + y = 4$

c) $4x + 3y = 10$; $-2x + 3y = 4$

d) $3x - y = 8$; $x + y = 2$

e) $5x + 2y = 12$; $3x - 4y = 2$

f) $x + y = 6$; $-3x + 2y = -12$

g) $4x - y = 5$; $-3x + 3y = -7$

h) $3x + y = 4$; $-2x + 3y = 5$

Aufgabe 3.45 (d1gnA5)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mithilfe eines geeigneten Verfahrens. Stellen Sie die Gleichungen gegebenenfalls vorher um!

a) $y = 2x + 3$; $6 = 3y - x$

b) $4x - y + 1 = 0$; $2x + y - 5 = 0$

c) $3y = 4x - 12$; $2x + y = 6$

d) $x + 3y = 9$; $2x - 4y = -6$

Klammern auflösen
Sollten Sie Übungen zum Klammern auflösen, Zusammenfassen oder Gleichungen umstellen benötigen, so schauen Sie sich die entsprechenden Seiten der Grundlagenwiederholung in diesem Buch nochmals an.

Aufgabe 3.46 (mA3aCb)

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit einem geeigneten Verfahren.

a) $2(3x - y - 2) = 4y - 5x + 17$; $4(2y - 3) - x + 7 = 2(2x - y)$

b) $3(2x + y - 2) = 2(y + 1) + x$; $3(4y - 2x + 2) - 4 = -3(3x - 2y - 7) + 2$

c) $5(x - 2y + 2) + 3 = 4(y + 3x - 4) + y$; $3(3x - y - 1) = 2(4x - 3y + 1)$

d) $4(2x + y - 3) + 6 = 2(3y - x + 5) - 10$; $3(4y - x + 2) - 5 = -2(3x - 2y - 4) + 12$

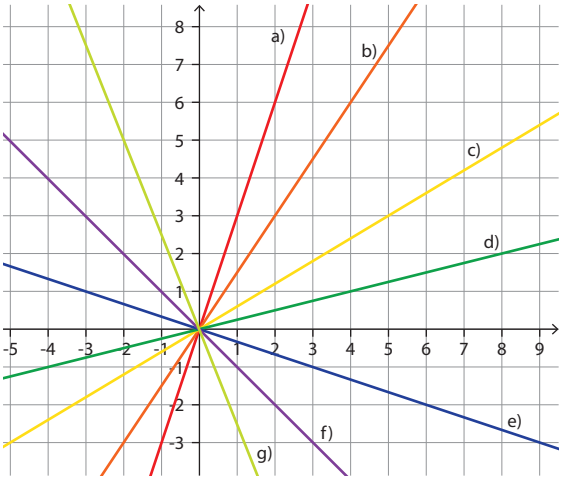
DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



3.7 VERMISCHTE ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 3.47 (Y44RYA)

Geben Sie zu jedem Graphen die zugehörige Steigung und Geradengleichung an.



a) m = _____ ; f(x) = _____

b) m = _____ ; f(x) = _____

c) m = _____ ; f(x) = _____

d) m = _____ ; f(x) = _____

e) m = _____ ; f(x) = _____

f) m = _____ ; f(x) = _____

g) m = _____ ; f(x) = _____

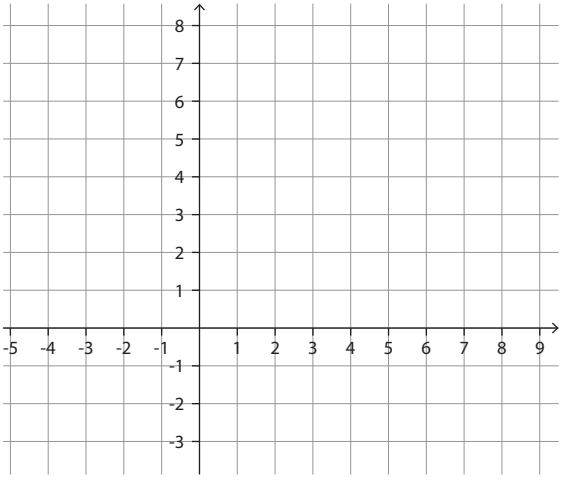
Aufgabe 3.48 (6yJFx6)

Eine Gerade verläuft durch den Koordinatenursprung und den Punkt P. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden.

a) P(3|9) b) P(–4|–2) c) P(–1|0,25) d) P(5|–2,5)

Aufgabe 3.49 (VLtxhE)

Zeichnen Sie die Geraden mithilfe eines Steigungsdreiecks in das vorgegebene Koordinatensystem. Verwenden Sie die jeweilige Funktionsgleichung.



a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = -4x$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x$

d) $f(x) = -2{,}5x$

e) $f(x) = x$

f) $f(x) = -0{,}75x$

g) $f(x) = 3x$

○ **Aufgabe 3.50 (iVtZNn)**

Zeichnen Sie die Geraden in je ein Koordinatensystem.

a) $f(x)=\frac{3}{4}x$ c) $f(x)=-\frac{5}{6}x$ e) $f(x)=-\frac{7}{3}x$ g) $f(x)=\frac{1}{3}x$

b) $f(x)=-1{,}5x$ d) $f(x)=2x$ f) $f(x)=0{,}8x$ h) $f(x)=-2x$

○ **Aufgabe 3.51 (Zf6yHn)**

Geben Sie die jeweils zugehörige Funktionsgleichung an und zeichnen Sie die Geraden in je ein Koordinatensystem.

a) $m=1{,}5\,;\,b=-2$ e) $m=\frac{5}{6}\,;\,b=-3$ i) $m=-3\,;\,b=2$

b) $m=-2\,;\,b=0$ f) $m=2\,;\,b=1{,}5$ j) $m=\frac{2}{5}\,;\,b=-2$

c) $m=3\,;\,b=-1$ g) $m=-1\,;\,b=-1$ k) $m=0{,}5\,;\,b=\frac{1}{2}$

d) $m=\frac{3}{4}\,;\,b=2$ h) $m=-\frac{1}{3}\,;\,b=3$ l) $m=-\frac{7}{4}\,;\,b=1$

○ **Aufgabe 3.52 (q3edTn)**

Zeichnen Sie die folgenden Geraden in je ein Koordinatensystem.

a) $f(x)=3x-2$ c) $f(x)=-2x+4$ e) $f(x)=4x+1{,}5$

b) $f(x)=\frac{1}{3}x+1$ d) $f(x)=-\frac{3}{4}x-2$ f) $f(x)=-\frac{5}{2}x+3$

○ **Aufgabe 3.53 (iUxw27)**

Zeichnen Sie die angegebenen Geraden in je ein Koordinatensystem.

a) $f(x)=-x+1$ c) $f(x)=0{,}4x-1$ e) $f(x)=-1{,}25x-2$

b) $f(x)=3$ d) $f(x)=\frac{4}{3}x-3$ f) $f(x)=-\frac{2}{3}x$

◒ **Aufgabe 3.54 (ueNunt)**

Zeichnen Sie die angegebenen Geraden in je ein Koordinatensystem.

a) $y=0{,}5x+2$ c) $y=-1{,}8x-3$ e) $3x+2=y$

b) $y=-\frac{x}{2}$ d) $y=-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}x$ f) $y-3=-\frac{1}{4}x$

○ **Aufgabe 3.55 (fZudFH)**

Für eine Gerade mit der Gleichung $f(x)=mx+b$ sind die Steigung m und ein Punkt P bekannt. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der jeweiligen Gerade.

a) $m=2\,;\,P(1|-3)$ c) $m=-1\,;\,P(5|0)$ e) $m=0\,;\,P(-4|5)$

b) $m=-\frac{3}{2}\,;\,P(-2|4)$ d) $m=\frac{4}{3}\,;\,P(-3|-1)$ f) $m=\frac{1}{5}\,;\,P(7|2)$

◒ **Aufgabe 3.56 (D9ACqh)**

Eine lineare Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x)=mx+3$. Berechnen Sie die Steigung m, sodass der Punkt P auf der Geraden liegt. Geben Sie anschließend die vollständige Funktionsgleichung an.

a) $P(2|7)$ b) $P(-3|-6)$ c) $P(4|5)$ d) $P(-1|1)$

◒ **Aufgabe 3.57 (nSF7Bm)**

Eine Gerade hat die Gleichung $f(x)=3x+b$. Bestimmen Sie b, sodass der Punkt P auf der Geraden liegt. Geben Sie anschließend die vollständige Funktionsgleichung der Geraden an.

a) $P(1|4)$ b) $P(-2|-3)$ c) $P(5|10)$ d) $P(3|0)$

◒ **Aufgabe 3.58 (Evbqus)**

Eine Gerade ist parallel zu einer gegebenen Geraden und verläuft durch den angegebenen Punkt. Bestimmen Sie die Gleichung der gesuchten Geraden.

a) $f(x)=\frac{2}{3}x-1\,;\,P(3|4)$ b) $f(x)=2x+1\,;\,P(0{,}5|-1)$ c) $f(x)=-3\,;\,P(-1|0)$

● **Aufgabe 3.59 (4PN51S)**

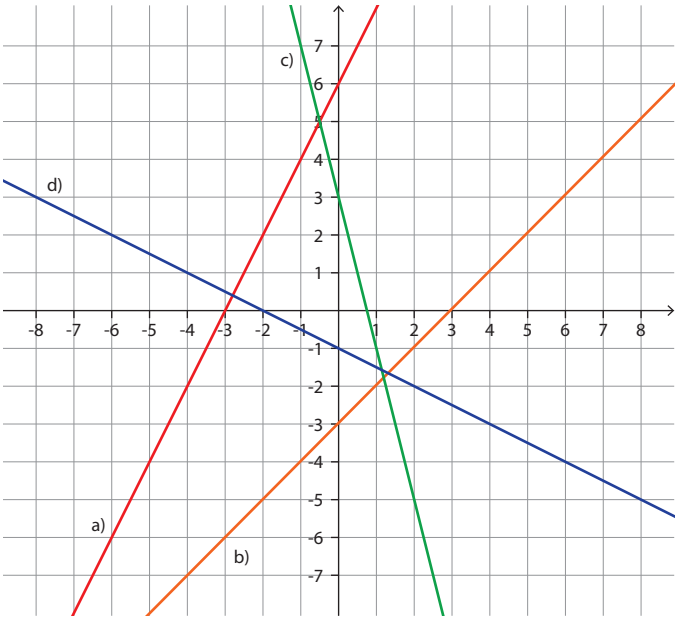
Eine Gerade ist orthogonal zu einer gegebenen Geraden und verläuft durch den angegebenen Punkt. Bestimmen Sie die Gleichung der gesuchten Geraden.

a) $f(x)=-\frac{1}{2}x+6\,;\,P(2|4)$ b) $f(x)=2x-4\,;\,P(-2|6)$ c) $f(x)=\frac{3}{4}x+2\,;\,P(4|8)$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.60 **(zfDjxS)**

Bestimmen Sie zu jedem Graphen die zugehörige Funktionsgleichung.



a) f(x) = _____

b) f(x) = _____

c) f(x) = _____

d) f(x) = _____

Hinweis
Hier können Sie m und b direkt ablesen.

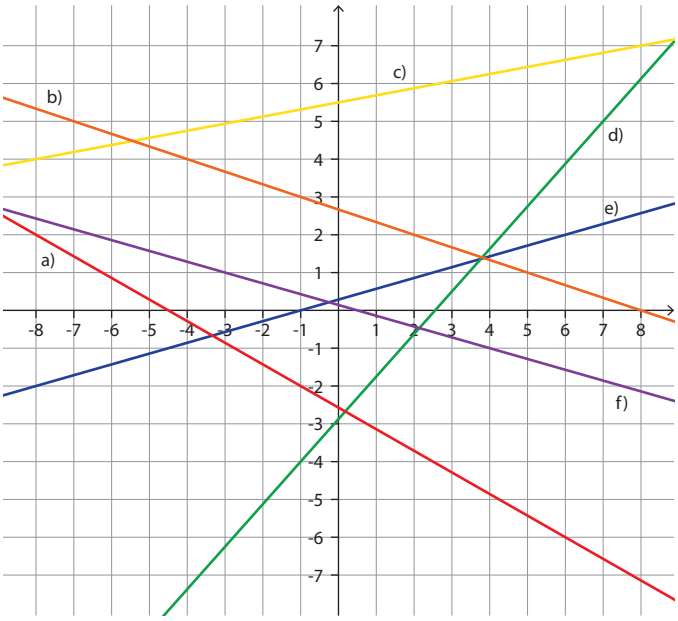
Aufgabe 3.61 **(KqEXpi)**

Eine Gerade verläuft durch die angegebenen Punkte P und Q. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden in der Form f(x) = mx + b.

a) P(1|3) ; Q(–2|0)
b) P(–4|5) ; Q(2|1)
c) P(0|–3) ; Q(3|2)
d) P(–3|–2) ; Q(3|1)
e) P(–5|4) ; Q(1|–1)
f) P(2|0) ; Q(–3|–4)
g) P(–2|2) ; Q(3|–1)
h) P(4|5) ; Q(–2|3)
i) P(2|1); Q(–4|–1)

Aufgabe 3.62 **(WmfiGe)**

Bestimmen Sie zu jedem Graphen die zugehörige Funktionsgleichung.



a) f(x) = _____

b) f(x) = _____

c) f(x) = _____

d) f(x) = _____

e) f(x) = _____

f) f(x) = _____

Hinweis
Hier können Sie m und b nicht gut ablesen. Suchen Sie daher zwei markante Punkte, mit denen Sie die Steigung berechnen können.

Aufgabe 3.63 **(9KW15N)**

Prüfen Sie, ob die drei angegebenen Punkte jeweils auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

a) A(0|2) ; B(3|5) ; C(–2|–1)
b) A(–3|4) ; B(1|–2) ; C(5|–8)
c) A(2|–6) ; B(–4|–12) ; C(1|–9)
d) A(0|0) ; B(4|2) ; C(–4|–2)
e) A(1|7) ; B(–1|3) ; C(3|11)
f) A(–5|10) ; B(0|4) ; C(5|–2)

○ **Aufgabe 3.64 (n3iF2d)**

Zeichnen Sie die angegebenen Geraden in je ein Koordinatensystem und bestimmen Sie anhand Ihrer Zeichnung die jeweilige Nullstelle und den y-Achsenabschnitt.

a) $f(x) = 3x - 6$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$
c) $f(x) = x + 1$
d) $f(x) = -2x + 5$
e) $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$
f) $f(x) = -x - 2$

◒ **Aufgabe 3.65 (e6m15d)**

An welcher Stelle schneidet die Gerade durch P und Q die x-Achse?

a) P(2|5) ; Q(4|1)
b) P(–3|4) ; Q(1|–2)
c) P(0|6) ; Q(–2|0)
d) P(3|2) ; Q(–1|–2)
e) P(5|–4) ; Q(–3|8)
f) P(–4|–1) ; Q(2|3)

○ **Aufgabe 3.66 (pwSAEM)**

Ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden linearen Funktionen.

a) $f(x) = 4x - 8$
b) $f(x) = -3x + 6$
c) $f(x) = x - \frac{2}{3}$
d) $f(x) = -5x + 10$
e) $f(x) = \frac{3}{4}x + 9$
f) $f(x) = 3x - 7$

○ **Aufgabe 3.67 (LhtQne)**

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden linearen Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$
b) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$
c) $f(x) = -2x - 8$
d) $f(x) = -0{,}4x + 3$
e) $f(x) = \frac{4}{5}x - 7$
f) $f(x) = -1{,}5x - 8$

◒ **Aufgabe 3.68 (c2tS8z)**

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden linearen Funktionen.

a) $f(x) = \frac{3}{4}x + 1$
b) $f(x) = 5x - 0{,}5$
c) $f(x) = -2x + \frac{3}{2}$
d) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 0{,}5$
e) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$
f) $f(x) = 4$

● **Aufgabe 3.69 (mKLEN9)**

Bestimmen Sie die Gleichungen von drei linearen Funktionen, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) Geben Sie eine lineare Funktion an, deren Nullstelle bei $x_0 = -3$ liegt.
b) Finden Sie eine lineare Funktion, deren Graph die x-Achse im Punkt S(5|0) schneidet.
c) Ermitteln Sie eine Funktion, die die Nullstelle $x_0 = -2$ besitzt und eine positive Steigung aufweist.

○ **Aufgabe 3.70 (62KzaC)**

Für jede der folgenden linearen Funktionen f(x) ist ein Funktionswert angegeben. Bestimmen Sie, bei welchem x-Wert die Funktion den angegebenen Funktionswert erreicht:

a) $f(x) = 4x - 2$; $f(x) = 3$
b) $f(x) = -3x + 4$; $f(x) = 0$
c) $f(x) = 2x + 1$; $f(x) = 0{,}5$
d) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$; $f(x) = 1$
e) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; $f(x) = -2$
f) $f(x) = -2x + \frac{3}{2}$; $f(x) = -1$
g) $f(x) = x - 4$; $f(x) = 5$
h) $f(x) = 3x - 1$; $f(x) = 10$
i) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 5$; $f(x) = 3$

◒ **Aufgabe 3.71 (1mVZmz)**

Für die unten angegebenen linearen Funktionen f(x) und Funktionswerte ist zu berechnen, bei welchem x-Wert der jeweilige Funktionswert erreicht wird:

a) $f(x) = -0{,}8x + 2$; $f(x) = -4$
b) $f(x) = -\frac{2}{3}x - 3$; $f(x) = -7$
c) $f(x) = -0{,}25x - \frac{3}{2}$; $f(x) = -1$
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$; $f(x) = 0{,}25$

○ **Aufgabe 3.72 (UjUQqX)**

Eine Kerze brennt pro Stunde 1,5 cm ab. Drei Stunden nachdem sie angezündet wurde, ist sie noch 9,5 cm hoch.

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung h(t) auf, die die Höhe der Kerze (in Zentimetern) in Abhängigkeit von der Brenndauer t (in Stunden) beschreibt.
b) Wie hoch war die Kerze ursprünglich?
c) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion und interpretieren Sie das Ergebnis.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.73 (NdcQzm)

Temperaturen können in verschiedenen Einheiten gemessen werden. Neben "Grad Celsius" wurde Anfang des 18. Jahrhunderts von Daniel Gabriel Fahrenheit eine eigene Temperaturskala entwickelt, die heute vor allem in den USA verwendet wird.

a) Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen Celsius (°C) und Fahrenheit (°F) mithilfe einer linearen Funktion. Nutzen Sie dazu die Punkte (10 °C, 50 °F) und (20 °C, 68 °F).

b) Ein typischer Gefrierpunkt für reines Wasser liegt bei 0 °C. Geben Sie die entsprechende Temperatur in °F an.

c) Fahrenheit setzte als Referenzwert für seine Skala 100 °F fest, was seiner eigenen Körpertemperatur entsprach. Berechnen Sie, welcher Temperatur in °C das entspricht.

Aufgabe 3.74 (jXb9jH)

Für seine Fahrten mietet Mike regelmäßig ein Auto. Der Mietwagen kostet eine Tagespauschale von 24 Euro, hinzu kommen 18 Cent pro gefahrenem Kilometer.

a) Mike fährt an einem Tag 75 km. Wie hoch sind die Gesamtkosten für diesen Tag?

b) Wie teuer wird ein Tag, wenn Mike 120,5 km fährt?

Aufgabe 3.75 (3RzfTW)

Eine Sanduhr enthält 0,2 cm^3 Sand. Durch den Engpass rieseln pro Sekunde 0,4 mm^3 Sand von der oberen in die untere Kammer.

a) Nach wie vielen Minuten ist die Hälfte des Sandes nach unten gerieselt?

b) Wie lange dauert es, bis 90 % des Sandes von oben nach unten gerieselt ist?

Aufgabe 3.76 (2rhMzr)

In einem Experiment werden an einer Schraubenfeder nacheinander verschiedene Gewichte befestigt, und die entsprechende Länge der Feder wird gemessen. Die Daten wurden in der unten stehenden Tabelle dokumentiert.

Masse in g	50	100	250	300	
Länge in cm	8,6	10,2	15		30,2



a) Überprüfen Sie, ob der Zusammenhang zwischen der angehängten Masse und der Länge der Feder durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

b) Wie groß ist der y-Achsenabschnitt der Funktionsgleichung und welche Bedeutung hat dieser im Sachkontext?

c) Berechnen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle.

Aufgabe 3.77 (h8sMF4)

Zwei Autovermietungen bieten verschiedene Preismodelle für die Miete eines Autos an:

– Autoverleih A: Grundpauschale von 80 Euro pro Tag, dazu 0,40 Euro pro Kilometer
– Autoverleih B: Grundpauschale von 60 Euro pro Tag, dazu 0,55 Euro pro Kilometer

a) Nina plant, an einem Tag ca. 200 km zu fahren. Welcher Autoverleih ist für sie günstiger?

b) Ab welcher Kilometeranzahl ist das Angebot von Autoverleih A günstiger als das von Autoverleih B? Setzen Sie die Kostenfunktionen beider Vermietungen gleich und lösen Sie die entsprechende Gleichung.

Aufgabe 3.78 (cjcFYU)

Eine Kerze mit einer Ausgangslänge von 18 cm verkürzt sich in 15 Minuten um 9 mm.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die den Zusammenhang zwischen der Brenndauer t (in Minuten) und der verbleibenden Kerzenlänge l (in cm) beschreibt.

b) Wie lang ist die Kerze nach 10, 20, 35 und 50 Minuten Brenndauer?

c) Nach wie vielen Minuten ist die Kerze vollständig abgebrannt?

◒ **Aufgabe 3.79 (yfQgT7)**

Mike und Nina renovieren ihre Wohnung und benötigen für den Transport von Baumaterialien und Möbeln einen Transporter. Der Baumarkt bietet dafür einen Verleih mit einer festen Grundgebühr von 50 Euro pro Tag sowie einer Kilometerpauschale an.
Der Kilometerstand des Transporters beträgt bei der Abholung 10.358 km. Nach der Nutzung, bei der auch ein Zwischenstopp bei einem Möbelgeschäft eingelegt wird, zeigt der Kilometerstand 10.433 km. Beim Zurückgeben des Fahrzeugs beträgt die Rechnung 62,50 Euro. Nina möchte den zugrunde liegenden Preis pro Kilometer berechnen, da ihr die Kosten fair erscheinen. Können Sie ihr helfen?

● **Aufgabe 3.80 (wUp3JS)**

YouTube

Die steilste Straße der Welt ist die Baldwin Street in Dunedin (Neuseeland) mit einer Steigung von knapp 35 %. Berechnen Sie den dazugehörigen Steigungswinkel in Grad.

● **Aufgabe 3.81 (vWYdvR)**

Mike und Nina starten am Morgen eine Fahrradtour. Mike passiert um 9:00 Uhr das Ortsschild mit einer konstanten Geschwindigkeit von 18 km/h. Nina kommt um 9:15 Uhr am Ortsschild vorbei und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24 km/h hinterher.

a) Bestimmen Sie rechnerisch, um wie viel Uhr sich Mike und Nina treffen.
b) Wie viele Kilometer hinter dem Ortsschild treffen sich die beiden?

○ **Aufgabe 3.82 (XJq3cT)**

Aus einem Wasserhahn fließen pro Sekunde 180 ml Wasser.

a) Stellen Sie eine Funktion auf, die den Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Sekunden) und der geflossenen Wassermenge w (in Millilitern) beschreibt. Zeichnen Sie die entsprechende Funktion als Schaubild.
b) Berechnen Sie, wie viel Liter Wasser nach 10 Sekunden, 30 Sekunden, 2 Minuten, 10 Minuten und 1 Stunde aus dem Hahn geflossen ist.
c) Wie lange dauert es (im Format Minuten:Sekunden), bis ein Behälter mit einem Fassungsvermögen von 200 Litern vollständig gefüllt ist?

○ **Aufgabe 3.83 (yKavvN)**

Eine zylinderförmige Regentonne mit einer Höhe von 80 cm füllt sich durch gleichmäßigen Regen. Nach 10 Minuten steht das Wasser 25 cm hoch, nach 20 Minuten sind es 33 cm.

a) Skizzieren Sie ein Schaubild, das die Höhe des Wassers in der Regentonne h (in cm) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) darstellt.
b) Bestimmen Sie die Änderungsrate der Wasserhöhe pro Minute.
c) Stellen Sie eine lineare Funktion auf, die den Zusammenhang zwischen der Zeit t (in Minuten) und der Wasserhöhe h (in cm) beschreibt.
d) Wie hoch stand das Wasser zu Beginn des Regenschauers in der Tonne.
e) Wann (hh:mm:ss) würde die Regentonne theoretisch überlaufen, wenn der Regen unverändert weitergeht?

○ **Aufgabe 3.84 (f6zfLb)**

Mike steht vor der Entscheidung zwischen zwei Gastarifen für sein Haus:

– Tarif H1 (Kleinverbrauchstarif): Grundgebühr von 5 Euro/Monat plus 10 Cent/kWh.
– Tarif H2 (Grundtarif): Grundgebühr von 10 Euro/Monat, dafür nur 7 Cent/kWh.

a) Geben Sie die Funktionsgleichungen $h_1(x)$ und $h_2(x)$ für beide Tarife an, die die jährlichen Gesamtkosten y (in Euro) in Abhängigkeit vom Verbrauch x (in kWh) beschreiben.
b) Ab welcher monatlichen Verbrauchsmenge x lohnt sich für Mike der Wechsel vom Tarif H1 zu Tarif H2? Begründen Sie Ihre Empfehlung mit einer Rechnung.
c) Zeichnen Sie die Funktionsgraphen beider Tarife für x im Bereich von 0 bis 3000 kWh in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse: 0,5 cm = 200 kWh; y-Achse: 0,5 cm = 20 Euro)

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.85 (jCNqYX)



Der Airbus A380 gehört zu den größten und modernsten Passagierflugzeugen weltweit und bietet Platz für bis zu 853 Passagiere. Mit einem voll betankten Fassungsvermögen von 320 Tonnen Kerosin kann das Flugzeug lange Strecken zurücklegen. Sein Verbrauch liegt bei etwa 1,97 Tonnen Kerosin auf 100 km, was pro Passagier ca. 2,3 Liter pro 100 km entspricht[6].

a) Kann der Airbus einen Nonstop-Flug nach Bangkok schaffen (Entfernung ca. 9.100 km)?
b) Erreicht das Flugzeug mit einer Tankfüllung Sydney (Entfernung ca. 16.500 km)?
c) Berechnen Sie, wie weit der A380 bei vollständiger Betankung maximal fliegen kann.
d) Wie viel Liter Kerosin verbraucht ein Passagier auf einem Flug von Frankfurt nach New York (Entfernung ca. 6.200 km)?
e) Vergleichen Sie die "Liter pro 100 km"-Angabe für einen Passagier mit der eines durchschnittlichen Autos.

Aufgabe 3.86 (NS9pbY)

Ein Airbus A380 ist auf dem Rückweg von Dubai zu seinem Heimatflughafen Düsseldorf. Über Dortmund befindet sich das Flugzeug noch in einer Reiseflughöhe von etwa 4.000 m. Der standardmäßige Sinkflug erfolgt mit einem konstanten Neigungswinkel von 3°.
Kann das Flugzeug bei gleichbleibendem Sinkwinkel die 70 km entfernte Landebahn in Düsseldorf erreichen?

Aufgabe 3.87 (mNcQZL)

In der Tabelle[7] sind technische Daten der Airbus A320-Familie dargestellt.

a) Überprüfen Sie die Reichweitenangaben der Flugzeugmodelle A318-100 und A319-100.
b) Wieso ist die in den Kennwerten niedrigere Reichweite (als in Teilaufgabe a berechnet) dennoch durchaus plausibel?
c) Welches Modell der vier angegebenen Flugzeugtypen ist am effizientesten? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch.

Kenngröße	A318-100[73]	A319-100[74]	A320-100 / -200[75]	A321-100 / -200[76]
Reisegeschwindigkeit	Mach 0,78 (828 km/h in 11.000 m/36.000 ft)[77]			
Höchstgeschwindigkeit	Mach 0,82 (871 km/h in 11.000 m/36.000 ft)[78]			
Passagiere	107 bis 132	124 bis 156	150 bis 180	185 bis 236
Reichweite	2.700 bis 6.000 km	3.350 bis 6.850 km	4.800 bis 6.150 km	4.400 bis 5.950 km
Treibstoffkapazität	24.210 l	30.190 l	24.210 l bis 30.190 l	-100: 23.700 l / -200: 29.680 l
Passagiertüren	4	4	4	4
Notausgänge	2	normal 2, optional 4	4; über den Tragflächen	4; jeweils 2 vor und 2 hinter den Tragflächen
Kraftstoffverbrauch (auf Reiseflughöhe pro Stunde)[79]	2.400 l	2.600 l	2.700 l	2.900 l

Aufgabe 3.88 (b5wv7K)

Ein Auto verbraucht 7 Liter auf 100 km. Der Tank hat ein Fassungsvermögen von 60 Litern.

a) Bestimmen Sie eine Funktion r(x), die die Restmenge Benzin im Tank in Abhängigkeit von der gefahrenen Strecke x (in km) beschreibt.
b) Zeichnen Sie die Funktion r(x) unter Verwendung eines Steigungsdreiecks in ein geeignetes Koordinatensystem.
c) Lesen Sie ab, wie viel Benzin sich nach 300 km noch im Tank befindet.
d) Bestimmen Sie, wann der Tank leer ist. Wie erkennen Sie diesen Punkt im Graphen?

6 vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Airbus_A380#Technische_Daten, abgerufen am 13.12.2024
7 vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Airbus-A320-Familie#A320-Familie, abgerufen am 26.11.2024

Aufgabe 3.89 (Svtx5S)

Ein Flugzeug benötigt auf 200 km etwa 1.800 Liter Kerosin.

a) Wie lautet die Funktionsgleichung, die den Verbrauch k in Abhängigkeit von der Strecke s (in km) beschreibt?

b) Wie lautet die Funktionsgleichung, die die Strecke s in Abhängigkeit vom Verbrauch k (in Litern) beschreibt?

c) Welche Strecke legt das Flugzeug zurück, wenn es 12.500 Liter Kerosin verbraucht hat?

d) Wie viel Kerosin wird für eine Strecke von 7.500 km benötigt?

Aufgabe 3.90 (JZwevb)

Die Talstation einer Seilbahn befindet sich auf einer Höhe von 600 m. Die erste Stütze steht in einer Höhe von 850 m und ist (horizontal betrachtet) 400 m von der Talstation entfernt. Die Bergstation liegt (horizontal betrachtet) 1.000 m von der Talstation entfernt.

a) Berechnen Sie die Steigung der Seilbahn zwischen der Talstation und der Bergstation.

b) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung, die die Höhe der Gondel in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung x von der Talstation beschreibt.

c) Auf welcher Höhe befindet sich die Bergstation?

Aufgabe 3.91 (mzBE1L)

Im Sommer muss Ninas Garten regelmäßig bewässert werden. Eine Pumpe, die 600 Liter Wasser pro Stunde liefert, sorgt für die Bewässerung von Ninas Blumenbeeten.

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung w(t) auf, die die geförderte Wassermenge w (in Litern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) beschreibt.

b) Wie viele m^3 Wasser fördert die Pumpe in 6 Stunden?

c) Wie lange dauert es, bis die Pumpe 4.800 Liter Wasser gefördert hat?

Aufgabe 3.92 (iFEXx4)

Zum *Waldstrandbad Ternscher See* bei Selm führen zwei Strecken: die eine ist 25 km, die andere 40 km lang. Mike und Nina benutzen auf ihrer Fahrt zum See den kürzeren Weg. Nina fährt mit dem Fahrrad und benötigt dafür 80 Minuten. Mike fährt mit einem Motorroller, der konstant 30 km/h fährt.

Ideal für die Sommermonate bietet sich der Ternscher See bei Selm für einen erfrischenden Badespaß an: http://www.ternschersee.de



a) Berechnen Sie Ninas durchschnittliche Geschwindigkeit in km/h.

b) Wie viele Minuten später kann Mike losfahren, um gleichzeitig mit Nina anzukommen?

c) Nach 40 Minuten macht Nina eine Pause von 15 Minuten. Um die verlorene Zeit aufzuholen, fährt sie den restlichen Weg mit einer höheren Geschwindigkeit. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden auf, die die verbleibende Strecke s (in km) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) beschreibt. Beurteilen Sie den Wert der Steigung im Sachkontext.

d) Wie viele Minuten später hätte Nina mit ihrer höheren Geschwindigkeit und ohne Pause losfahren können, um zur selben Zeit am See anzukommen?

e) Ein Auto fährt die längere Strecke und startet 45 Minuten später als Nina. Mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) muss das Auto fahren, um gleichzeitig mit Nina und Mike am See anzukommen? Würde es in einer "50er Zone" geblitzt?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.93 (DXSEgB)

Im Blut eines Menschen befinden sich rote Blutkörperchen, die zu 90 % aus Hämoglobin bestehen. Nina leidet unter Anämie, sodass ihr Hämoglobingehalt h aktuell bei 90 g/Liter liegt. Durch eine Behandlung steigt der Hämoglobingehalt täglich um 0,24 g/Liter.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung h(t) auf, die den Hämoglobingehalt h (in g/Liter) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Tagen) beschreibt.

b) Nach wie vielen Tagen erreicht Ninas Hämoglobingehalt den Wert von 115 g/Liter?

Anämie
bedeutet einen zu niedrigen Hämoglobingehalt im Blut. Bei 90 g/L (normal: 120–160 g/L) treten oft Müdigkeit und blasse Haut auf. Eine Ursache ist Eisenmangel, z. B. durch Blutverlust oder Ernährungsmängel.

Aufgabe 3.94 (9jEyc5)

Die Profiltiefe der Reifen an Ninas Tesla verringert sich gleichmäßig mit der Fahrleistung. Nach 24.000 km beträgt die Profiltiefe 5 mm, nach 35.000 km nur noch 3 mm.

a) Wie viele Kilometer kann Nina mit den Reifen noch fahren, wenn eine Mindestprofiltiefe von 1 mm vorgeschrieben ist?

b) Um wie viele Millimeter nimmt die Profiltiefe pro 10.000 km ab?

c) Welche Profiltiefe hatten die Reifen, als sie neu waren?

Aufgabe 3.95 (Mwaq4c)

Mike und Nina stellen ihre Heizungsanlage von Öl auf eine Wärmepumpe um. Bevor der Ölbehälter entfernt werden kann, muss dieser leergepumpt werden. Dazu beauftragen sie die Firma *Heizöl Marco Spitau* aus dem Dortmunder Stadtteil Hafen. Nach 9 Minuten befinden sich noch 15,8 m^3 Öl im Behälter, nach 15 Minuten nur noch 8 m^3.

a) Nach wie vielen Minuten ist der Behälter komplett leer?

b) Wie viel m^3 Öl befand sich zu Beginn (bei t = 0) im Behälter?

Aufgabe 3.96 (YEYTVf)

Mike verbringt seine Freizeit oft mit Fallschirmspringen. Nach dem Öffnen des Fallschirms misst er mithilfe eines Höhenmessers zu verschiedenen Zeitpunkten seine aktuelle Höhe über dem Erdboden. Die gemessenen Daten sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

Fallzeit t in s	15	20	25	30
Höhe h in m	3083	2806	2529	2252



a) Erstellen Sie ein Koordinatensystem, in dem Sie die Zeit t auf die waagerechte Achse und die Höhe h auf die senkrechte Achse legen. Beschriften und skalieren Sie die Achsen entsprechend. Tragen Sie die Werte aus der Tabelle als Punkte so gut es geht in das Koordinatensystem ein und überprüfen Sie optisch, ob die Punkte auf einer Geraden liegen.
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le y \le 80$, mit 1 cm = 10 s Fallzeit; y-Achse: $0 \le x \le 4000$, mit 1 cm = 500 m Höhe)

b) Überprüfen Sie auch rechnerisch, ob es sich um eine lineare Funktion handelt, die den Zusammenhang zwischen Zeit und Höhe darstellt.

c) Geben Sie die Steigung der Funktion und ihre Maßeinheit an. Welche Bedeutung hat dieser Wert für den Fallschirmsprung. Rechnen Sie in km/h um.

d) Geben Sie den y-Achsenabschnitt der Funktion an und erläutern Sie, was dieser Wert über die Höhe des Fallschirmspringers aussagt.

e) Die tatsächliche Absprunghöhe betrug im Vergleich zum Ergebnis aus Teilaufgabe d) eigentlich nur 3500 m. Können Sie sich diese Differenz zum berechneten Wert erklären?

f) Berechnen Sie die Höhe des Fallschirmspringers nach 43 Sekunden. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Graphen.

g) Finden Sie heraus, nach welcher Fallzeit Mike seinen Fallschirm in einer Höhe von 800 Metern öffnen muss.

m/s in km/h
Der Umrechnungsfaktor von m/s in km/h beträgt 3,6:
1 m/s = 3,6 km/h

Aufgabe 3.97 (SNYeew)

Wandeln Sie die folgenden linearen Gleichungen so um, dass sie in der Form $y = mx + b$ vorliegen, und zeichnen Sie anschließend die zugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem.

a) $3y = 2x - 6$
b) $4x - \frac{1}{3}y = 2$
c) $5x + y = 8$
d) $6x - 3y = 9$
e) $2y - 4x = 1$
f) $7x + 5y = -10$

Aufgabe 3.98 (1cfRQy)

Bringen Sie die folgenden linearen Gleichungen in die Normalform $y = mx + b$ und zeichnen Sie die dazugehörigen Geraden in ein Koordinatensystem.

a) $-3x - y = -6$
b) $4x + 2y = 8$
c) $x - 2y = -1$
d) $3x - 4y = 12$
e) $\frac{2}{3}x - 0{,}5y = 1$
f) $-0{,}2x + 0{,}25y = -\frac{3}{2}$

Aufgabe 3.99 (77XLQT)

Geben Sie jeweils drei Lösungspaare $L = \{(x;y)\}$ für die Gleichungen an. Versuchen Sie, möglichst im Kopf und ohne Umstellen der Gleichungen zu rechnen.

a) $3x - y = 7$
b) $5x + 4y = -8$
c) $2x - 3y = 9$
d) $y = 4x - 3$
e) $y = -\frac{3}{2}x + 4$
f) $2x + 3y = 6$

Aufgabe 3.100 (MDbatG)

Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle.

	Gleichung	Steigung m	y-Achsenabschnitt	Nullstelle
a)	$2x + y = 4$			
b)	$4x - 3y = 6$			
c)	$-6x - y = -3$			
d)	$x - 5y = 10$			
e)	$-3x + 4y = -12$			

Aufgabe 3.101 (xM4Wh8)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme (LGS) zeichnerisch, indem Sie die beiden Geraden zeichnen und deren Schnittpunkt grafisch bestimmen.

a) $y = 2x - 3$; $y = -\frac{1}{4}x + 1{,}5$
b) $y = -0{,}5x + 2$; $y = \frac{3}{4}x - 3$
c) $y = x + 1$; $y = -x + 3$
d) $y + 2 = 3x$; $4x - y = 4$
e) $y - 3x = -2$; $2x + y = 3$
f) $y + 4 = 0{,}5x$; $-3x - y = -3$

Aufgabe 3.102 (bp5RWY)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme (LGS) zeichnerisch, indem Sie die beiden Geraden zeichnen und deren Schnittpunkte bestimmen.

a) I $3x - y = 2$; II $x + 2y = 3$
b) I $6x + 2y = 12$; II $-2x + y = 1$
c) I $5x + 3y = 12$; II $\frac{4}{3}x - y = 5$
d) I $2x + 3y = 9$; II $\frac{5}{3}x - y = 4$
e) I $x - 2y = 4$; II $3x + y = 5$
f) I $x + \frac{1}{2}y = 2$; II $-2x + \frac{1}{3}y = -4$

Aufgabe 3.103 (Pke12s)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens.

a) $y = 3x - 2$; $y = -x + 6$
b) $x = 4y + 3$; $x = 2y - 1$
c) $y + 5x = -8$; $y - \frac{1}{3}x = 4$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.104 (nzs5fx)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens.

a) $3y = 5x + 13$
$3y = -2x - 7$

b) $2x - y = 4$
$x + y = -1$

c) $4x + 3y = 12$
$-5x + 3y = -3$

Aufgabe 3.105 (tpFAFf)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens.

a) $4x + 3y = 12$
$2x - y = 2$

b) $y = -x + 5$
$y = \frac{1}{2}x - 1$

c) $6x - 2y = 8$
$4x + y = 3$

d) $3x + 5y = 15$
$x - 2y = -1$

e) $2x + y = 7$
$5x - 3y = -4$

f) $y - \frac{1}{4}x = 1$
$2x + y = 6$

Aufgabe 3.106 (guy3ia)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe des Einsetzungsverfahrens.

a) $-3x + y = -6$
$y = 2x + 3$

b) $x = -2y + 6$
$5y + 3x = 9$

c) $4x - y = 9{,}5$
$y + \frac{1}{2}x = 4$

Aufgabe 3.107 (DZNXNG)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe des Einsetzungsverfahrens.

a) $2y = 4x - 6$
$3x + 2y = 18$

b) $5x = 2y - 4$
$5x + 3y = 21$

c) $4x + 2y = 16$
$2y = 3x + 2$

Aufgabe 3.108 (941uJx)

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe des Einsetzungsverfahrens.

a) $y = -3x + 4$
$x + y = 1$

b) $4x + y = 11$
$2x - 3y = -7$

c) $5x - 2y = 8$
$3x + y = 4$

d) $2x - y = 5$
$4x - 2y = 12$

e) $y = 0{,}5x + 3$
$3x + 4y = 20$

f) $4x + y = 10$
$y - 3x = 2$

Aufgabe 3.109 (X7E7yp)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mithilfe des Additions-/Subtraktionsverfahrens.

a) $-x + y = -4$
$-2x + y = -3$

b) $x + 3y = 4$
$2x + 3y = 6$

c) $2x - 2y = 2$
$-2x + y = 5$

d) $4x - y = 10$
$-4x + 3y = -6$

e) $3x + 2y = 8$
$-3x + 4y = 10$

f) $5x + 2y = 20$
$-5x + y = -5$

Aufgabe 3.110 (A2auYu)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mithilfe des Additions-/Subtraktionsverfahrens.

a) $-4x + 2y = -2$
$x + 3y = 11$

b) $3x + 5y = 19$
$-x + 2y = 1$

c) $2x - 3y = 7$
$-4x + y = -9$

d) $6x - y = 18$
$-3x + 2y = -12$

e) $x - 4y = -5$
$2x + y = 8$

f) $5x + 2y = 14$
$-2x + 3y = 1$

Aufgabe 3.111 (hDcD74)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mithilfe des Additions-/Subtraktionsverfahrens.

a) $2x + y = 6$
$x - y = 0{,}5$

b) $4x + 5y = -3$
$-7x + 6y = 5$

c) $2x - 3y = 4$
$5x + y = \frac{7}{4}$

d) $5x - y = 6$
$-3x + 4y = 2$

e) $x - \frac{1}{4}y = \frac{5}{6}$
$3x + 2y = 7$

f) $4x - y = 5$
$-2x + 3y = \frac{3}{2}$

○ **Aufgabe 3.112 (Dxhwvs)**

Kreuzen Sie für jedes Lineare Gleichungssystem (LGS), welches Lösungsverfahren besonders gut geeignet ist und begründen Sie Ihre Wahl (Gleichsetzungsverfahren = GV, Einsetzungsverfahren = EV, Additions-/Subtraktionsverfahren = ASV).

	LGS	GV	EV	ASV	Begründung
a)	$4x = 6y + 3$ $4x = -5y + 12$				
b)	$3x + 2y = 7$ $-3x + y = 1$				
c)	$2x - 3y = 4$ $x = 2 + y$				
d)	$2x - y = 8$ $-2x + 3y = 6$				
e)	$x - 2y = -5$ $x + y = 7$				

◒ **Aufgabe 3.113 (tvWT9g)**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems. Entscheiden Sie sich für ein aus Ihrer Sicht geeignetes Verfahren.

a) $3x + 5y = 8$
$-3x + y = 4$

b) $x - \frac{1}{3}y = 6$
$2x - y = 9$

c) $-2x - y = 3$
$4x + 3y = 12$

d) $x + 3y = 4$
$2x - 6y = -2$

e) $2x - 5y = -7$
$x + y = 7$

f) $5x - 10y = 15$
$2x - 4y = 6$

◒ **Aufgabe 3.114 (bYfQYN)**

a) Das Vierfache einer Zahl ist um drei kleiner als das Doppelte einer zweiten Zahl. Ziehen Sie vom Dreifachen der ersten Zahl die zweite Zahl ab, so ergibt sich 7. Finden Sie die beiden Zahlen.

b) Das Dreifache einer Zahl entspricht dem Sechsfachen einer zweiten Zahl. Subtrahieren Sie vom Vierfachen der zweiten Zahl das Fünffache der um 4 vergrößerten ersten Zahl, so erhalten Sie 12. Bestimmen Sie die beiden Zahlen.

c) Drei Tassen Tee und zwei Stück Kuchen kosten zusammen 15,20 Euro. Vier Tassen Tee und fünf Stück Kuchen kosten insgesamt 28,90 Euro. Wie viel kostet eine Tasse Tee und wie viel kostet ein Stück Kuchen?

d) Ein Sandwich und zwei Portionen Salat kosten 9,00 Euro, zwei Sandwiches und drei Portionen Salat kosten 15,50 Euro. Bestimmen Sie die Kosten für ein Sandwich und eine Portion Salat.

e) Nina und ihre Tochter Willow sind zusammen 45 Jahre alt. Vor zwei Jahren war Nina viermal so alt wie Willow. Wie alt sind die beiden heute?

○ **Aufgabe 3.115 (9hSpxD)**

Andrea und Vanessa haben kürzlich ihren Führerschein gemacht. Andrea hat für ihren Führerschein nur 18 Fahrstunden benötigt, während Vanessa 27 Fahrstunden nehmen musste. Insgesamt hat Andrea 1866 Euro und Vanessa 2559 Euro bezahlt, jeweils inklusive einer festen Anmeldegebühr in gleicher Höhe.

a) Wie viel kostet eine einzelne Fahrstunde?

b) Wie hoch ist die Anmeldegebühr?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.116 (BPXB31)



Vor etwa 2300 Jahren soll der berühmte griechische Mathematiker Euklid von Alexandria (ca. 365–300 v. Chr.) seinem Schüler folgende Aufgabe gestellt haben:

"Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eselchens Mutter. Und die Eselin seufzte sehr; da sagte das Söhnlein: Mutter, was klagst und stöhnst du doch wie ein jammerndes Mägdelein? Gib mir ein Pfund ab, so trag ich doppelte Bürde. Nimmst du es aber von mir, gleich viel dann haben wir beide.
Rechne mir aus, wenn du kannst, mein Bester, wie viel sie getragen!"

Aufgabe 3.117 (nAGZ3N)



Leonhard Euler (1707–1783 n. Chr.) war nicht nur ein Pionier der Strömungslehre, sondern auch ein genialer Mathematiker. In seiner "Vollständigen Anleitung zur Algebra" stellte er folgende Aufgabe:

"Zwei Personen sind 29 Rubel schuldig; nun hat zwar jeder Geld, doch nicht so viel, dass er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte; darum sagte der erste zum anderen: Gibst du mir zwei drittel deines Geldes, so kann ich die Schuld sogleich allein bezahlen.
Der andere antwortete dagegen: Gibst du mir drei Viertel deines Geldes, so kann ich die Schuld allein bezahlen."

Wie viel Geld hat jeder?

Eulers Buch
Unter folgendem QR-Code finden Sie Eulers Buch "Vollständige Anleitung zur Algebra"

Aufgabe 3.118 (7zjSuv)

Ein Haluterfarmer hält auf der Außenwelt ZY-217 im System Centauri 4 in einem Gehege von 59 mal 43,7 Centaurimeilen insgesamt 26 Tiere. Es handelt sich um neunbeinige Xorenus und fünfbeinige Sunerox, die zusammen 210 Beine haben. Wie viele Tiere jeder Sorte befinden sich im Gehege?

Aufgabe 3.119 (1DAsTw)

Mike und Nina erben zusammen 20.000 Euro. Nina soll doppelt so viel wie Mike erhalten. Wie viel Geld erhält jeder?

Aufgabe 3.120 (qnEP8t)

In der Jugendherberge "Bergblick" können 150 Gäste in insgesamt 30 Zimmern übernachten. Die Zimmer sind entweder Vierbettzimmer oder Sechsbettzimmer. Die Jugendherberge ist regelmäßig voll ausgebucht, insbesondere in der Ferienzeit.
Wie viele Vierbettzimmer und wie viele Sechsbettzimmer hat die Jugendherberge?

Aufgabe 3.121 (tCZnaV)

Nina kauft auf dem Wochenmarkt Obst und sagt zum Händler: "Ich nehme vier Pfund Äpfel und drei Pfund Mandarinen. Hier sind passend 8 Euro." Der Händler beginnt, die Bestellung einzupacken, doch Nina ändert ihre Meinung: "Ach, ich nehme doch ein Pfund weniger Äpfel, aber dafür ein Pfund mehr Mandarinen." Daraufhin sagt der Händler: "Dann bekommst du 60 Cent zurück." Was kostet ein Pfund Äpfel, und was kostet ein Pfund Mandarinen?

Aufgabe 3.122 (YWmrri)

Auf dem Wochenmarkt zahlt Nina für zwei Kakis und drei Kiwis insgesamt 2,35 Euro. Am gleichen Stand kauft ihre Nachbarin fünf Kakis und vier Kiwis für genau 4,51 Euro. Wie viel kostet eine Kaki, und wie viel kostet eine Kiwi?

Aufgabe 3.123 (nUQiHE)

Die Eintrittspreise für ein Museum unterscheiden sich je nach Personengruppe: Schüler (mit Schülerausweis) zahlen einen ermäßigten Preis, während Erwachsene, wie Lehrer, den regulären Preis bezahlen.
Eine Gruppe von 17 Schülern und zwei Lehrern besuchte bei einer Klassenfahrt das Museum für Kunst und Gewerbe. Die Gesamtkosten des Besuchs betrugen 164 Euro.
Eine andere Klasse mit 22 Schülern und einem Lehrer besuchte das selbe Museum und zahlte insgesamt 190 Euro.
Berechnen Sie, wie viel eine Eintrittskarte für einen Schüler und für einen Lehrer kostet.

Aufgabe 3.124 (J3LpWr)

Sie suchen nach Malzubehör und entdecken zwei unterschiedliche Sets:

- 1. Set: 1 Zeichenblock und 6 Buntstifte kosten zusammen 6,80 Euro.
- 2. Set 2: 2 Zeichenblöcke und 10 Buntstifte kosten zusammen 12,40 Euro.

a) Sie benötigen jedoch 4 Zeichenblöcke und 14 Buntstifte kaufen. Wie viel müssten Sie dafür bezahlen?

b) Warum bezahlen Sie wahrscheinlich mehr als die in Teilaufgabe a) berechneten Preise?

Aufgabe 3.125 (TWDTQk)

Mike möchte Nina einen Blumenstrauß zum Geburtstag schenken. Im Blumenladen werden zwei fertige Sträuße angeboten:

- 1. Strauß: 1 Lilie und 4 Tulpen für 12,50 Euro.
- 2. Strauß: 2 Lilien und 6 Tulpen für 19,50 Euro.

Mike möchte einen Strauß mit 3 Lilien und 8 Tulpen zusammenstellen. Wie viel müsste er für diesen Strauß bezahlen?

Aufgabe 3.126 (g4BT5e)



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.127 (LJk1Wt)

Nach einem Starkregen stand Wasser in einer Baugrube, das mit Hilfe von zwei Pumpen abgepumpt wurde. Nachdem die erste Pumpe 4 Stunden und die zweite Pumpe 3 Stunden in Betrieb war, waren 60 % des Wassers entfernt. Um den Rest zu beseitigen, lief die erste Pumpe weitere 3 Stunden, während die zweite Pumpe noch 1,5 Stunden arbeitete.

a) Wie viel Prozent der Baugrube kann jede Pumpe in einer Stunde abpumpen?
b) Wie lange würde jede Pumpe allein benötigen, um die Baugrube vollständig leer zu pumpen?

Aufgabe 3.128 (YyiQYW)

Ein rechteckiger Wassertank im Garten enthält 164 Liter Wasser. Durch einen geöffneten Ablauf fließen jede Minute 12 Liter Wasser aus dem Tank.

a) Stellen Sie die Gleichung w(x) auf, mit der die verbleibende Wassermenge (in Litern) nach x-Minuten berechnet werden kann.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion w(x) in ein geeignetes Koordinatensystem. Stellen Sie sicher, dass die Achsen richtig skaliert sind und relevante Punkte deutlich markiert werden.
c) Bestimmen Sie anhand des Graphen, wie viele Minuten es dauert, bis der Tank vollständig leer ist.
d) Prüfen Sie Ihr Ergebnis aus c) rechnerisch.

Aufgabe 3.129 (BDM586)

Beziehen Sie sich noch mal auf die Situationsbeschreibung und Funktion aus Aufgabe 3.24. Beantworten Sie nun die folgenden Fragen algebraisch:

a) Nach welcher Zeit (hh:mm) wäre das Aquarium theoretisch völlig leer?
b) In der Praxis lässt sich das Wasser jedoch nie komplett ablassen. Wie lange (hh:mm) dauert es daher bis sich nur noch 5 cm Wasser im Aquarium befinden?

Aufgabe 3.130 (8G7P5K)

Ein rechteckiger Konferenzraum soll mit zwei diagonalen LED-Lichtleisten an der Decke ausgestattet werden, die sich an einer zentralen Stelle kreuzen. Der Raum ist 10 m lang und 6 m breit. Die Lichtleisten verlaufen jedoch nicht exakt von Ecke zu Ecke, sondern beginnen und enden an unterschiedlichen Punkten der Decke:

- **Leuchte 1**: Diese beginnt bei A(2|0) und endet bei B(8|6).
- **Leuchte 2**: Diese verläuft von C(0|4) zu D(10|2).



Die beiden Lichtleisten sollen sich an einem Punkt kreuzen, an dem ein zusätzlicher LED-Spot installiert werden soll, um den Raum optimal zu beleuchten.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen l_1 und l_2 der beiden Lichtleisten auf.
b) Berechnen Sie den Kreuzungspunkt der beiden Lichtleisten.
c) Skizzieren Sie die Raumdecke im Koordinatensystem, zeichnen Sie die beiden Lichtleisten ein und markieren Sie den Kreuzungspunkt und diskutieren Sie, ob der Kreuzungspunkt an einer idealen Stelle für die Beleuchtung des Raumes liegt, und schlagen Sie gegebenenfalls alternative Positionen oder zusätzliche Lichtlösungen vor.
d) Berechnen Sie die Länge der beiden Lichtleisten. Begründen Sie, warum diese Information für die Planung der Lichtinstallation wichtig ist.

◒ **Aufgabe 3.131 (skjqjA)**

Formulieren Sie die folgenden Rätsel als Gleichungssysteme und lösen Sie diese.

a) Die Summe zweier Zahlen beträgt 72. Subtrahieren Sie vom Dreifachen der ersten Zahl die zweite Zahl, so erhalten Sie 45.

b) Die Differenz zweier Zahlen beträgt 24. Addieren Sie zum Doppelten der ersten Zahl das Vierfache der zweiten Zahl, so erhalten Sie 132.

c) Die Summe aus dem Fünffachen einer Zahl und dem Dreifachen einer zweiten Zahl beträgt 71. Wenn Sie vom Sechsfachen der ersten Zahl das Doppelte der zweiten Zahl subtrahieren, erhalten Sie 46.

d) Das Doppelte der ersten Zahl plus das Vierfache der zweiten ergibt 62. Vom Dreifachen der ersten Zahl abzüglich der zweiten Zahl bleibt 2.

◒ **Aufgabe 3.132 (vJfdvG)**

a) In einem Streichelzoo sind Hühner und Ziegen. Gemeinsam haben sie 50 Köpfe und 140 Beine. Wie viele Hühner und wie viele Ziegen befinden sich im Streichelzoo?

b) In einer Ferienanlage gibt es 20 Wohnungen, die entweder für 4 Personen oder für 6 Personen ausgestattet sind. Insgesamt können 92 Personen in der Anlage untergebracht werden. Wie viele 4-Personen- und wie viele 6-Personen-Wohnungen gibt es?

c) Auf einem Wochenmarkt kosten zwei Säcke Kartoffeln und drei Kisten Äpfel zusammen 96 Euro. Drei Säcke Kartoffeln und zwei Kisten Äpfel kosten zusammen 102 Euro. Wie teuer ist ein Sack Kartoffeln und wie teuer ist eine Kiste Äpfel?

d) Ein Café bietet Sandwiches und Getränke an. Drei Sandwiches und zwei Getränke kosten 23,00 Euro, während vier Sandwiches und fünf Getränke 38,25 Euro kosten. Berechnen Sie den Preis für ein Sandwich und ein Getränk.

● **Aufgabe 3.133 (uw9ufT)**

Für ein Lagerhaus wird eine Rampe geplant, um den Zugang für Gabelstapler zur Ladefläche zu ermöglichen. Bei der Gestaltung müssen die Anforderungen der *Arbeitsstättenverordnung* (ArbStättV) und der *Technischen Regeln für Arbeitsstätten* (ASR A1.8 "Verkehrswege") berücksichtigt werden. Laut den Vorschriften darf die Neigung der Rampe für motorisierte Frontstapler maximal 5° betragen, um einen sicheren Betrieb zu gewährleisten. Für manuell bewegte Transportmittel gilt eine Grenze von 3,5°.

Der erste Entwurf sieht eine Rampe vor, die vom Boden (A(0|0)) bis zu einer Höhe von 1,6 m ansteigt und an der horizontalen Distanz von 20 m endet (B(20|1,6)). Um den Betrieb weiter zu optimieren, wird auch ein alternatives Design geprüft, bei dem die Rampe 27 m lang ist, aber auch im Punkt B endet.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen beider Rampen, welche die Höhe h (in m) in Abhängigkeit von der horizontalen Distanz x (in m) beschreibt.

b) Ermitteln Sie die Steigungswinkel beider Rampen.

c) Stellen Sie die Steigungen den rechtlichen Anforderungen aus der ArbStättV und der ASR A1.8 gegenüber. Begründen Sie abschließend, welches Rampendesign Sie für das Lagerhaus empfehlen würden.

◒ **Aufgabe 3.134 (qPHEtx)**

Ein Schreiner plant eine rechteckige Tischplatte mit den Maßen 2×1 m. Zwei diagonale Einlagen aus dunklerem Holz sollen die Tischplatte optisch unterteilen.

– Einlage 1 verläuft von der unteren linken Ecke A(0|0) zur oberen rechten Ecke B(2|1).

– Einlage 2 verläuft von der oberen linken Ecke C(0|1) zur unteren rechten Ecke D(2|0).

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der beiden Einlagen.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Einlagen.

c) Skizzieren Sie die Tischplatte mit den Einlagen und dem Schnittpunkt und prüfen Sie, ob dieser Punkt die Tischplatte exakt in vier gleich große Flächen unterteilt.

d) Diskutieren Sie, wie die Gestaltung angepasst werden könnte, wenn die linke Fläche größer sein soll, um Platz für ein besonderes Muster zu schaffen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



3.8 EIN BLICK IN DIE FINANZMATHEMATIK – TEIL I

Dieses Kapitel bietet Ihnen eine erste Einführung in die grundlegenden Konzepte der Finanzmathematik. Schritt für Schritt wird dieses Verständnis vertieft. Daher ist es hilfreich, sich die neu eingeführten Begriffe direkt einzuprägen, da später weitere Konzepte darauf aufbauen werden. Die nachfolgend erläuterten Fachbegriffe sollten Ihnen aus mathematischer Perspektive bereits aus vorherigen Kapiteln vertraut sein. Dennoch werden in der Finanzwelt, trotz ihres mathematischen Ansatzes, spezielle Begriffe verwendet, um bestimmte Zusammenhänge oder Schnittpunkte präzise zu beschreiben.

Definition (SZTV8D)
Die **Kostenfunktion** K(x) beschreibt die Gesamtkosten, die bei der Produktion einer bestimmten Menge x entstehen. Dabei gilt $x \in [0 ; x_{max}]$, wobei x_{max} die **Kapazitätsgrenze** darstellt. Die Gesamtkosten setzen sich aus **fixen Kosten** K_f und **variablen Kosten** $K_v(x)$ zusammen: $K(x) = K_v(x) + K_f$

ⓘ

sprich: x ist Element zwischen null und x_{max}

Fixe Kosten sind unabhängig von der Produktionsmenge und fallen auch dann an, wenn kein einziges Produkt hergestellt wird (z. B. Miete, Gehälter, Lagerkosten). Variable Kosten hingegen hängen direkt von der Produktionsmenge ab (z. B. Materialkosten). Die Kostenfunktion ist somit ein Werkzeug, um die Abhängigkeit der Gesamtkosten von der produzierten Menge darzustellen. Der Wertebereich von x beschränkt sich auf realistisch mögliche Produktionsmengen. Negative Stückzahlen oder Mengen über der Kapazitätsgrenze machen in der Praxis keinen Sinn.

Die **Erlösfunktion** E(x) gibt den Gesamtbetrag an, den ein Unternehmen durch den Verkauf einer Produktionsmenge x einnimmt. Dabei gilt $x \in [0 ; x_{max}]$. Der Erlös berechnet sich, indem der Stückpreis p mit der verkauften Stückzahl x multipliziert wird: $E(x) = p \cdot x$

Der Erlös ergibt sich aus den Einnahmen eines Unternehmens. Verkauft das Unternehmen beispielsweise ein Produkt zu einem festen Preis, dann steigen die Einnahmen linear mit der Anzahl der verkauften Produkte. Die Funktion E(x) ist damit eine wichtige Grundlage für die Gewinnberechnung.

Die **Gewinnfunktion** G(x) gibt an, wie viel Gewinn ein Unternehmen bei der Produktion und dem Verkauf einer bestimmten Menge x erzielt. Dabei gilt $x \in [0 ; x_{max}]$. Der **Gewinn** ist die Differenz aus Erlös und Kosten: $G(x) = E(x) - K(x)$

Der Gewinn zeigt, was nach Abzug aller Kosten vom Erlös übrig bleibt. Solange ein Unternehmen keine Produkte verkauft, macht es Verlust, da fixe Kosten anfallen. Mit steigendem Erlös und einer bestimmten Verkaufsmenge wird der Gewinn positiv. Die Gewinnfunktion hilft, diese Abhängigkeiten zu analysieren und zu optimieren.

Die **Gewinnschwelle** x_s ist die Produktionsmenge, ab der ein Unternehmen beginnt, Gewinn zu erzielen. Sie wird durch die Gleichung $E(x) = K(x)$ oder $G(x) = 0$ bestimmt. Der Punkt, an dem der Gewinn gleich null ist und Erlös und Kosten sich entsprechen, wird als **Break-Even-Point** (BEP) bezeichnet.

Die Gewinnschwelle gibt die Mindestanzahl der produzierten und verkauften Einheiten an, bei der weder Verlust noch Gewinn erzielt wird. Unternehmen streben danach, diese Schwelle möglichst schnell zu überschreiten, da sie ab diesem Punkt profitabel sind. Fixkosten spielen hierbei eine entscheidende Rolle, da sie gedeckt werden müssen, bevor ein positiver Gewinn erzielt werden kann. Der BEP wird häufig als Punkt $S(x_s|E(x_s))$ dargestellt, bei dem der Gewinn null ist und die Einnahmen genau die Kosten ausgleichen.

Ⓑ **Beispiel**

Gehen Sie von monatlichen Fixkosten in Höhe von 4.500 Euro aus. Diese Fixkosten fallen unabhängig von der Produktionsmenge an. Zusätzlich betragen die variablen Kosten, also beispielsweise die Kosten pro hergestelltem Fahrrad, 250 Euro. Die Gesamtkosten setzen sich aus diesen beiden Komponenten zusammen. Daraus ergibt sich die **Kostenfunktion**:
$K(x) = 250x + 4500$
Die Funktion ist linear, mit einer Steigung von 250 (den variablen Kosten) und einem y-Achsenabschnitt von 4.500 (den Fixkosten). Dies bedeutet, dass die Gesamtkosten mit jedem produzierten Fahrrad um 250 Euro steigen, während die Fixkosten konstant bleiben.

Wird ein Fahrrad zu einem Preis von 660 Euro verkauft, ergibt sich daraus die **Erlösfunktion**:
$E(x) = 660x$
Diese Funktion beschreibt die Einnahmen des Unternehmens, die direkt von der Anzahl der verkauften Fahrräder x abhängen. Da kein Erlös erzielt werden kann, wenn keine Fahrräder verkauft werden, beginnt die Erlösfunktion bei null (y-Achsenabschnitt = 0).

Wichtig
Bei der Subtraktion von K(x) muss dieser Term in Klammern stehen. Ansonsten ziehen Sie nur die variablen Kosten vom Erlös ab und addieren die Fixkosten dazu, statt sie abzuziehen.

Der Gewinn des Unternehmens ergibt sich aus der Differenz zwischen Erlös und Kosten. Mit den obigen Funktionen lässt sich die **Gewinnfunktion** aufstellen:
$G(x) = E(x) - K(x) = 660x - (250x + 4500) = 660x - 250x - 4500 = 410x - 4500$
Die Steigung von 410 zeigt, dass der Gewinn mit jedem zusätzlich verkauften Fahrrad um diesen Betrag steigt. Der y-Achsenabschnitt von –4500 gibt an, dass ein Verlust von 4.500 Euro entsteht, wenn keine Fahrräder verkauft werden.

Sie sind gefragt...
Rechnen Sie den zweiten Lösungsansatz E(x) = K(x) selbstständig!

Um die **Gewinnschwelle** zu berechnen, also die Menge an Fahrrädern, die verkauft werden muss, damit das Unternehmen weder Verlust noch Gewinn erzielt, wird die Gewinnfunktion gleich null gesetzt:

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 \\ 0 &= 410x - 4500 \quad | +4500 \\ 410x &= 4500 \quad | : 410 \\ x &= 10{,}976 \end{aligned}$$

Mathematisch gesehen liegt die Gewinnschwelle also bei etwa 10,98 Fahrrädern.
Da jedoch nur ganze Fahrräder verkauft werden können, würde die Antwort im Sachzusammenhang "11 Fahrräder" lauten. Geben Sie jedoch **IMMER** auch den genauen Wert in Ihrer Antwort an! Ein Antwortsatz könnte lauten:
Das Unternehmen erzielt ab einer Menge von 11 verkauften Fahrrädern (x = 10,98) Gewinn.

Der **Break-Even-Point** gibt zusätzlich zur benötigten Verkaufsmenge auch den entsprechenden Erlös an. Wird die Verkaufsmenge x = 10,976 eingesetzt, ergibt sich der Erlös:
$E(10{,}976) = 660 \cdot 10{,}976 = 7244{,}16$
Das bedeutet, dass der Break-Even-Point bei einer Verkaufsmenge von 10,98 Stück mit einem Erlös von etwa 7.244,16 Euro liegt. Dieser Punkt zeigt an, dass die Einnahmen gerade ausreichen, um die Gesamtkosten zu decken, und ab diesem Punkt Gewinne erzielt werden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.135 (vNyzGb) ○

Für die Herstellung der Haselnuss-Schokoladencreme Nocciella fallen variable Kosten von 5 GE pro Mengeneinheit und fixe Kosten von 120 GE an. Die maximale Produktionskapazität liegt bei 20 ME.

Hinweis
GE = Geldeinheiten
ME = Mengeneinheiten

a) Erstellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion.
b) Die Fixkosten steigen um 18 %. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der neuen Kostenfunktion.
c) Zeichnen Sie beide Graphen aus den Teilen a) und b) in ein gemeinsames Koordinatensystem. Welche Auswirkungen hat die Erhöhung der Fixkosten auf die Darstellung der Kostenfunktion?

Aufgabe 3.136 (mdXaq1) ○

Bei der Produktion von Speicherchips fallen feste Kosten in Höhe von 18.000 Euro an. Die Herstellung eines Chips kostet 0,25 Euro.

a) Stellen Sie die Kostenfunktion in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl auf.
b) Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Produktion von 300.000 Chips.
c) Bei welcher Produktionsmenge betragen die Gesamtkosten 36.000 Euro?

Aufgabe 3.137 (41FCDh) ○

Bei der Produktion eines Geräts fallen Fixkosten in Höhe von 10.000 Euro an. Die variablen Kosten, also die Produktionskosten pro Stück, betragen 50 Euro. Ein Gerät wird zu einem Preis von 120 Euro verkauft.

a) Bestimmen Sie die Funktion für die Gesamtkosten bei der Produktion von x Geräten.
b) Stellen Sie die Funktion für den Erlös bei der Produktion und dem Verkauf von x Geräten auf.
c) Ab welcher Produktionsmenge erzielt das Unternehmen einen Gewinn? Geben Sie den Verlustbereich und den Gewinnbereich an.
d) Zeichnen Sie die beiden Funktionen aus den Teilen a) und b) in ein gemeinsames Koordinatensystem. Wählen Sie dafür eine geeignete Skalierung.

Aufgabe 3.138 (16K7iM) ○

Bearbeiten Sie die gleichen Teilaufgaben wie in 3.137 jedoch mit folgendem Kontext:
Bei einer Tischfabrik betragen die Fixkosten 24.000 Euro, die variablen Kosten je Tisch 30,50 Euro und der Netto-Verkaufspreis pro Tisch 72,80 Euro. Ermitteln Sie zusätzlich die bei Erreichen der Gewinnschwelle für die Tische zu zahlende Umsatzsteuer von 19 % auf den Erlös.

Aufgabe 3.139 (sDXu34) ◒

Eine Firma stellt Druckgeräte her und hat eine maximale tägliche Produktionskapazität von 180 Stück. Die folgende Tabelle gibt die Kosten und Erlöse pro Tag an:

x (in ME)	E(x) (in GE)	K(x) (in GE)
0	0	120
10	24	132
20	48	144

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für die Erlösfunktion E(x) und die Kostenfunktion K(x). Zeichnen Sie die Funktionen in ein Koordinatensystem.
b) Berechnen Sie den Break-Even-Point und interpretieren Sie ihn im Sachzusammenhang.
c) Wie hoch ist der Gewinn, wenn die maximale Produktionskapazität von 180 ME ausgeschöpft wird?
d) Die Fixkosten werden durch Rationalisierungsmaßnahmen um 20 % gesenkt. Wie verändert sich der Break-Even-Point?
e) Wie hoch ist die Produktionsmenge, ab der das Unternehmen ohne Rationalisierungsmaßnahmen einen Gewinn von mindestens 500 GE erzielt?

○ **Aufgabe 3.140 (fHTpby)**

Ein Unternehmen produziert ein Produkt mit der Kostenfunktion $K(x) = 2{,}8x + 45$ und einem festen Verkaufspreis von 16 Euro pro Stück.

a) Überprüfen Sie, ob der Gewinn durch eine lineare Funktion dargestellt werden kann.
b) Zeichnen Sie die Graphen der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem.

● **Aufgabe 3.141 (gLtXzT)**

In einem Unternehmen werden zwei Produktionsmethoden untersucht:

– Verfahren A: Mit computergesteuerten Maschinen betragen die Fixkosten 380.000 GE, und die variablen Kosten belaufen sich auf 27 GE/ME.
– Verfahren B: Handbetriebene Maschinen verursachen Kosten von 210.000 GE bei 1.000 ME sowie 580.000 GE bei 6.000 ME.

a) Stellen Sie die Funktionsterme für die Kostenfunktionen von Verfahren A und B auf.
b) Berechnen Sie die Gesamtkosten für beide Verfahren bei einer Produktionsmenge von 3.500 ME und 7.500 ME.
c) Entscheiden Sie, welches Verfahren bei welcher Produktionsmenge wirtschaftlicher ist, und begründen Sie Ihre Wahl.
d) Für den Marktpreis von 91 GE/ME liegen die Absatzprognosen zwischen 5.000 ME und 10.000 ME. Bestimmen Sie die Gewinnschwelle für beide Verfahren.

○ **Aufgabe 3.142 (QdHtAk)**

Ein Unternehmen stellt ein Produkt her, bei dem die variablen Stückkosten 4 GE betragen. Zusätzlich fallen Fixkosten von 35 GE an. Der Verkaufspreis je Produkt beträgt 9 GE.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion.
b) Ermitteln Sie die Stückzahl, ab der das Unternehmen Gewinn erzielt. Wie wird diese Stelle bezeichnet?
c) Wie viele Produkte müssen verkauft werden, um einen Gewinn von 140 GE zu erzielen.

◒ **Aufgabe 3.143 (4cEzwz)**

Ein Unternehmen hat bei einer Produktion von 120 Stück Kosten in Höhe von 31.800 Euro und bei 270 Stück Kosten von 37.200 Euro. Der Verkaufspreis beträgt 97 Euro pro Stück.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Kostenfunktion.
b) Berechnen Sie die Gesamtkosten bei einer Produktion von 450 Stück.
c) Stellen Sie die Erlösfunktion sowie die Gewinnfunktion auf.
d) Ermitteln Sie die Stückzahl, ab der das Unternehmen Gewinn erzielt (Break-Even-Point).

○ **Aufgabe 3.144 (8T8KVa)**

Ein Betrieb weist folgende Produktionsdaten für den Monat Januar auf:
Fixkosten betragen 13.500 Euro, die variablen Kosten liegen bei 5 Euro pro Stück, und der Verkaufspreis pro Stück beträgt 7 Euro.

a) Berechnen Sie die Gesamtkosten für eine Produktionsmenge von 5.800 Stück.
b) Ermitteln Sie den Gesamterlös bei einer Produktionsmenge von 5.800 Stück.
c) Berechnen Sie den Gewinn bei dieser Produktionsmenge.
d) Bestimmen Sie die Produktionsmenge, bei der der Gewinn erstmals positiv wird.

◒ **Aufgabe 3.145 (NG8Shc)**

Ein Unternehmen produziert Pullover die für 8,10 Euro pro Stück an den Großhandel verkauft werden. Die Fixkosten belaufen sich auf 88.000 Euro. Wenn 25.000 Stück produziert werden, liegen die Gesamtkosten bei 180.000 Euro.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Kostenfunktion.
b) Erstellen Sie die Funktionsgleichung der Erlösfunktion.
c) Stellen Sie die Gewinnfunktion auf.
d) Berechnen Sie die Stückzahl, ab der das Unternehmen Gewinn macht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 3.146 (phVkLW) ○

In der Fertigungsabteilung eines Herstellers für Elektrogeräte fallen monatlich 23.800 Euro fixe Kosten an. Die variablen Stückkosten betragen 20 Euro. Pro Monat können maximal 2.400 Stück produziert werden. Der Verkaufspreis pro Produkt beträgt 32 Euro.

a) Erstellen Sie die Kostenfunktion, die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion.
b) Berechnen Sie die Gewinnschwelle.
c) Ermitteln Sie den Gewinn bei einer Produktionsmenge von 1.800 Stück und bei voller Kapazitätsauslastung.
d) Zeichnen Sie die Graphen der Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem.
e) Berechnen Sie die neue Gewinnschwelle, wenn sich die variablen Kosten um 3 Euro pro Stück erhöhen.

Aufgabe 3.147 (5fkM8t) ●

YouTube

Eine Glasmanufaktur produziert monatlich maximal 50.000 Gläser. Die Fixkosten betragen 78.000 Euro, und die variablen Kosten pro Glas belaufen sich auf 1,80 Euro.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion.
b) Berechnen Sie die durchschnittlichen Kosten pro Stück bei voller Kapazitätsauslastung.
c) Ermitteln Sie die durchschnittlichen Kosten pro Glas, wenn die Kapazitätsauslastung bei 70 % liegt.
d) Der Verkaufspreis pro Glas beträgt 9 Euro. Wie hoch ist der Gewinn pro Stück bei voller Auslastung?

Aufgabe 3.148 (YY9ZFt) ◒

Ein Produktionsbetrieb hat die Kostenfunktion $K(x) = 4{,}5x + 15$. Bei einer Produktionsmenge von 7 ME wird ein Erlös von 91 GE erzielt. Die maximale Produktionsmenge beträgt 11 ME.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichung der Erlösfunktion auf.
b) Formulieren Sie die Gleichung der Gewinnfunktion.
c) Berechnen Sie die Produktionsmenge, ab der das Unternehmen Gewinn erzielt (Gewinnschwelle).

Aufgabe 3.149 (jmenQP) ●

Ein Hersteller von Elektronikbauteilen hat monatliche Fixkosten in Höhe von 33.000 Euro. Die variablen Kosten pro Bauteil liegen bei 7 Euro, und der Verkaufspreis beträgt 15 Euro. Aufgrund begrenzter Produktionskapazitäten können maximal 5.000 Bauteile pro Monat gefertigt werden.

a) Bestimmen Sie die Kosten-, Erlös- und Gewinnfunktion.
b) Berechnen Sie den maximalen Gewinn, den das Unternehmen erzielen kann, wenn alle Kapazitäten ausgeschöpft werden.
c) Bei einer Produktionsmenge von 2.500 Bauteilen bleibt die Hälfte der Kapazität ungenutzt. Wie hoch sind in diesem Fall die durchschnittlichen Kosten pro Bauteil?
d) Der Betrieb überlegt, in eine Produktionsoptimierung zu investieren, wodurch die Fixkosten um 10 % steigen, die variablen Kosten jedoch um 1 Euro sinken. Wie wirkt sich diese Änderung auf den maximal möglichen Gewinn aus?

Aufgabe 3.150 (ASUpnj) ◒

Ein Unternehmen plant, ein neues Produkt auf den Markt zu bringen. Die Produktionskosten setzen sich aus 18.000 Euro Fixkosten und variablen Kosten von 12 Euro pro Stück zusammen. Der Verkaufspreis beträgt zunächst 25 Euro pro Stück.

a) Formulieren Sie die Kostenfunktion, Erlösfunktion und Gewinnfunktion.
b) Berechnen Sie die Produktionsmenge, ab der ein Gewinn erzielt wird.
c) Aufgrund von Marktstudien wird vorgeschlagen, den Verkaufspreis auf 22 Euro pro Stück zu senken, um mehr Produkte abzusetzen. Wie verändert sich die Gewinnschwelle bei diesem Preis?

3.9 CHECKLISTE – LINEARE FUNKTIONEN

Mit der Checkliste können Sie als Vorbereitung auf die Klassenarbeit überprüfen, welche grundlegenden Themenbereiche der Unterrichtsreihe Sie gut können bzw. wo Sie noch unsicher sind. Wenn Sie die Checkliste erfolgreich bearbeitet haben, sollten Sie in der Klassenarbeit auf jeden Fall eine ausreichende Leistung erzielen.

	Meine Kompetenzen (bitte kreuzen Sie entsprechend an):	Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
1	Ich kann folgende Begriffe richtig erläutern: x-Achse, y-Achse, Nullstelle, y-Achsenabschnitt, Graph, Steigung, Steigungsdreieck				
2	Ich kenne die allgemeine Darstellung einer linearen Funktion und weiß, was m und b bedeuten.				
3	Ich kann Funktionswerte für vorgegebene x-Werte bestimmen.				
4	Ich kann zu einem vorgegebenen y-Wert den entsprechenden x-Wert bestimmen.				
5	Ich kann zeichnerisch und rechnerisch bestimmen, ob ein Punkt auf dem Graphen einer Funktion liegt oder nicht.				
6	Ich kann an einer linearen Funktionsgleichung die Steigung und den Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse ablesen.				
7	Ich kann den Schnittpunkt einer linearen Funktion mit der y-Achse und mit der x-Achse (Nullstelle) berechnen.				
8	Ich kann an einem Graphen ein Steigungsdreieck einzeichnen und die Steigung bestimmen.				
9	Ich kann den Graphen einer gegebenen Funktion zeichnen.				
10	Ich kann anhand des Graphen einer Funktion die zugehörige Funktionsgleichung aufstellen.				
11	Ich kann mithilfe von zwei gegebenen Punkten die Steigung bestimmen.				
12	Ich kann bei gegebener Steigung und einem Punkt die Funktionsgleichung bestimmen.				
13	Ich kann eine lineare Funktionsgleichung anhand zweier Punkte berechnen.				

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

		Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
14	Ich kenne die Lagebeziehungen von Geraden zueinander.				
15	Ich kann den Schnittpunkt zweier lin. Funktionen berechnen.				
16	Ich kann lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten mit dem Gleichsetzungsverfahren lösen.				
17	Ich kann lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten mit dem Einsetzungsverfahren lösen.				
18	Ich kann lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren lösen.				
19	Ich kann in Sachsituationen die Bedeutung der Nullstelle erkennen.				
20	Ich kann in Sachsituationen die Bedeutung der Steigung erkennen.				
21	Ich kann in Sachsituationen die Bedeutung des y-Achsen-abschnitts erkennen.				
22	Ich kann in Sachsituationen die Bedeutung des Schnittpunkts zweier linearer Funktionen erkennen.				
23	Ich kann Sachsituationen in lineare Gleichungen umwandeln.				

Hilfestellung

Beim Durchgehen der Checkliste sind noch folgende Fragen aufgetaucht:

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.1 EINFÜHRUNG IN QUADRATISCHE FUNKTIONEN

Situationsbeschreibung – Badminton-Spiel
Nina und Mike spielen Badminton im Park. In einem spannenden Ballwechsel fängt Mike den Federball kurz vor dem Boden auf und schlägt ihn in einem weiten Bogen über das Netz. Der Ball fliegt in einer symmetrischen Kurve und landet genau 8 Meter entfernt auf Ninas Spielfeldseite. "Der Ball ist ja in einer perfekten Kurve geflogen", bemerkt Nina. "Klar! Man könnte diese Kurve sicher mit einer Parabel beschreiben", sagt Mike.

Sie beginnen, die Daten des Ballflugs zu notieren: Der Ball erreicht seinen höchsten Punkt bei $x = 0$ mit einer Höhe von 1,8 Metern. Der Ball startet bei $x = -4$ und trifft bei $x = 4$ auf den Boden auf. Gehen Sie vereinfacht bei beiden x-Werten von Bodenhöhe, also $y = 0$ aus.

Quadratische Funktion (cTMbQk)
Eine Funktion der Form $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ mit $a \neq 0$ nennt man **Normalform** oder **quadratische Funktion**. Manchmal wird sie auch als **ganzrationale Funktion zweiten Grades** bezeichnet. Der Graph dieser Funktion hat die Form einer **Parabel**, die entweder nach oben oder nach unten geöffnet ist, abhängig vom Vorzeichen des Faktors a. Die Normalform der quadratischen Funktion wird durch drei charakteristische Werte bestimmt:

- Der **Streckungsfaktor (a)** entscheidet, ob die Parabel **gestreckt** oder **gestaucht** ist und ob sie nach oben ($a > 0$) oder nach unten ($a < 0$) geöffnet ist.
- Der **zweite Koeffizient (b)** beeinflusst die Verschiebung der Parabel entlang der x-Achse und beeinflusst die Lage des Scheitelpunkts.
- Der **y-Achsenabschnitt (c)** ist der Funktionswert bei $x = 0$. Grafisch gesehen entspricht er dem Punkt $(0|c)$, an dem die Parabel die y-Achse schneidet. Ist $c = 0$, verläuft die Parabel durch den Koordinatenursprung $(0|0)$.

Zusätzlich hat jede Parabel einen **Scheitelpunkt**, der den tiefsten Punkt (bei nach oben geöffneter Parabel) oder den höchsten Punkt (bei nach unten geöffneter Parabel) darstellt. Dieser Punkt ist ein zentrales Merkmal der quadratischen Funktion und lässt sich aus der Funktionsgleichung bestimmen.
Die einfachste Parabel ist die **Normalparabel $\mathbf{f(x) = x^2}$**. Diese hat ihren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung und ist symmetrisch zur y-Achse.
Das **Argument (x)**, auch einfach x-Wert genannt, ist die unabhängige Variable der Funktion. Setzt man einen x-Wert in die Funktion ein, erhält man als Ergebnis den zugehörigen **Funktionswert f(x)**, der auch als y-Wert bezeichnet wird. Die sogenannte **Funktionsvorschrift** $f(x) = ax^2 + bx + c$ beschreibt, wie der y-Wert von der Variablen x abhängt.

ⓘ
Andere Schreibweisen als die Normalform lernen Sie in den folgenden Kapiteln kennen.

gestreckt: schmaler als x^2
gestaucht: breiter als x^2

bei $f(x) = x^2$ ist $a = 1$, $b = 0$ und $c = 0$

Streckung einer Parabel (cTMbQk)
Die Funktion $f(x) = ax^2$ mit $a \neq 0$ hat als Schaubild eine Parabel, die aus der Normalparabel durch Streckung in y-Richtung mit dem **Streckungsfaktor** a hervorgeht. Der Streckungsfaktor wird auch als **Formfaktor** bezeichnet, da er die Form einer Parabel verändert.

ⓘ
Warum darf a nicht null sein?

Aufgabe 4.1 (uaQDF1)

Betrachten Sie zunächst die Normalparabel genauer:

a) Ergänzen Sie die gegebene Wertetabelle für die Normalparabel $f(x) = x^2$:

x	–2	–1	0	1	2
f(x)					

b) Zeichnen Sie die Funktion mit Hilfe der Wertetabelle in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse von $-2 \le x \le 2$; y-Achse: $0 \le y \le 5$)

c) Wie lauten die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel f(x)?

Aufgabe 4.2 (kQ56W6)

Welche der folgenden Gleichungen beschreiben quadratische Funktionen? Kreuzen Sie die richtigen Lösungen an:

a) ☐ $f(x) = 4x^2$
b) ☐ $f(x) = -3x + 2$
c) ☐ $f(x) = x^3 - 1$
d) ☐ $f(x) = 2 - x^2$
e) ☐ $f(x) = (x + 2)^2$
f) ☐ $f(x) = 7$
g) ☐ $f(x) = 3x^2 + x - 5$
h) ☐ $f(x) = (x - 1)(x + 3)$
i) ☐ $y + x^2 = 3$

Aufgabe 4.3 (isjMh1)

Die folgenden Punkte liegen alle auf der Parabel $f(x) = x^2$.
Bestimmen Sie jeweils die fehlende Koordinate x bzw. y. Sofern es zwei Lösungen gibt, geben Sie beide an.

A(5| y) B(–1,5| y) C(–4| y) D(2| y) E(x |2) F(x |49) G(x |0,64)

Aufgabe 4.4 (YPm7bX)

Untersuchen Sie, wie der Vorfaktor a die Form und Ausrichtung der Normalparabel beeinflusst, indem Sie die folgenden sechs Funktionen in **ein gemeinsames** Koordinatensystem zeichnen und jede Funktion beschriften.
(Koordinatensystem: x-Achse von $-4 \le x \le 4$; y-Achse: $-10 \le y \le 10$)

a) $f(x) = x^2$
b) $g(x) = 2x^2$
c) $h(x) = \frac{1}{2}x^2$
d) $i(x) = -x^2$
e) $j(x) = -2x^2$
f) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 4.5 (TQ1zw9)

Bestimmen Sie mit Hilfe der in Aufgabe 4.4 gezeichneten Parabeln den Einfluss des Vorfaktors a auf die Normalparabel. Ergänzen Sie die folgenden Sätze mit den Begriffen:
Normalparabel, *oben*, *unten*, *gestaucht*, *gestreckt*.

Für **a > 0** ist die Parabel nach _____ geöffnet.

Für **a < 0** ist die Parabel nach _____ geöffnet.

Für **a > 1** ist die Parabel nach oben geöffnet und _____.

Für **0 < a < 1** ist die Parabel nach oben geöffnet und _____.

Für **–1 < a < 0** ist die Parabel nach unten geöffnet und _____.

Für **a < –1** ist die Parabel nach unten geöffnet und _____.

Bei **a = 1** handelt es sich um die _____.

Bei **a = –1** handelt es sich um eine nach _____ geöffnete

"_____".

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.6 (dZHKXi)

Geben Sie jeweils zwei Funktionsgleichung an, sodass …

a) … die Parabel nach oben geöffnet und **etwas schlanker** als die Normalparabel ist.

b) … die Parabel nach oben geöffnet und **etwas breiter** als die Normalparabel ist.

c) … die Parabel nach unten geöffnet und **sehr breit** ist.

d) … die Parabel nach unten geöffnet und **sehr schlank** ist.

Aufgabe 4.7 (UE7NTw)

Kreuzen Sie für jede der folgenden Funktionen alle zutreffenden Eigenschaften an.

	Gleichung der Parabel	Normal-parabel	gestreckt	gestaucht	nach oben geöffnet	nach unten geöffnet
a)	$f(x) = -3x^2$					
b)	$f(x) = \frac{2}{3}x^2$					
c)	$f(x) = \frac{5}{4}x^2$					
d)	$f(x) = -1{,}5x^2$					

Aufgabe 4.8 (dxeygi)

Gegeben ist die quadratische Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Zeichnen Sie die Funktion in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse von $-4 \le x \le 4$; y-Achse: $-8 \le y \le 0$)

b) Wie unterscheidet sich die Form dieser Parabel von der Normalparabel $f(x) = x^2$? Beschreiben Sie die Änderungen mit den Begriffen gestaucht, gestreckt, nach unten geöffnet oder nach oben geöffnet.

Aufgabe 4.9 (Tg9KcN)

Die Funktionen $f(x) = 2x^2$, $g(x) = -x^2$ und $h(x) = \frac{1}{4}x^2$ sind gegeben.

a) Zeichnen Sie die drei Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse von $-6 \le x \le 6$; y-Achse: $-10 \le y \le 8$)

b) Vergleichen Sie die drei Parabeln:
– Welche der Parabeln ist am breitesten?
– Welche der Parabeln ist nach unten geöffnet?
– Welche der Parabeln ist am stärksten gestreckt?

Aufgabe 4.10 (UBJNsR)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^2 + c$. Untersuchen Sie den Einfluss der Parameter a und c auf die Parabel. Beantworten Sie folgende Fragen:

a) Was passiert mit der Parabel, wenn a positiv oder negativ ist?

b) Wie verändert sich die Parabel, wenn der Wert von a größer oder kleiner wird? Prüfen Sie für die folgenden Werte: $a = 2$, $a = \frac{1}{2}$ und $a = -3$.

c) Welche Auswirkungen hat der Parameter c auf die Lage der Parabel? Zeichnen Sie die Funktionen $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^2 - 3$ und $h(x) = -x^2 + 1$ in ein gemeinsames Koordinatensystem, um Ihre Überlegungen zu überprüfen.
(Koordinatensystem: x-Achse von $-2 \le x \le 2$; y-Achse: $-4 \le y \le 6$)

Aufgabe 4.11 (j6iHkN)

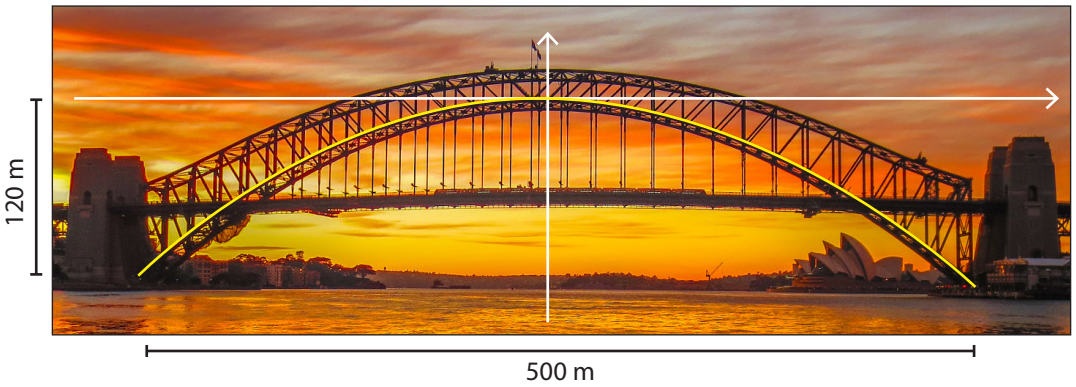
Untersuchen Sie den Einfluss des Parameters a auf die Symmetrie der Parabel.
Gegeben sind die Funktionen: $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 2$ und $h(x) = 3x^2 - 5$

a) Zeichnen Sie die Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse von $-2 \le x \le 2$; y-Achse: $-5 \le y \le 7$)

b) Beantworten Sie die folgenden Fragen:
– Liegen alle Parabeln symmetrisch zur y-Achse? Begründen Sie Ihre Antwort.
– Wie wirkt sich der Vorfaktor a auf die Öffnungsrichtung der Parabeln aus?

Aufgabe 4.12 (Deg4N6)

Die *Sydney Harbour Bridge*, eines der bekanntesten Wahrzeichen Australiens, wurde 1932 fertiggestellt und gilt als Meisterwerk der Ingenieurskunst. Ihre beeindruckende Stahlkonstruktion überspannt den Hafen von Sydney und verbindet die Stadtteile North Sydney und das zentrale Geschäftsviertel miteinander. In dieser Aufgabe soll lediglich der untere Bogen der Brücke betrachtet werden. Das Koordinatensystem wurde so gelegt, dass der höchste Punkt des unteren Bogens exakt im Ursprung liegt. Der Bogen wird durch eine quadratische Funktion beschrieben, deren Funktionsgleichung in der Form $f(x) = ax^2$ gesucht ist.
Bestimmen Sie rechnerisch den Streckungsfaktor a, indem Sie geeignete Punkte auf der Parabel nutzen, und geben Sie anschließend die vollständige Funktionsgleichung an.



Aufgabe 4.13 (3sDRyN)



Die *Plaka-Brücke*, die ursprünglich 1866 erbaut wurde, war eine der beeindruckendsten Steinbogenbrücken Griechenlands und ein Meisterwerk traditioneller Baukunst. Sie befand sich in der Nähe des Ortes Plaka und überspannte den Fluss Arachthos mit einem einzigen prächtigen Bogen. Mit ihrer eleganten Form fügte sie sich perfekt in die wilde Schönheit der Epirus-Region ein. Leider wurde die Brücke durch ein starkes Hochwasser am 1. Februar 2015 zerstört, doch dank intensiver Restaurierungsarbeiten und moderner Techniken konnte sie im Jahr 2020 originalgetreu wieder aufgebaut werden. Der ursprüngliche Bogen hatte eine Spannweite von 40 Metern, gemessen zwischen den tiefsten Punkten der Konstruktion. Vom höchsten Punkt des Bogens, dem Bogenscheitel, bis zur Wasseroberfläche betrug die Höhe etwa 21 Meter.
In dieser Aufgabe wird der Bogen als mathematische Parabel betrachtet, deren Funktionsgleichung gesucht ist. Das Koordinatensystem wird so gelegt, dass der Scheitelpunkt des Bogens im Ursprung liegt.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung des Brückenbogens in der Form $f(x) = ax^2$.
b) Berechnen Sie die Höhe des Bogens an der Stelle, an der die Brücke 20 Meter breit war.

Aufgabe 4.14 (vnfrML)

Betrachten Sie nochmal die Situationsbeschreibung dieses Kapitels. Nina und Mike analysieren den Flug des Federballs, der in einem hohen Bogen über das Netz fliegt.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Flugkurve in der Form $f(x) = ax^2 + c$.
b) Berechnen Sie die Höhe des Balls an der Stelle $x = 2$.
c) Bestimmen Sie, in welcher Entfernung vom Netz der Ball eine Höhe von 1,524 Metern (Netzoberkante) erreicht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.2 SCHEITELPUNKTFORM

Situationsbeschreibung – Radrennen
Nina und Mike lieben es, gemeinsam mit ihren Rennrädern durch die Natur zu fahren. Eines Tages beschlossen sie, ein kleines Wettrennen zu machen. Die Aufgabe war, so schnell wie möglich eine gerade Strecke von 100 Metern zu fahren. Beide bemerkten dabei, dass sie am Anfang erst beschleunigen mussten, bis sie schneller wurden. Als sie schließlich ihre Höchstgeschwindigkeit erreichten, konnten sie diese jedoch nicht die ganze Strecke halten und wurden wieder langsamer.

Nach dem Wettrennen fragte sich Nina: "Warum hat sich unsere Geschwindigkeit nicht konstant verhalten? Und wie könnte man diesen Verlauf, von langsam bis schnell und wieder langsam, mathematisch beschreiben?" Mike überlegte kurz und sagte: "Vielleicht hat das etwas mit einer Kurve zu tun, die wie eine Parabel aussieht. Wir sollten uns das genauer anschauen!"

Aufgabe 4.15 (qtfyQZ)
Untersuchen Sie zunächst die Schreibweise einer quadratischen Funktion in der sogenannten Scheitelpunktform: $\mathbf{f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e}$

a) Wählen Sie einen beliebigen **Wert für a, der zwischen –1,5 und 1,5** liegt, einen beliebigen **Wert für d, der zwischen –6 und 6 liegt** und einen beliebigen **Wert für e, der zwischen –5 und 5** liegt. Zeichnen Sie mit Hilfe der Tabellenfunktion Ihres Taschenrechners die entsprechenden Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem. Erstellen und zeichnen Sie drei verschiedene Funktionen auf diese Weise.
(Koordinatensystem: x-Achse von $-8 \le x \le 8$; y-Achse: $-10 \le y \le 10$)

Beispiel
Entscheiden Sie sich z. B. für $a = 1{,}5$, $d = 5$ und $e = 3$, zeichnen Sie die Funktion $f(x) = 1{,}5(x - 5)^2 + 3$.

b) Analysieren Sie die gezeichneten Graphen: Welchen Zusammenhang erkennen Sie zwischen der Funktionsgleichung und der Position des Graphen im Koordinatensystem?

c) Die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ wird, wie oben erwähnt, als Scheitelpunktform bezeichnet. Erläutern Sie, welche Bedeutung die Parameter a, d und e für den Verlauf und die Lage der Parabel haben.

d) Geben Sie ganz allgemein mit den Parametern an, welche Koordinaten der Scheitelpunkt der Funktion besitzt.

Aufgabe 4.16 (c11c8R)
Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel, die durch folgende Veränderungen der Normalparabel $f(x) = x^2$ entsteht und skizzieren Sie die Parabel in ein geeignetes Koordinatensystem.

a) Die Parabel wird zuerst um eine Einheit nach rechts verschoben, danach in y-Richtung mit dem Faktor 0,5 gestaucht und dann um drei Einheiten nach unten verschoben.

b) Die Parabel wird zuerst um drei Einheiten nach links verschoben, dann in y-Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt, an der x-Achse gespiegelt und zuletzt um vier Einheiten nach oben verschoben.

ⓘ **Scheitelpunktform (WGpKwt)**

Eine quadratische Funktion der Form $f(x) = a(x - d)^2 + e$ wird als Scheitelpunktform bezeichnet. Diese Darstellungsweise gibt den Scheitelpunkt der Parabel direkt an.

Die Scheitelpunktform der quadratischen Funktion wird durch drei charakteristische Werte beeinflusst:

- Der **Streckungsfaktor (a)** entscheidet, ob die Parabel gestreckt oder gestaucht ist und ob sie nach oben ($a > 0$) oder nach unten ($a < 0$) geöffnet ist.
- Der **zweite Koeffizient (d)** beschreibt die Verschiebung der Parabel in horizontaler Richtung: ein positiver Wert bedeutet eine Verschiebung nach rechts, ein negativer Wert bedeutet eine Verschiebung nach links.
- Der **dritte Koeffizient (e)** beschreibt die Verschiebung der Parabel in vertikaler Richtung: ein positiver Wert beschreibt eine Verschiebung nach oben, ein negativer Wert beschreibt eine Verschiebung nach unten.

Achtung
Ein *positives d* erscheint in der Klammer der Scheitelpunktform als negativ, da $-(+d) = -d$.
Ein *negatives d* erscheint in der Klammer der Scheitelpunktform als positiv, da $-(-d) = +d$

Diese Parameter ermöglichen es, die Eigenschaften der Parabel einfach zu analysieren und ihre Form sowie Lage im Koordinatensystem vollständig zu beschreiben.

Die beiden Koeffizienten d und e ergeben zusammen die Koordinaten des **Scheitelpunktes S(d|e)** der Parabel. Die Scheitelpunktform ermöglicht es daher, den Scheitelpunkt ohne zusätzliche Berechnungen abzulesen. Sie ist besonders nützlich für das Zeichnen von Parabeln und das Analysieren von Verschiebungen.

Ⓑ **Beispiel**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2(x - 3)^2 - 4$:

- $a = 2$: Die Parabel ist nach oben geöffnet und gestreckt.
- $d = 3$: Die Parabel ist um 3 Einheiten nach rechts verschoben.
- $e = -4$: Die Parabel ist um 4 Einheiten nach unten verschoben.

Der Scheitelpunkt der Parabel liegt demnach bei $S(3|-4)$.

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -0{,}5(x + 2)^2 + 5$:

- $a = -0{,}5$: Die Parabel ist nach unten geöffnet und gestaucht.
- $d = -2$: Die Parabel ist um 2 Einheiten nach links verschoben.
- $e = 5$: Die Parabel ist um 5 Einheiten nach oben verschoben.

Der Scheitelpunkt der Parabel liegt demnach bei $S(-2|5)$.

ⓘ **Scheitelpunktform aufstellen (WGpKwt)**

Die Bestimmung der Scheitelpunktform ähnelt in gewissen Teilen der Bestimmung einer Geradengleichung aus zwei Punkten. Allerdings werden zwei verschiedene Fälle unterschieden.

Im *ersten Fall* erfolgt die Bestimmung der Scheitelpunktform folgendermaßen:

1. Der **Scheitelpunkt** und der **Streckungsfaktor** sind gegeben.
2. Der Streckungsfaktor wird für a, die x-Koordinate des Scheitelpunktes wird für d und die y-Koordinate des Scheitelpunktes wird für e in $f(x) = a(x - d)^2 + e$ eingesetzt.

Dieser Ansatz erfordert keine weiteren Schritte, da die vollständigen Informationen zur Bestimmung der Parabel vorliegen.

Im *zweiten Fall* erfolgt die Bestimmung der Scheitelpunktform folgendermaßen:

1. Der **Scheitelpunkt** und ein **weiterer Punkt** der Parabel sind gegeben.
2. Die x-Koordinate des Scheitelpunktes wird für d und die y-Koordinate des Scheitelpunktes wird für e eingesetzt.
3. Die x-Koordinate des weiteren Punktes wird für x und die y-Koordinate des weiteren Punktes wird für f(x) eingesetzt.
4. Der Streckungsfaktor a wird bestimmt, indem die Gleichung nach a umgeformt wird.
5. Um die Funktionsgleichung zu erhalten, werden a, d und e in $f(x) = a(x - d)^2 + e$ eingesetzt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Beispiel Ⓑ

… für den ersten Fall:

1.	Folgende Werte sind gegeben:	S(3|–2) und a = 0,5	S(–4|5) und a = –1,5
2.	Einsetzen in $f(x) = a(x - d)^2 + e$:	$f(x) = 0{,}5(x - 3)^2 - 2$	$f(x) = -1{,}5(x + 4)^2 + 5$

… für den zweiten Fall:

1.	Folgende Werte sind gegeben:	S(2|–4) und P(–6|12)	S(–4|5) und P(–2|–1)
2.	S in $f(x) = a(x - d)^2 + e$ einsetzen:	$f(x) = a(x - 2)^2 - 4$	$f(x) = a(x + 4)^2 + 5$
3.	P in $f(x) = a(x - d)^2 + e$ einsetzen:	$12 = a(-6 - 2)^2 - 4$	$-1 = a(-2 + 4)^2 + 5$
4.	Gleichung auf a umstellen:	$12 = a(-8)^2 - 4 \quad \vert +4$	$-1 = a(2)^2 + 5 \quad \vert -5$
		$16 = 64a \quad \vert :64$	$-6 = 4a \quad \vert :4$
		$a = 0{,}25$	$a = -1{,}5$
5.	Einsetzen in $f(x) = a(x - d)^2 + e$:	$f(x) = 0{,}25(x - 2)^2 - 4$	$f(x) = -1{,}5(x + 4)^2 + 5$

Das Einsetzen der Punkte S und P in die Scheitelpunktform kann selbstverständlich auch in einem Schritt erfolgen.

Aufgabe 4.17 (74NhrS)

Beschreiben Sie mit den Fachbegriffen aus Aufgabe 4.5 und den Erklärungen zur Verschiebung und Streckung/Stauchung einer Parabel auf der vorherigen Seite, wie die gegebene Parabel aus der Normalparabel $f(x) = x^2$ hervorgeht.

a) $f(x) = -0{,}6(x - 3)^2 + 4$ b) $f(x) = 4{,}5(x + 3)^2 - 1$ c) $f(x) = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 6$

Aufgabe 4.18 (W5V1Ag)

Schauen Sie sich die Situationsbeschreibung zu Beginn dieses Kapitels nochmal an. Nina und Mike haben bei ihrem Fahrrad-Wettrennen festgestellt, dass ihre Geschwindigkeit während der 100 Meter langen Strecke nicht konstant war. Zu Beginn beschleunigten sie, erreichten nach genau der Hälfte der Strecke ihre Höchstgeschwindigkeit von etwa 35 km/h (≈ 9,72 m/s) und wurden danach wieder langsamer, bis sie nach genau 100 Metern zum Stillstand kamen.

Die Geschwindigkeit v(x) (in m/s) hängt von der zurückgelegten Strecke x (in Metern) ab und soll mithilfe einer quadratischen Funktion der Form $f(x) = a(x - d)^2 + e$ beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung v(x).
b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit für x = 25 sowie x = 90 und rechnen Sie in km/h um.
c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion v(x) im Bereich $0 \le x \le 100$. Markieren Sie den Punkt der Höchstgeschwindigkeit.

Aufgabe 4.19 (ZvV5Ty)

Mike ist begeisterter Golfspieler und trainiert regelmäßig auf einem 9-Loch-Golfplatz an der Rennbahn in Dortmund. Mithilfe einer Spezialkamera, die die Flugbahn der Golfbälle analysiert, wurde ermittelt, dass seine Bälle in einer Entfernung von 84 Metern vom Abschlagpunkt eine maximale Höhe von 36 Metern erreichen.

a) Stellen Sie eine Funktion in Scheitelpunktform auf, welche die Flugbahn des Balls beschreibt. Bestimmen Sie dabei den Wert für den Streckungsfaktor a und runden Sie diesen auf vier Stellen nach dem Komma.
b) Ein Greenkeeper steht in einer Entfernung von 165 Metern vom Abschlagpunkt auf dem Rasen. Er ist 1,75 m groß. Wird der Greenkeeper vom Ball getroffen?
c) In welcher Entfernung vom Abschlagpunkt erreicht der Ball eine Höhe von 22 Metern?

Aufgabe 4.20 (KDihyb)



Nina denkt gerne an die Bundesjugendspiele zurück, bei denen sie im Sportunterricht immer gut abgeschnitten hat. Ihre Lieblingsdisziplin war der "Ballweitwurf". Angenommen, Nina wirft einen Ball aus einer Höhe von 1,8 m ab, und der Scheitelpunkt der Wurfparabel liegt im Punkt S(24|14).

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Flugbahn in Scheitelpunktform.
b) Wie weit wirft Nina den Ball insgesamt?
c) Welche Höhe erreicht der Ball in einer Entfernung von 5 m?

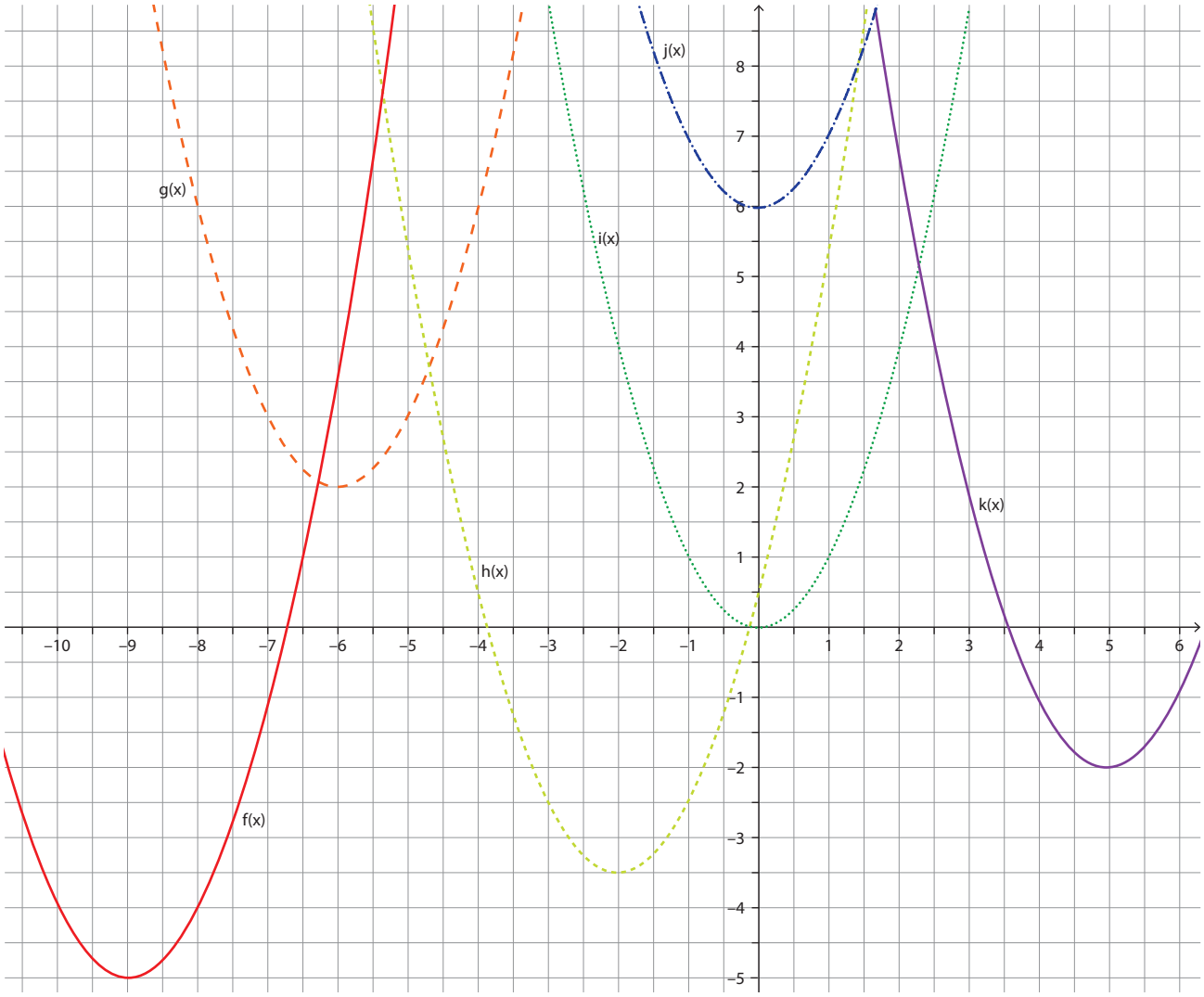
Aufgabe 4.21 (zwGbVN)

Eine Bogenbrücke hat eine Spannweite von 28 m und erreicht eine maximale Höhe von 10 m in der Mitte. Machen Sie sich ggf. eine Skizze mit einem geeigneten Koordinatensystem.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Form $f(x) = a(x - d)^2 + e$.
b) Welchen Wert hat der Faktor a, und wie beeinflusst dieser die Form des parabolischen Brückenbogens?

Aufgabe 4.22 (g38d6G)

Bestimmen Sie zu den abgebildeten, verschobenen Normalparabeln (also ist der Streckungsfaktor a = 1) die Funktionsgleichungen in der Scheitelpunktform.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.3 SCHEITELPUNKTFORM VS. NORMALFORM

Situationsbeschreibung – Sprungturm
Mike liebt es, in seiner Freizeit von hohen Sprungtürmen ins Wasser zu springen. Besonders fasziniert ihn die Eleganz der Flugbahnen, die er bei jedem Sprung beschreibt. Seine Sprünge erinnern an perfekte Parabeln, die sowohl Kraft als auch Präzision vereinen. Dabei achtet er stets darauf, den Absprungpunkt und die Flugkurve genau zu kontrollieren, um sicher und elegant im Wasser zu landen. Für Mike ist Turmspringen nicht nur ein Hobby, sondern auch eine Mischung aus Sport und physikalischer Kunst.

ⓘ

Umformung der Scheitelpunktform in die Normalform (Sa1yyi)
Die Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion ist häufig übersichtlicher und leichter aufzustellen, doch für viele Berechnungen wird die Normalform benötigt. Um eine Funktion von der Scheitelpunktform in die Normalform zu überführen, spielen die binomischen Formeln eine zentrale Rolle. Diese Formeln lauten:

I $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
II $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
III $(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$

Sobald diese Formeln sicher beherrscht werden, ist die Umwandlung der Scheitelpunktform in die Normalform leicht durchführbar.

Ⓑ

Beispiel
Die Umformung erfolgt folgendermaßen:

1.	Notieren der Ausgangsgleichung in Scheitelpunktform.	$f(x) = –3(x – 4)^2 + 6$
2.	Eine passende binomische Formel wird auf den Ausdruck in der Klammer angewendet.	$= –3(x^2 – 8x + 16) + 6$
3.	Ausmultiplizieren der Klammer mit dem Streckungsfaktor	$= –3x^2 + 24x – 48 + 6$
4.	Zusammenfassen der Terme	$= –3x^2 + 24x – 42$

Sollten Sie **Hilfestellung beim Klammern auflösen**, **Zusammenfassen** oder **Gleichungen umstellen** benötigen, so schauen Sie sich die **Kapitel 1.4 bis 1.8** in diesem Buch nochmals an.

Aufgabe 4.23 (Eg69Gb)
Veranschaulichen Sie anhand einer Rechnung, wie die binomischen Formeln funktionieren. Überlegen Sie sich zunächst, wie Sie z. B. den Ausdruck $(a + b)^2$ ohne das Quadratzeichen schreiben können, und multiplizieren Sie anschließend die Klammern aus.

Aufgabe 4.24 (5MZERQ)
Multiplizieren Sie mithilfe der binomischen Formeln aus.
a) $(x + 2)^2$ b) $(x – 5)^2$ c) $(x + 4)^2$ d) $(x – 3)^2$

Aufgabe 4.25 (fQEK8P)

Gegeben sind folgende Funktionen: $f(x) = 3(x-2)^2 - 1$ und $g(x) = -0{,}5(x-5)^2 + 5$

a) Welche Eigenschaften der Graphen können Sie anhand der Funktionsgleichungen direkt erkennen, ohne sie zu zeichnen?

b) Zeichnen Sie die Funktionen in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse von $0 \le x \le 10$; y-Achse: $-8 \le y \le 12$)

c) Wandeln Sie die Funktionsgleichungen in die Normalform um.

d) Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der letzten Zahl der Normalform und dem jeweiligen Graphen her.

Aufgabe 4.26 (RhZYpQ)

Welche Funktionen sind gleich? Verbinden Sie einen Buchstaben mit der passenden Zahl.

a)	$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$	1)	$f(x) = 2x^2 + 8x + 4$
b)	$f(x) = 2(x+2)^2 - 4$	2)	$f(x) = 2x^2 + 4x + 7$
c)	$f(x) = 2(x-3)^2 - 1$	3)	$f(x) = 2x^2 - 12x + 17$
d)	$f(x) = 2(x+1)^2 + 5$	4)	$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$

Aufgabe 4.27 (vA4QxV)

Bringen Sie die folgenden Funktionen in die Normalform. Geben Sie den Scheitelpunkt, den Streckungsfaktor sowie den y-Achsenabschnitt jeder Funktion an.

a)	$f(x) = 2(x+1)^2 - 4$	d)	$i(x) = 4(x+2)^2 - 6$	g)	$l(x) = -0{,}5(x+3)^2 + 4$
b)	$g(x) = -3(x-2)^2 + 5$	e)	$j(x) = 2(x-4)^2 + 1$	h)	$m(x) = 3(x-5)^2 - 7$
c)	$h(x) = 0{,}5(x-3)^2 - 1$	f)	$k(x) = (x-1)^2 + 2$	i)	$n(x) = -2(x+4)^2 - 2$

Aufgabe 4.28 (j12fvX)

Von einer Parabel sind der Scheitelpunkt S und ein weiterer Punkt P gegeben. Bestimmen Sie die Normalform der Parabel, welche durch die beiden angegebenen Punkte verläuft.

a)	S(–3|–2); P(–1|6)	d)	S(0|4); P(2|6)	g)	S(–1|–6,5); P(4|6)
b)	S(2|1); P(0|5,5)	e)	S(3|–5); P(5|–1)	h)	S(5|3); P(4|10)
c)	S(–1|4); P(1|8)	f)	S(–6|11); P(–2|15)	i)	S(–3|1); P(5|4)

Aufgabe 4.29 (Mv7kGs)

Ein Ball wird geworfen und folgt einer parabelförmigen Flugbahn. In 10,5 m Entfernung vom Abwurfpunkt erreicht er seine maximale Höhe von 3 m. Bei einer Entfernung von 20,5 m befindet sich der Ball noch in 2 m Höhe.
Berechnen Sie, wie hoch der Ball zum Zeitpunkt des Abwurfs war.

Aufgabe 4.30 (BvF1Qx)

Ergänzen Sie die fehlende Zahl und das passende Rechenzeichen.

a)	$(x \square \square)^2 = x^2 + 6x + 9$	d)	$(x \square \square)^2 = x^2 - 14x + 49$
b)	$(x \square \square)^2 = x^2 - 10x + 25$	e)	$(x \square \square)^2 = x^2 + 8x + 16$
c)	$(x \square \square)^2 = x^2 + 16x + 64$	f)	$(x \square \square)^2 = x^2 - 12x + 36$

Aufgabe 4.31 (hB6QeY)

Geben Sie die zugehörige Klammerschreibweise der binomischen Formel an.

a)	$f(x) = x^2 + 14x + 49$	c)	$h(x) = x^2 + 4x + 4$	e)	$j(x) = x^2 + 18x + 81$
b)	$g(x) = x^2 - 16x + 64$	d)	$i(x) = x^2 + 12x + 36$	f)	$k(x) = x^2 - 20x + 100$

Aufgabe 4.32 (3ghrgh)

Ergänzen Sie die fehlende Zahl und geben Sie anschließend die zugehörige binomische Formel in Klammerschreibweise an.

a)	$x^2 + 2x + \square$	d)	$x^2 - 5x + \square$	g)	$x^2 - 2x + \square$
b)	$x^2 - 4x + \square$	e)	$x^2 + 15x + \square$	h)	$x^2 - 8x + \square$
c)	$x^2 - 24x + \square$	f)	$x^2 - 9x + \square$	i)	$x^2 - 18x + \square$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Quadratische Ergänzung (4Swx2G) ⓘ

Die quadratische Ergänzung ist ein mathematisches Verfahren, um quadratische Funktionen aus der Normalform in die Scheitelpunktform zu überführen. Dabei wird die Funktion so umgeformt, dass sich eine binomische Formel bildet. Dies ermöglicht eine direkte Ablesung des Scheitelpunkts.

Die Methode funktioniert, indem der lineare Term ergänzt wird, ohne den Wert der Gleichung zu verändern:

1. Der Koeffizient des linearen Terms (die Zahl vor dem x) wird halbiert und anschließend quadriert.
2. Das Ergebnis wird zu der Funktion addiert und direkt wieder subtrahiert, sodass die Gleichung mathematisch äquivalent bleibt, sich also vom Wert her nicht ändert.

Beispiel Ⓑ

Die quadratische Ergänzung zur Umwandlung der Normalform zur Scheitelpunktform ist lediglich eine Anwendung der Aufgaben 4.31 und 4.32. Die Rechenschritte lauten wie folgt:

1. Die Terme werden so angeordnet, dass x^2, der x-Term und die Konstante in der **richtigen Reihenfolge** stehen. $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$
2. Der **Streckungsfaktor**, sofern vorhanden, wird aus den ersten beiden Termen, also x^2 und dem x-Term, **faktorisiert**. $= \mathbf{2}(x^2 - 4x) + 9$
3. Der Ausdruck in der Klammer wird mit Hilfe der **quadratischen Ergänzung** zu einer binomischen Formel vervollständigt (addiert) und direkt wieder subtrahiert (**Aufgabe 4.32**). $= 2(x^2 - 4x \mathbf{+ 4 - 4}) + 9$
4. Die ersten drei Terme in der Klammer bilden eine **binomische Formel**. $= 2((\mathbf{x^2 - 4x + 4}) - 4) + 9$
5. Diese wird in kompakter Form geschrieben, indem die binomische Formel rückwärts angewendet wird (**Aufgabe 4.31**). $= 2(\mathbf{(x - 2)^2} - 4) + 9$
6. Der in 2. faktorisierte **Streckungsfaktor** wird wieder auf die Klammer angewendet, indem er **mit jedem Teil multipliziert** wird. $= \mathbf{2(x - 2)^2 - 8} + 9$
7. Abschließend werden die Konstanten **zusammengefasst**, sodass die Scheitelpunktform entsteht. $= 2(x - 2)^2 \mathbf{+ 1}$

Schritt 4 können Sie auch weglassen und direkt zu Schritt 5 übergehen.

Aufgabe 4.33 (rm8miZ)

Berechnen Sie die Scheitelpunktform der folgenden quadratischen Funktionen. Geben Sie zusätzlich den Streckungsfaktor, den y-Achsenabschnitt sowie die Koordinaten des Scheitelpunkts an.

a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$
b) $g(x) = 5x^2 + 10x - 40$
c) $h(x) = 4x^2 - 16x - 43$
d) $i(x) = 2x^2 + 20x + 5$
e) $j(x) = 5x^2 + 20x + 31{,}25$
f) $k(x) = 2x^2 - 12x + 4$
g) $l(x) = 3x^2 + 6x - 12$
h) $m(x) = 3x^2 - 12x + 7$
i) $n(x) = 4x^2 + 16x + 30$

Aufgabe 4.34 (EyYUFG)

Formen Sie die folgenden quadratischen Funktionen in die Scheitelpunktform um. Geben Sie zusätzlich den y-Achsenabschnitt sowie die Koordinaten des Scheitelpunkts an. Hinweis: Da die quadratischen Terme keinen Vorfaktor besitzen, entfällt der Schritt des Faktorisierens und Sie können die Umformungen einfacher durchführen.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$
b) $g(x) = x^2 - 6x + 10$
c) $h(x) = x^2 + 2x - 7$
d) $i(x) = x^2 - 10x + 21$
e) $j(x) = x^2 + 20x - 14$
f) $k(x) = x^2 + 16x + 23$

Aufgepasst
"Kein Vorfaktor" heißt hier natürlich nur, dass der Vorfaktor gleich 1 ist und er daher nicht mitgeschrieben werden muss.

Aufgabe 4.35 (gxQv8Y)

Formen Sie die folgenden quadratischen Funktionen in die Scheitelpunktform um. Geben Sie zusätzlich den Streckungsfaktor, den y-Achsenabschnitt sowie die Koordinaten des Scheitelpunkts an.

a) $f(x) = 3x^2 - 6x - 5$
b) $g(x) = 2x^2 - 8x + 13$
c) $h(x) = 4x^2 + 10x - 12$
d) $i(x) = 5x^2 + 25x + 15$
e) $j(x) = 6x^2 + 18x + 30$
f) $k(x) = 4x^2 - 4x + 3$
g) $l(x) = 2x^2 - 6x - 8$
h) $m(x) = 3x^2 + 15x + 5$
i) $n(x) = 4x^2 - 15x + 7$

Aufgepasst
Denken Sie bei b) daran, dass die Funktion die x- und y-Werte in cm angibt, hier in der Teilaufgabe aber von Metern die Rede ist.

Bei c) müssen Sie die Stelle herausfinden, bei der die Funktion die x-Achse schneidet. Dazu setzen Sie die Scheitelpunktform gleich null und formen diese Gleichung schrittweise auf x um.

Aufgabe 4.36 (JwpnCh)

Schauen Sie sich die Situationsbeschreibung dieses Kapitels an: Mike führt einen Vorwärtssalto von einem 3-Meter-Sprungbrett aus. Seine Flugbahn wird näherungsweise durch die Funktion $f(x) = -0{,}016x^2 + 2{,}24x + 405{,}6$ beschrieben. Dabei ist x die horizontale Entfernung vom Absprungpunkt in Zentimetern (in cm) und f(x) die Höhe seines Körperschwerpunkts (ebenfalls in cm). Der Absprungpunkt befindet sich bei $x = 0$, was dem Ende des Sprungbretts entspricht.

a) Bestimmen Sie mithilfe der Scheitelpunktform die maximale Höhe, die Mike während seines Sprungs erreicht.
b) Um einen Zusammenstoß mit dem Sprungbrett zu vermeiden, muss sich Mike aus Sicherheitsgründen mindestens 1,2 m vom Sprungbrett entfernt befinden, wenn er auf der Höhe des Sprungbretts (genau 3 m) ist. Bestimmen Sie die dazugehörige horizontale Entfernung x.
c) Berechnen Sie die horizontale Entfernung vom Sprungbrett, bei der Mike ins Wasser eintaucht.

Aufgabe 4.37 (inyh1v)

Ein Springbrunnen hat die Form einer Parabel. Die Höhe des Wasserstrahls f(x) in Metern ist durch die Funktion $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x$ gegeben, wobei x die horizontale Entfernung vom Startpunkt in Metern ist.

a) Bestimmen Sie die Scheitelpunktform der Funktion.
b) Geben Sie die maximale Höhe des Wasserstrahls und deren horizontale Position an.
c) Wie hoch ist der Wasserstrahl genau in 1,5 Metern Entfernung vom Startpunkt?

Aufgabe 4.38 (X5vake)

Ein Ball wird geworfen, und seine Flugbahn wird durch die Funktion $h(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}2x + 2$ beschrieben. Dabei ist h(x) die Höhe in Metern und x die horizontale Entfernung in Metern. Der Ball wird aus einer Höhe von 2 Metern geworfen, und die Flugbahn wird durch die Erdanziehungskraft beeinflusst, was die quadratische Form der Funktion erklärt.

a) Wandeln Sie die Funktion in die Scheitelpunktform um und geben Sie den Scheitelpunkt an.
b) Geben Sie die maximale Höhe des Balls an.
c) Berechnen Sie den Punkt, an den der Ball den Boden berührt.

Für c) müssen Sie die Scheitelpunktform gleich null setzen und die Gleichung umformen.

Aufgabe 4.39 (FnvyNM)

Mike plant für einen seiner Kunden ein Dachfenster, dessen obere Kante durch eine parabelförmige Konstruktion abgeschlossen wird. Die Form der Oberkante wird durch die Funktion $f(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}8x$ beschrieben, wobei x die Breite des Fensters (in Metern) und f(x) die Höhe (in Metern) ist.

a) Wandeln Sie die Funktion in die Scheitelpunktform um und geben Sie die Höhe des Fensters an.
b) Mike möchte wissen, ob er das Fenster mit seinem Anhänger transportieren kann. Dieser hat eine Länge von 4,5 m.
c) Zeichnen Sie die Parabel der Fensterkante in ein Koordinatensystem und markieren Sie den höchsten Punkt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.4 SCHNITTPUNKTE MIT DEN KOORDINATENACHSEN

Situationsbeschreibung – Wushan-Brücke

Die *Wushan-Brücke* in Zentral-China ist eine beeindruckende Straßenbrücke, die den Jangtsekiang bei der Stadt Wushan überquert. Sie gehört zu den zehn größten Bogenbrücken der Welt und wurde zwischen 2001 und 2005 fertiggestellt. Die Brücke verbindet wichtige Verkehrswege in der Region und spielt eine zentrale Rolle für den Transport und die wirtschaftliche Entwicklung des Gebiets.

Die Brücke verfügt über jeweils zwei Fahrspuren pro Fahrtrichtung, die durch eine Mittellinie getrennt sind, sowie beidseitig 2 Meter breite Gehwege. Die gesamte Breite der Brücke beträgt 19 Meter. Um die Last der Fahrbahn zu tragen, wird diese auf beiden Seiten von jeweils 25 Stahlseilen (den sogenannten Hängern) stabilisiert.

Der gesamte Brückenbogen, der die Fahrbahn trägt, kann näherungsweise durch die Funktionsgleichung $w(x) = -0{,}0025x^2 + 1{,}15x - 72$ beschrieben werden (alle Angaben in m). Dabei stellt die x-Achse die horizontale Ausrichtung der Fahrbahn dar.

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Quadratische Funktionen schneiden die Koordinatenachsen an charakteristischen Punkten, die sich durch Berechnungen einfach bestimmen lassen. Dabei unterscheidet man zwischen dem **Schnittpunkt mit der y-Achse** (auch **y-Achsenabschnitt** genannt), der immer eindeutig ist, und den **Schnittpunkten mit der x-Achse** (auch **Nullstellen** genannt), von denen es bei Parabeln maximal zwei geben kann (siehe auch Folgeseite). Je nach Art der quadratischen Funktion gibt es unterschiedliche Methoden, um diese Punkte zu berechnen.

Quadratische Gleichungen lassen sich in drei Typen unterteilen:

1) vollständige quadratische Gleichungen: $ax^2 + bx + c = 0$
2) gemischt-quadratische Gleichungen (mit $c = 0$): $ax^2 + bx = 0$
3) reinquadratische Gleichungen (mit $b = 0$): $ax^2 + c = 0$

Schnittpunkt mit der y-Achse (5yq4uA)

Der Schnittpunkt mit der y-Achse wird ermittelt, indem $x = 0$ in die Funktionsgleichung eingesetzt wird. Dabei entspricht die Konstante c direkt dem **y-Achsenabschnitt** y_0.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 + 4x \mathbf{- 8} && \mid x = 0 \\
f(0) &= 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 8 \\
&= 0 + 0 - 8 && \mid \text{zusammenfassen} \\
&= -8
\end{aligned}
$$

Der y-Achsenabschnitt ist also $y_0 = -8$ und kann auch **ohne Rechnung** direkt abgelesen werden. Bei gemischt-quadratischen Gleichungen ist $y_0 = 0$ da $c = 0$. In diesem Fall verläuft der Graph durch den Koordinatenursprung.

ⓘ **Schnittpunkte mit der x-Achse**

Die Schnittpunkte mit der x-Achse, auch als Nullstellen bezeichnet, entstehen an der Stelle, wo der Funktionswert f(x) = 0 ist. Quadratische Funktionen können je nach Verlauf der Parabel bis zu zwei Nullstellen haben:

Machen Sie sich dies grafisch klar: Skizzieren Sie in ein Koordinatensystem je eine Parabel mit zwei, einer und keiner Nullstelle.

- **Zwei Nullstellen**, wenn die Parabel die x-Achse an zwei Punkten schneidet.
- **Eine Nullstelle**, wenn die Parabel die x-Achse berührt (der Scheitelpunkt liegt auf der x-Achse). Man bezeichnet sie dann auch manchmal als doppelte Nullstelle.
- **Keine Nullstelle**, wenn die Parabel die x-Achse nicht schneidet.

Zur Berechnung der Nullstellen gibt es verschiedene Methoden, die von der Form der quadratischen Funktion abhängen.

ⓘ **Nullstellen von reinquadratischen Gleichungen (e3w9wE)**

Bei reinquadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + c = 0$ können die Nullstellen durch Umstellen der Gleichung und anschließendes Ziehen der Wurzel ermittelt werden. **Hinweis**: Beim Wurzelziehen erhält man immer zwei Lösungen: eine positive und eine negative.

^ bedeutet "und"
v bedeutet "oder"

$$\begin{aligned} f(x) &= 9x^2 - 25 && | f(x) = 0 \\ 0 &= 9x^2 - 25 && | +25 \\ 9x^2 &= 25 && | :9 \\ x^2 &= \frac{25}{9} && | \sqrt{} \\ x &= \sqrt{\frac{25}{9}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x_1 = \frac{5}{3}} \quad \text{v} \quad \mathbf{x_2 = -\frac{5}{3}}$$

ⓘ **Nullstellen von gemischt-quadratischen Gleichungen (15DZB7)**

Gemischt-quadratische Gleichungen der Form $ax^2 + bx = 0$ können mithilfe des Satzes vom Nullprodukt gelöst werden. Dieser Satz besagt:
"Ein Produkt ist dann null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren gleich null ist."

Hinweis
Näheres zum Satz vom Nullprodukt finden Sie auch in Kapitel 5.1.

Hier ein kleines Beispiel zum Satz vom Nullprodukt: $\underbrace{x}_{x_1 = 0} \cdot \underbrace{(x - 4)}_{\substack{x - 4 = 0 \\ x_2 = 4}} = 0$

Entweder ist das x vor der Klammer gleich null, denn null mal die Klammer ergibt null; oder der Term in der Klammer ist gleich null, denn x mal null (die Klammer) ist auch null.

Für das Lösen einer gemischt quadratischen Gleichung zur Bestimmung der Nullstellen rechnen Sie also:

Sollten Sie Hilfe beim Faktorisieren benötigen, schauen Sie sich dies in Kapitel 1.6 nochmals an.

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^2 - 3x && | f(x) = 0 \\ 0 &= 12x^2 - 3x && | \text{Faktorisieren} \\ 0 &= x(12x - 3) && | \text{Satz vom Nullprodukt} \end{aligned}$$

$$\mathbf{x_1 = 0} \quad \text{v} \quad 12x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_2 = 0{,}25}$$

ⓘ **Nullstellen von vollständigen quadratischen Gleichungen**

Die Berechnung der Nullstellen bei vollständigen quadratischen Funktionen in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ unterscheidet sich von linearen, reinquadratischen oder gemischt-quadratischen Funktionen. Sie kann nicht einfach durch Umstellen der Funktionsgleichung erfolgen. Stattdessen wurden vor etwa 1400 Jahren von Mathematikern Lösungswege entwickelt, die bis heute verwendet werden.
Im Folgenden werden drei Methoden vorgestellt, mit denen die Nullstellen berechnet werden können. Es ist nicht notwendig, alle Verfahren auswendig zu kennen. Verschiedene Methoden an Beispielen zu testen, kann helfen, die geeignetste Vorgehensweise zu finden.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Nullstellen mit Hilfe der quadratischen Ergänzung (nRGEx7)

Die Nullstellen einer quadratischen Funktion können durch Anwendung der quadratischen Ergänzung berechnet werden. Diese Methode verwendet die Eigenschaften der binomischen Formeln, um die Gleichung in eine einfachere Form zu bringen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; f(x) = 0 \\
0 &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; :2 \\
0 &= x^2 - 4x - 5 && | \; +5 \\
5 &= x^2 - 4x && | \; \text{quadratische Ergänzung} \\
5 &= x^2 - 4x + 4 - 4 && | \; +4 \\
9 &= x^2 - 4x + 4 && | \; \text{binomische Formel rückwärts} \\
9 &= (x-2)^2 && | \; \sqrt{} \\
\pm 3 &= x - 2 && | \; +2 \\
x &= \pm 3 + 2 \\
\mathbf{x_1 = 5} & \quad \vee \quad \mathbf{x_2 = -1}
\end{aligned}
$$

Sollten Sie Hilfestellung bei der quadratischen Ergänzung benötigen, schauen Sie sich die Erklärung auf Seite 111 nochmal an.

Nullstellen mit Hilfe der pq-Formel (uwM2mL)

Die pq-Formel ist eine der bekanntesten Methoden, um quadratische Gleichungen zu lösen. Sie gilt für Gleichungen, die in der sogenannten Normalform vorliegen: $0 = x^2 + px + q$.
Es ist besonders wichtig, darauf zu achten, dass der Faktor vor x^2 gleich 1 ist. Falls dies nicht der Fall ist, muss die Gleichung zunächst durch diesen Faktor dividiert werden. Außerdem muss auf einer Seite der Gleichung null stehen. Gegebenenfalls ist die Gleichung entsprechend umzustellen.

Zwei Bedingungen
1. das x^2 steht allein
2. eine Seite ist gleich null

Die pq-Formel lautet: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

YouTube

Um die Nullstellen zu berechnen, werden die Werte für p und q direkt aus der Normalform abgelesen und in die pq-Formel eingesetzt. Dabei ist auf die Vorzeichen von p und q zu achten.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; f(x) = 0 \\
0 &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; :2 \\
0 &= x^2 - 4x - 5 && | \; p = -4 \;\wedge\; q = -5 \\
x_{1/2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-5)} \\
x_{1/2} &= \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5} \\
x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{2^2 + 5} \\
x_{1/2} &= 2 \pm \sqrt{9} \\
x_{1/2} &= 2 \pm 3 \\
\mathbf{x_1 = 5} & \quad \vee \quad \mathbf{x_2 = -1}
\end{aligned}
$$

Überlegen Sie hier, warum Sie in der Klammer unter der Wurzel das Minus vor der 4 weglassen können!

Minimalschreibweise der pq-Formel

Die obige Rechnung zeigt alle Schritte im Detail. In vielen Fällen genügt jedoch eine kompakte Darstellung, um die pq-Formel anzuwenden:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; f(x) = 0 \\
0 &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; :2 \\
0 &= x^2 - 4x - 5 \\
x_{1/2} &= -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 5} && | \; \text{Taschenrechner} \\
\mathbf{x_1 = 5} & \quad \vee \quad \mathbf{x_2 = -1}
\end{aligned}
$$

Achtung
Bei der nebenstehenden Rechnung handelt es sich um das **Mindeste**, was Sie bei der pq-Formel notieren müssen!

Nullstellen mit Hilfe der Mitternachtsformel – abc-Formel (ptkwSt)

Die Mitternachtsformel ist eine etwas kompliziertere Gleichung, um Nullstellen quadratischer Funktionen zu berechnen. Sie gilt für Gleichungen in der Normalform: $0 = ax^2 + bx + c$. Im Gegensatz zur pq-Formel kann bei der Mitternachtsformel vor x^2 ein beliebiger Faktor a stehen. Wichtig ist nur, dass die Gleichung auf einer Seite gleich null ist.

Die Mitternachtsformel lautet: $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Um die Nullstellen zu berechnen, werden die Werte für a, b und c direkt aus der Normalform abgelesen und in die Mitternachtsformel eingesetzt. Dabei ist auf die Vorzeichen von a, b und c zu achten.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; f(x) = 0 \\ 0 &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; a = 2 \;\wedge\; b = -8 \;\wedge\; c = -10 \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2}$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{4}$$

$$x_{1/2} = \frac{8 \pm 12}{4}$$

$$\mathbf{x_1 = \frac{8+12}{4} = 5} \quad \vee \quad \mathbf{x_2 = \frac{8-12}{4} = -1}$$

Minimalschreibweise der abc-Formel

Die obige Rechnung zeigt alle Schritte im Detail. In vielen Fällen genügt jedoch eine kompakte Darstellung, um die Mitternachtsformel anzuwenden:

Achtung
Bei der nebenstehenden Rechnung handelt es sich um das **Mindeste**, was Sie bei der Mitternachtsformel notieren müssen!

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x - 10 && | \; f(x) = 0 \\ 0 &= 2x^2 - 8x - 10 \end{aligned}$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} \quad | \text{ Taschenrechner}$$

$$\mathbf{x_1 = 5} \quad \vee \quad \mathbf{x_2 = -1}$$

Zwei Nullstellen, eine Nullstelle, keine Nullstelle

Quadratische Funktionen können zwei, eine oder keine Nullstelle besitzen. Dies hängt vom Term unter der Wurzel (der sogenannten Diskriminante) ab. Die Tabelle zeigt, wann welcher Fall eintritt – sowohl für die Mitternachtsformel als auch die pq-Formel:

	Mitternachtsformel	*pq-Formel*
keine Lösung:	Der Term unter der Wurzel (Diskriminante) ist **negativ**.	
keine Nullstelle	$b^2 - 4ac < 0 \;\Rightarrow\; L = \{\}$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \;\Rightarrow\; L = \{\}$
eine Lösung:	Der Term unter der Wurzel (Diskriminante) ist **null**.	
eine Nullstelle	$b^2 - 4ac = 0 \;\Rightarrow\; L = \{x\}$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \;\Rightarrow\; L = \{x\}$
zwei Lösungen:	Der Term unter der Wurzel (Diskriminante) ist **positiv**.	
zwei Nullstellen	$b^2 - 4ac > 0 \;\Rightarrow\; L = \{x_1 ; x_2\}$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \;\Rightarrow\; L = \{x_1 ; x_2\}$

Hat eine Parabel nur eine Nullstelle, so muss dies der Scheitelpunkt sein. Eine solche Nullstelle heißt auch **doppelte Nullstelle**.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.40 (DqQjBM)
Ordnen Sie jede Gleichung der passenden Kategorie zu, indem Sie das entsprechende Kästchen ankreuzen.

	Gleichung	nicht quadratisch	reinquadratisch	gemischt quadratisch
a)	$2x^2 = 3x$	☐	☐	☐
b)	$x^2 = 49$	☐	☐	☐
c)	$9 = 2 - 4x + 2x^2$	☐	☐	☐
d)	$3x = 7$	☐	☐	☐
e)	$(x - 5)^2 = 8$	☐	☐	☐
f)	$2x^2 = 3 - 4x^3$	☐	☐	☐

Aufgabe 4.41 (gwaNQi)
Bringen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen, falls erforderlich, in die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Geben Sie anschließend die Werte der Koeffizienten a, b und c an.

a) $2x^2 + 7 - 5x = 0$
b) $-4x^2 + 6x = 10$
c) $x^2 + 3x = 4 + x$
d) $3x^2 - 7 = 2x$
e) $(x - 2)^2 = 5$
f) $4x^2 + 3 = x + 8$

Aufgabe 4.42 (4K4CrD)
Wie viele Lösungen hat die angegebene quadratische Gleichung? Berechnen Sie die Zahl unter der Wurzel (Diskriminante), entscheiden Sie anschließend über die Anzahl der Lösungen und kreuzen Sie die passende Option an.

		Diskriminante	keine Lösung	eine Lösung	zwei Lösungen
a)	$x^2 + 3 = 0$		☐	☐	☐
b)	$4x^2 = 36$		☐	☐	☐
c)	$-6x^2 + 9 = 0$		☐	☐	☐
d)	$5x^2 = 0$		☐	☐	☐
e)	$-3x^2 = -12$		☐	☐	☐

Aufgabe 4.43 (Dsy7xD)
Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $2x^2 = 0$
b) $5x^2 - 4 = 0$
c) $x^2 + 5 = 0$
d) $-\frac{1}{3}x^2 = -3$
e) $\frac{2}{3}x^2 - 4 = 1$
f) $16x^2 - 25 = 0$
g) $4x^2 - 2{,}5 = 1{,}5$
h) $2x^2 = x^2 + 16$

Aufgabe 4.44 (qtvJqE)
Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 - 4x = 0$
b) $x^2 + 2x = 0$
c) $5x^2 + 10x = 0$
d) $\frac{1}{3}x^2 - x = 0$
e) $-4x^2 - 8x = 0$
f) $-x^2 + 2x = 0$
g) $3x^2 - 6x = 0$
h) $2x^2 + 5x = 0$
i) $\frac{2}{5}x^2 - x = 0$
j) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x = 0$
k) $7x^2 - 14x = 0$
l) $x^2 + 6x = 0$

Aufgabe 4.45 (8xLJyh)

Bestimmen Sie die Lösung(en) der quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $x^2 + 4x - 5 = 0$
c) $x^2 - 8x + 12 = 0$
d) $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$
e) $3x^2 - 7x + 2 = 0$
f) $-4x^2 + 12x - 8 = 0$
g) $5x^2 - 6x + 1 = 0$
h) $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 3 = 0$
i) $6x^2 - 11x - 35 = 0$

Aufgabe 4.46 (FZ3ugf)

Bestimmen Sie die Lösung(en) der quadratischen Gleichungen.

a) $3x^2 = 6x + 9$
b) $x^2 + 5x - 6 = x - 8$
c) $x^2 - 7x + 12 = x + 4$
d) $-4x^2 + 3x - \frac{5}{3} = x^2 + x$
e) $x^2 = 3x - 5$
f) $-5x^2 + 9x + 7 = 2x + 6$

Aufgabe 4.47 (cpbg79)

Schauen Sie sich die Beschreibung der Wushan-Brücke zu Beginn dieses Kapitels noch einmal genau an und bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

a) Zeichnen Sie die Funktion des Brückenbogens mithilfe der Tabellenfunktion Ihres Taschenrechners in ein Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse von $0 \le x \le 500$; y-Achse: $-80 \le y \le 80$)
b) Berechnen Sie die Gesamtlänge der Fahrbahn innerhalb des Brückenbogens. Runden Sie Ihr Ergebnis auf ganze Zahlen.
c) Ermitteln Sie die Länge des längsten Hängers ohne die Scheitelpunktform zu nutzen.
d) Bestimmen Sie die Scheitelpunktform der Funktion w(x) und verwenden Sie diese, um das Ergebnis aus Teilaufgabe c) zu überprüfen.
e) Berechnen Sie die Länge des 4. und des 18. Hängers.

Aufgabe 4.48 (1i87EF)

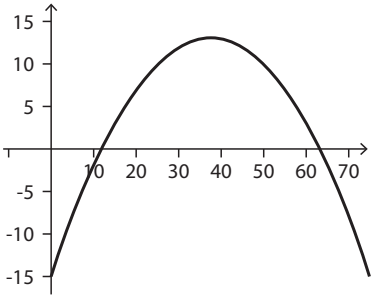
Beim Kugelstoßen folgt die Kugel einer parabelförmigen Flugbahn, die vom Abwurfwinkel und der Abwurfgeschwindigkeit abhängt. In unserem Beispiel verlässt die Kugel die Hand in einer Höhe von 2 m über dem Erdboden und erreicht ihre maximale Höhe von 3,25 m, nachdem sie horizontal 4 m vom Abwurfort entfernt ist.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Flugbahn in Normalform.
b) Berechnen Sie die Weite des Kugelstoßes, also die horizontale Entfernung vom Abwurfort bis zum Auftreffen der Kugel auf den Boden.
c) Bestimmen Sie, in welcher Entfernung vom Abwurfort sich die Kugel befindet, wenn sie eine Höhe von 0,75 m erreicht.

Aufgabe 4.49 (NizC2k)

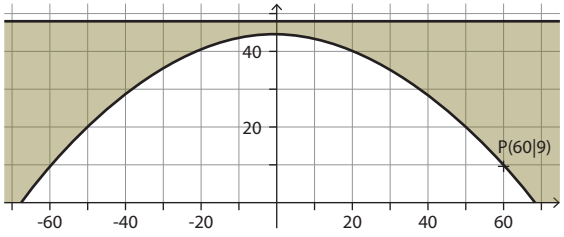
Der Bogen einer Hängebrücke wird durch die Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}5x - 15$ beschreiben.

a) Berechnen Sie die Länge der Fahrbahn innerhalb des Brückenbogens.
b) Bestimmen Sie die maximale Höhe der Brücke, wenn die Fahrbahn 15 m über dem Erdboden liegt.
c) Zeichnen Sie vier gleichmäßig verteilte Hänger ein, die die Fahrbahn mit dem Brückenbogen verbinden. Berechnen Sie die jeweilige Länge dieser Hänger.



Aufgabe 4.50 (FiT7M4)

Die Abbildung zeigt eine Brücke, deren Brückenbogen eine Scheitelpunkthöhe von 45 m erreicht. Die Fahrbahn verläuft oberhalb des Brückenbogens. Ein Punkt der Parabel, die den Brückenbogen beschreibt, ist bekannt. Berechnen Sie die Spannweite der Brücke.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.5 LAGEBEZIEHUNG VON PARABELN UND GERADEN

Situationsbeschreibung – neue Halfpipe

Die Stadt Dortmund plant in einem neuen Wohngebiet den Bau eines Skateparks. Eine der geplanten Halfpipes soll mit einer zusätzlichen Rampe ausgestattet werden. Diese Rampe soll den Skatern den Zugang zur sogenannten "Table", also der Plattform im oberen Bereich der Halfpipe, erleichtern.

Die Funktionsgleichung der Halfpipe lautet: $f(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}6$.

Die Funktionsgleichung der Rampe lautet: $r(x) = 0{,}5x + 3$.

Schnittpunkte von Parabeln und Geraden (Nrfy12)

Ähnlich zur Lagebeziehung zwischen zwei Geraden gibt es auch bei Parabeln und Geraden drei Möglichkeiten, wie sie zueinander liegen können:

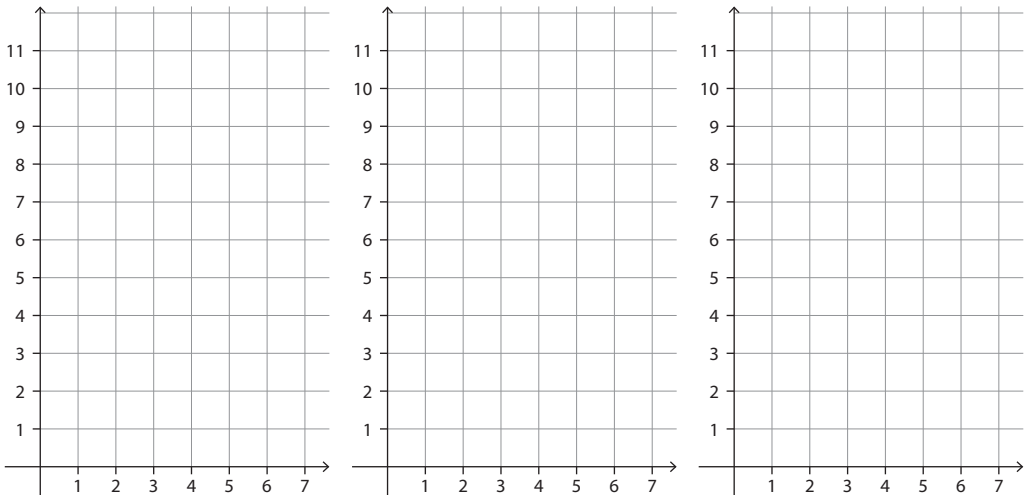
- Die Gerade schneidet die Parabel in zwei Punkten.
- Die Gerade berührt die Parabel (ein Schnittpunkt).
- Die Gerade schneidet die Parabel nicht (kein Schnittpunkt).

Die Vorgehensweise zur Berechnung ist im Ansatz identisch mit der im Kapitel 3.5 "Schnittpunkte von Geraden" beschriebenen Methode: Zunächst werden die Funktionsgleichungen gleichgesetzt, also $f(x) = g(x)$, und die entstehende Gleichung wird so umgeformt, dass auf einer Seite null steht. Anschließend wird diese Gleichung mithilfe eines bekannten Lösungsverfahrens, wie beispielsweise der pq- oder Mitternachtsformel, gelöst.

Aufgabe 4.51 (r43zXg)

a) Zeichnen Sie die jeweiligen Funktionspaare in das entsprechende Koordinatensystem:

$p(x) = x^2 - 6x + 9$	$p(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 4$	$p(x) = x^2 - 6x + 13$
$g(x) = x + 3$	$g(x) = -0{,}5x + 9$	$g(x) = 2x - 3$



b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionspaare aus Teilaufgabe a.

c) Notieren Sie, woran Sie erkennen können, ob sich die Funktionen nicht, einmal oder zweimal schneiden. Wenn in der pq-Formel der Wert unter der Wurzel …

Den Wert unter einer Wurzel nennt man **Diskriminante**.

… _____, dann haben die Funktionen **keinen** Schnittpunkt.

… _____, dann haben die Funktionen **einen** Schnittpunkt.

… _____, dann haben die Funktionen **zwei** Schnittpunkte.

d) Ordnen Sie folgende Begriffe zu: Sekante, Passante, Tangente
Eine Gerade, die mit einer Parabel …

… **keinen** Schnittpunkt hat, nennt man _____.

… **einen** Schnittpunkt hat, nennt man _____.

… **zwei** Schnittpunkte hat, nennt man _____.

Aufgabe 4.52 (zhXRfn)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Gerade g(x) eine Sekante, Tangente oder Passante zur Funktion f(x) ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = -x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $g(x) = 4$

c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$, $g(x) = x + 3$

d) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x - 4$, $g(x) = -x + 2$

e) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$, $g(x) = x + 2$

f) $f(x) = x^2 + 4$, $g(x) = -2x + 3$

Aufgabe 4.53 (DcxpR3)

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Gerade g(x) eine Sekante, Tangente oder Passante zur Funktion f(x) ist. Berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten der Schnittpunkte.

a) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 1)^2 - 4$, $g(x) = 0{,}5x + 1{,}5$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -x + 3$

c) $f(x) = (x - 1)^2 - \frac{11}{3}$, $g(x) = -2x + 4$

d) $f(x) = \frac{x^2}{8} - 3x + 10$, $g(x) = -4 + x$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$, $g(x) = 3x - 2$

f) $f(x) = 6x^2 - 2x + 4$, $g(x) = -3x + 2$

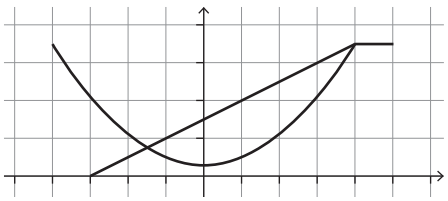
g) $f(x) = x^2 - x - 6$, $g(x) = 4x - 12$

h) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{10}{3}$, $g(x) = -x + 6$

i) $f(x) = x^2 + 2x + 5$, $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$

Aufgabe 4.54 (kUaTcE)

Schauen Sie sich die Situationsbeschreibung mit der Halfpipe auf der vorherigen Seite an. Die Rampe soll an den Punkten, wo sie den parabelförmigen Rahmen schneidet angeschweißt werden.



a) Bestimmen Sie die Schweißpunkte.

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Stelle, an dem die Rampe den Boden berührt.

c) Nach DIN-Norm 18040, die die Barrierefreiheit von Außenanlagen regelt, darf die Steigung von Rampen 6 % (entspricht etwa 3,43°) nicht überschreiten, sofern keine Alternativlösung möglich ist. Überprüfen Sie, ob die Rampe an der Halfpipe dieser Vorgabe entspricht, und bewerten Sie sie hinsichtlich der Barrierefreiheit. Gehen Sie dabei auch auf die Frage ein, ob eine Ausnahmegenehmigung sinnvoll und vertretbar wäre. Begründen Sie Ihre Entscheidung unter Berücksichtigung der Nutzerbedürfnisse.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.6 LAGEBEZIEHUNG ZWEIER PARABELN

Situationsbeschreibung – Brunnenskulptur
Im Westfalenpark soll eine kunstvolle Brunnenskulptur gestaltet werden. Die Anlage besteht aus zwei Wasserfontänen, deren Wasserstrahlen parabelförmig verlaufen. Die eine Fontäne spritzt Wasser höher in die Luft und beschreibt eine steilere Parabel, während die andere eine flachere und breitere Parabel bildet. Die Schnittpunkte der beiden Parabeln sind die Stellen, an denen sich die Wasserstrahlen kreuzen. Dies ist von besonderem Interesse, da genau an diesen Stellen ein spezieller Sprühnebel entsteht, der in der Abendbeleuchtung besonders beeindruckend wirkt.

- erste Fontäne: $f(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}8x + 3{,}2$
- zweite Fontäne: $g(x) = -0{,}2(x - 8)^2 + 5$

Diese Schnittpunkte sind nicht nur für das Design, sondern auch für technische Berechnungen wichtig, um sicherzustellen, dass die Pumpen den richtigen Wasserdruck liefern.

Schnittpunkte von zwei Parabeln (wtFFh1)
Ähnlich wie bei der Lagebeziehung zwischen Parabeln und Geraden gibt es auch bei zwei Parabeln drei mögliche Schnittpunktkonstellationen:

- Die Parabeln schneiden sich in zwei Punkten.
- Die Parabeln berühren/schneiden sich in einem Punkt.
- Die Parabeln schneiden sich nicht (kein gemeinsamer Punkt).

Die Methode zur Berechnung der Schnittpunkte entspricht dem Vorgehen im Kapitel 3.5 "Schnittpunkte von Geraden" und 4.5 "Lagebeziehung von Parabeln und Geraden": Zunächst werden die Funktionsgleichungen der Parabeln gleichgesetzt, also $f(x) = g(x)$. Anschließend wird die entstehende Gleichung so umgeformt, dass auf einer Seite 0 steht. Diese Gleichung wird dann mithilfe eines bekannten Lösungsverfahrens, wie der pq-Formel oder der Mitternachtsformel, gelöst. Falls zwei Schnittpunkte vorliegen, kann zusätzlich die Funktionsgleichung der Geraden berechnet werden, die durch diese Punkte verläuft.

Aufgabe 4.55 (UtnV11)
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionspaare Schnittpunkte haben. Falls sie existieren, berechnen Sie deren Koordinaten. Sofern zwei Schnittpunkte vorliegen, bestimmen Sie zusätzlich die Geradengleichung der Verbindungsstrecke zwischen diesen beiden Punkten.

a) $f_1(x) = -2x^2 + 3x + 5$, $f_2(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f_1(x) = -x^2 - 3x + 7$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

c) $f_1(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 9$, $f_2(x) = 0{,}5x^2 + x - 1$

d) $f_1(x) = 2x^2 - 7x + 9$, $f_2(x) = x^2 - 3x - 3$

e) $f_1(x) = -x^2 + 3x - 2$, $f_2(x) = x^2 + 3x - 4$

f) $f_1(x) = -2x^2 + 6x + 2$, $f_2(x) = x^2 - 6x - 34$

g) $f_1(x) = x^2 - 3x + 2$, $f_2(x) = (x - 3)^2$

h) $f_1(x) = -x^2 + 3x$, $f_2(x) = -(x - 2)^2 + 3$

i) $f_1(x) = x^2 - 2$, $f_2(x) = -x^2 + 2$

Aufgabe 4.56 (qKnv6F)
Ermitteln Sie, falls vorhanden, die Schnittpunkte der folgenden Funktionspaare. Berechnen Sie außerdem die zugehörige Geradengleichung, falls zwei Schnittpunkte existieren.

a) $f_1(x) = 0{,}6(x-4)^2 + 1$
$f_2(x) = -x^2 + 10{,}6$

b) $f_1(x) = -0{,}4(x-2)^2 + 7$
$f_2(x) = 0{,}7(x+2)^2 - 3$

c) $f_1(x) = -(x-4)^2 + 6$
$f_2(x) = 2(x+1)^2 - 5$

d) $f_1(x) = 2(x-2)^2 + 4$
$f_2(x) = -4(x+1)^2 + 8$

e) $f_1(x) = 0{,}2(x-6)^2 - 3$
$f_2(x) = 0{,}3(x+4)^2 + 2$

f) $f_1(x) = 0{,}9(x-3)^2 - 10$
$f_2(x) = -0{,}7(x-8)^2 + 4$

Aufgabe 4.57 (4jUjsz)
Gegeben sind jeweils der Scheitelpunkt S und ein weiterer Punkt P einer Parabel. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln und untersuchen Sie anschließend die Lage der Parabeln zueinander, indem Sie die Anzahl der Schnittpunkte angeben.

a) Parabel 1: S(2|–1), P(4|3)
Parabel 2: S(0|3), P(1|4)

b) Parabel 1: S(–2|–3), P(0|–1)
Parabel 2: S(1|2), P(2|5)

c) Parabel 1: S(3|4), P(5|8)
Parabel 2: S(–1|–2), P(0|0)

d) Parabel 1: S(1|0), P(3|8)
Parabel 2: S(–2|–1), P(1|5)

e) Parabel 1: S(–3|2), P(–1|6)
Parabel 2: S(0|–4), P(2|0)

f) Parabel 1: S(2|–2), P(5|4)
Parabel 2: S(–1|1), P(0|2)

g) Parabel 1: S(0|–3), P(1|1)
Parabel 2: S(2|5), P(3|9)

h) Parabel 1: S(–4|0), P(–3|5)
Parabel 2: S(3|–1), P(5|7)

Aufgabe 4.58 (YQWtkH)
Ein Freizeitpark möchte eine neue Achterbahn planen. Die Bahnen zweier Streckenabschnitte sollen sich an einem Punkt überschneiden, um spektakuläre Kreuzungen zu ermöglichen. Die Höhenverläufe der beiden Strecken können durch folgende Parabeln beschrieben werden:

– Strecke 1: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$
– Strecke 2: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

a) Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Bahnen.
b) Berechnen Sie die dazugehörigen y-Koordinaten der Schnittpunkte.
c) Geben Sie an, ob sich die beiden Bahnen in genau einem Punkt oder in zwei Punkten schneiden.
d) Erstellen Sie eine Skizze der Parabeln und markieren Sie die Schnittpunkte deutlich.

Aufgabe 4.59 (D2nAkf)
Sie sind dafür zuständig, den Verlauf eines neuen Fahrradwegs zu planen, der sich an einer Stelle mit einem bestehenden Weg kreuzen soll. Die Verläufe der beiden Wege können durch Parabeln beschrieben werden.

– Der neue Fahrradweg hat seinen Scheitelpunkt bei S(2|8). Ein weiterer Punkt auf diesem Weg liegt bei P(4|4).
– Der bestehende Weg wird durch $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x) für den neuen Fahrradweg.
b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Wege, um zu bestimmen, wo sich die beiden Verläufe kreuzen.
c) Ermitteln Sie die Schnittstellen des neuen Fahrradwegs f(x) mit den Koordinatenachsen, um herauszufinden, wo der Weg beginnt und endet.

Aufgabe 4.60 (qTrWxd)
Schauen Sie sich die Situationsbeschreibung auf der vorherigen Seite an und bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Wasserstrahlen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.7 LINEARFAKTORZERLEGUNG (FAKTORSCHREIBWEISE)

Situationsbeschreibung – Kunst in der Fußgängerzone
In einer Großstadt soll ein modernes Denkmal errichtet werden, das durch eine geschwungene Metallkonstruktion beeindruckt. Die Konstruktion besteht aus einer parabelförmigen Kurve, die von zwei Stützpfeilern gehalten wird. Um die Bauweise zu vereinfachen, soll die Gleichung der Parabel in Faktorschreibweise angegeben werden.
Die Planer haben bereits ermittelt, dass die Parabel die x-Achse an den Punkten $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$ schneidet. Zusätzlich liegt der höchste Punkt der Konstruktion, der Scheitelpunkt, bei S(1|9). Die Faktorschreibweise ist von zentraler Bedeutung, um die Position der Stützpfeiler und die benötigte Materialmenge für den Bau genau berechnen zu können. Außerdem soll die Symmetrie der Konstruktion für das ästhetische Erscheinungsbild genutzt werden.

Linearfaktorzerlegung (1wTBYa)
Eine quadratische Funktion kann in der **Linearfaktorzerlegung** (auch als Faktorschreibweise oder Nullstellenform bezeichnet) dargestellt werden, wenn mindestens eine Nullstelle bekannt ist. Die allgemeine Form lautet: $\mathbf{f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}$ mit $a \neq 0$

Sie trägt ihren Namen, weil die Funktion durch die Multiplikation mehrerer Faktoren in ihrer linearen Form dargestellt wird. Jeder dieser Faktoren beschreibt dabei eine Nullstelle der Funktion. Die Linearfaktorzerlegung basiert auf dem Satz vom Nullprodukt, der besagt: Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer der Faktoren null ist. Diese Eigenschaft wird genutzt, um die Nullstellen der Funktion sichtbar zu machen.

Hinweis
Näheres zum Satz vom Nullprodukt finden Sie in Kapitel 4.4 und 5.1.

Die Funktionsgleichung setzt sich aus den folgenden drei Faktoren zusammen:
1. Der **Streckungsfaktor** a: Dieser beeinflusst die Öffnung und die Form der Parabel. Er entscheidet, ob die Parabel gestreckt oder gestaucht ist. Außerdem legt das Vorzeichen von a fest, ob die Parabel nach oben ($a > 0$) oder nach unten ($a < 0$) geöffnet ist.
2. Die **erste Klammer** $(x - x_1)$: Diese beschreibt die erste Nullstelle x_1. Die Funktion wird genau dann null, wenn $x = x_1$ gilt.
3. Die **zweite Klammer** $(x - x_2)$: Diese beschreibt die zweite Nullstelle x_2. Auch hier wird die Funktion null, wenn $x = x_2$ gilt.

Wenn einer der beiden Klammerausdrücke $(x - x_1)$ oder $(x - x_2)$ null wird, ist das gesamte Produkt ebenfalls null:
– Ist $x = x_1$, wird $(x - x_1) = 0$, und damit ergibt sich $f(x) = 0$.
– Ist $x = x_2$, wird $(x - x_2) = 0$, und ebenfalls ergibt sich $f(x) = 0$.

Auf diese Weise lassen sich die Nullstellen sowie Eigenschaften wie Streckung, Stauchung und Öffnungsrichtung direkt ablesen. Diese Darstellungsform ist, neben der Normal- und Scheitelpunktform, besonders übersichtlich und hilfreich für die Analyse.

Ⓑ **Beispiel**

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2 \cdot (x - 4) \cdot (x + 3)$. Damit können die Werte aus der Gleichung abgelesen werden: **Streckungsfaktor a = 2**, **Nullstelle $x_1 = 4$**, **Nullstelle $x_2 = -3$**. Überprüfen lässt sich dies durch Einsetzen der Nullstellen:

1. $f(4) = 2 \cdot (4 - 4) \cdot (4 + 3) = 2 \cdot 0 \cdot 7 = 0$
   Da als Ergebnis null herauskommt, ist $x_1 = 4$ eine Nullstelle.
2. $f(-3) = 2 \cdot (-3 - 4) \cdot (-3 + 3) = 2 \cdot (-7) \cdot 0 = 0$
   Da auch hier als Ergebnis null herauskommt, ist auch $x_2 = -3$ eine Nullstelle.

Ⓑ **Beispiel**

Gegeben sei der Streckungsfaktor $a = -1{,}5$, die erste Nullstelle $x_1 = -5$ und die zweite Nullstelle $x_2 = 9$. Durch Einsetzen der Werte die Linearfaktorzerlegung ergibt sich die Lösung:
$f(x) = -1{,}5 \cdot (x - (-5)) \cdot (x - 9) = -1{,}5 \cdot (x + 5) \cdot (x - 9)$

Ⓑ **Beispiel**

Gegeben sei die erste Nullstelle $x_1 = -3$, die zweite Nullstelle $x_2 = 4$ und ein weiterer Punkt der Parabel P(–1|2). Für die Darstellung der Funktion als Linearfaktorzerlegung muss noch der Streckungsfaktor a berechnet werden:

1.	Einsetzen der Nullstellen:	$f(x) = a \cdot (x \mathbf{+ 3}) \cdot (x \mathbf{- 4})$	
2.	Einsetzen des Punktes P:	$\mathbf{2} = a \cdot (\mathbf{-1} + 3) \cdot (\mathbf{-1} - 4)$	| zusammenfassen
3.	Umstellen der Gleichung auf a:	$2 = a \cdot (2) \cdot (-5)$	| zusammenfassen
		$2 = -10a$	| :(–10)
		$\mathbf{a = -0{,}2}$	
4.	Aufstellen der Funktion:	$\mathbf{f(x) = -0{,}2 \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)}$	

Ⓑ **Beispiel**

Sollten Sie Hilfe bei der Multiplikation von Klammern benötigen, schauen Sie nochmal in das Kapitel 1.7.

Eine gegebene Linearfaktorzerlegung soll in die Normalform umgeformt werden:

1.	Gegebene Funktion:	$f(x) = -3(x + 2)(x - 6)$	
2.	Multiplizieren der Klammern:	$f(x) = -3(x^2 - 6x + 2x - 12)$	| zusammenfassen
		$f(x) = -3(x^2 - 4x - 12)$	
3.	Ausmultiplizieren der Klammer:	$\mathbf{f(x) = -3x^2 + 12x + 36}$	

Ⓑ **Beispiel**

Eine gegebene Normalform soll in die Linearfaktorzerlegung umgeformt werden:

1.	Gegebene Funktion:	$f(x) = 2x^2 + 6x - 20$	
2.	Berechnung der Nullstellen:	$0 = 2x^2 + 6x - 20$	| z. B. pq-Formel
		$\mathbf{x_1 = 2} \vee \mathbf{x_2 = -5}$	
3.	Aufstellen der Funktion:	$\mathbf{f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 5)}$	

Aufgabe 4.61 (rwePdj)

Geben Sie die Funktionsgleichung in Faktorschreibweise und Normalform an.

a) $a = -1{,}5$, $x_1 = 7$, $x_2 = -9$
b) $a = \frac{4}{5}$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$
c) $x_1 = 4{,}5$, $x_2 = 5$, P(4|–1)
d) $x_1 = -1$, $x_2 = -10$, P(1|5,5)
e) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, P(–1|4)
f) $x_1 = 12$, $x_2 = -3$, P(–4|–2)

Aufgabe 4.62 (28wTbN)

Geben Sie die Funktionsgleichungen in Normalform an.

a) $f(x) = 2(x - 1)(x + 4)$
b) $f(x) = -3(x + 2)(x - 5)$
c) $f(x) = 0{,}5(x - 3)(x + 6)$

Aufgabe 4.63 (6DWFgL)

Geben Sie die Funktionsgleichungen in Faktorschreibweise an.

a) $f(x) = 3x^2 + 9x - 30$
b) $f(x) = -2x^2 - 2x + 24$
c) $f(x) = 5x^2 - 10x + 5$

Aufgabe 4.64 (RDp1Eh)

Geben Sie die Faktorschreibweise der Konstruktion aus der Situationsbeschreibung an.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.8 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME (DREI UNBEKANNTE)

Situationsbeschreibung – Restaurantbesuch
Diesmal sind Yannik und Florian zusammen mit Giman, einer ehemaligen Mitschülerin der beiden, in der Keule.
Yannik hat 2 Cola, 1 Fassbrause und 2 Ginger-Ale getrunken und 17,30 Euro bezahlt.
Florian hat 1 Cola, 2 Fassbrause und 3 Ginger-Ale getrunken und 21,50 Euro bezahlt.
Giman hat 1 Cola, 3 Fassbrause und 2 Ginger-Ale getrunken und 21,90 Euro bezahlt.
Auch hier stellt sich die Frage, was jeweils ein Getränk kostet. Können Sie den dreien helfen?

Gauß'sches Eliminationsverfahren (chcdCm)



Das *Gauß'sche Eliminationsverfahren*, auch kurz *Gauß-Verfahren* genannt, ist eine Methode zur Lösung linearer Gleichungssysteme (LGS). Es ist nach dem deutschen Mathematiker *Carl Friedrich Gauß* (*30. April 1777; †23. Februar 1855) benannt, dessen Porträt vom 16. April 1991 bis zur Einführung des Euros am 01. Januar 2002 den 10-DM-Schein (DM = Deutsche Mark) zierte.
Das Gauß-Verfahren basiert auf dem **Additions- und Subtraktionsverfahren**, wie bereits im Kapitel 3.6 "Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte)" behandelt. Ziel des Verfahrens ist es, durch geschicktes Verrechnen die Koeffizienten Schritt für Schritt zu eliminieren und so die Bestimmung der Unbekannten zu ermöglichen.

Zunächst wird, wie bereits bei linearen Gleichungssystemen mit zwei Unbekannten, ein Gleichungssystem (diesmal mit drei Gleichungen und drei Unbekannten) aufgestellt.

I $\quad 2x + 1y + 2z = 17{,}3$
II $\quad 1x + 2y + 3z = 21{,}5$
III $\quad 1x + 3y + 2z = 21{,}9$

Variablen
x = Cola
y = Fassbrause
z = Ginger-Ale

Um die Gleichungen übersichtlicher darzustellen, stellt die Überführung in die sogenannte **Koeffizienten-Matrix** einen zentralen Schritt des Gauß-Verfahrens dar. Dabei werden die Variablen x, y und z weggelassen. Stattdessen enthält die Koeffizienten-Matrix ausschließlich die numerischen Werte (Koeffizienten) sowie die Ergebnisse auf der rechten Seite des Gleichungssystems. Hierbei trennt der senkrechte Strich die Koeffizienten von den Ergebnissen der Gleichungen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 1 & 2 & 3 & 21{,}5 \\ 1 & 3 & 2 & 21{,}9 \end{array}\right)$$

Beim Eintragen der Koeffizienten in die Matrix ist es wichtig, die Vorzeichen korrekt zu berücksichtigen. Wenn in einer Gleichung beispielsweise der Wert –2y steht, wird in der Matrix für den entsprechenden Platz eine –2 eingetragen (dazu gibt es später noch Beispiele).

Das Ziel des Gauß-Verfahrens besteht darin, ein Gleichungssystem beziehungsweise die zugehörige Koeffizienten-Matrix so umzuwandeln, dass die Matrix in **Stufenform** vorliegt. Eine Stufenform zeichnet sich dadurch aus, dass alle Koeffizienten unterhalb der Hauptdiagonale null sind, wodurch eine charakteristische Treppenstruktur entsteht.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & a \\ \mathbf{0} & y & z & b \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & z & c \end{array}\right)$$ oder mit einem beliebigen Zahlenbeispiel: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 8 & 35 \\ \mathbf{0} & 3 & 4 & 17 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Die Stufenform vereinfacht die Lösung eines Gleichungssystems erheblich. In der letzten Zeile der Matrix bleibt nur noch eine Unbekannte übrig, zum Beispiel z, die direkt berechnet werden kann. Die Werte der übrigen Unbekannten werden schrittweise aus den darüberliegenden Zeilen ermittelt, indem sie in die entsprechenden Gleichungen eingesetzt werden. Konkret bedeutet das:

- Der Wert von z kann direkt aus der letzten Zeile abgelesen werden.
- Mit dem bekannten Wert von z wird in der darüberliegenden Zeile y berechnet.
- Abschließend wird x bestimmt, indem die Werte von z und y in die erste Gleichung eingesetzt werden.

Beginnend mit der letzten Zeile des obigen beliebigen Zahlenbeispiels lässt sich aus der Gleichung $5z = 10$ unmittelbar $\mathbf{z = 2}$ berechnen. Dieser Wert wird anschließend in die zweite Zeile, $3y + 4z = 17$, eingesetzt, wodurch die Gleichung $3y + 4 \cdot 2 = 17$ entsteht. Daraus ergibt sich $\mathbf{y = 3}$. Abschließend werden die berechneten Werte $z = 2$ und $y = 3$ in die erste Zeile, $x + 6y + 8z = 35$, eingesetzt. Nach Umstellen der Gleichung ergibt sich $\mathbf{x = 1}$.

Ⓑ

Beispiel

Um die Verrechnung der Zeilen zu systematisieren, können Sie sich an folgende **Reihenfolge** halten:
1. II und I
2. III und I
3. III und II

1. Gegeben ist die folgende Matrix aus der **Situationsbeschreibung**:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 1 & 2 & 3 & 21{,}5 \\ 1 & 3 & 2 & 21{,}9 \end{array}\right)$$

2. **Eliminierung des ersten Koeffizienten in der zweiten Zeile**
   Um den ersten Koeffizienten in der zweiten Zeile zu eliminieren, werden die zweite und die erste Zeile miteinander verrechnet. Dazu wird in diesem Beispiel die zweite Zeile mit 2 multipliziert und anschließend die erste Zeile davon subtrahiert:

Hier werden nun die **zweite und erste** Zeile mit dem **Subtraktionsverfahren** verrechnet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ \textcircled{1} & 2 & 3 & 21{,}5 \\ 1 & 3 & 2 & 21{,}9 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \text{II} - \text{I}$$

   Das ergibt die folgende neue Matrix:

Die **erste Zeile** bleibt immer gleich und kann somit **unverändert** abgeschrieben werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 0 & 3 & 4 & 25{,}7 \\ 1 & 3 & 2 & 21{,}9 \end{array}\right)$$

3. **Eliminierung des ersten Koeffizienten in der dritten Zeile**
   Im nächsten Schritt wird der erste Koeffizient in der dritten Zeile eliminiert. Dafür wird die dritte Zeile mit 2 multipliziert, und anschließend wird die erste Zeile subtrahiert:

Hier werden nun die **dritte und erste** Zeile mit dem **Subtraktionsverfahren** verrechnet.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 0 & 3 & 4 & 25{,}7 \\ \textcircled{1} & 3 & 2 & 21{,}9 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \text{III} - \text{I}$$

   Das ergibt:

Da die **zweite Zeile** schon die gewünschte Null enthält, kann auch diese **unverändert** abgeschrieben werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 0 & 3 & 4 & 25{,}7 \\ 0 & 5 & 2 & 26{,}5 \end{array}\right)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

4. **Eliminierung des zweiten Koeffizienten in der dritten Zeile**
Im letzten Schritt wird der zweite Koeffizient in der dritten Zeile eliminiert. Dafür wird die dritte Zeile mit 3 und die zweite Zeile mit 5 multipliziert. Danach wird die dritte Zeile minus die zweite Zeile gerechnet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 0 & 3 & 4 & 25{,}7 \\ 0 & \textcircled{5} & 2 & 26{,}5 \end{array}\right) \quad 3 \cdot \text{III} - 5 \cdot \text{II}$$

Hier werden nun die **dritte und zweite** Zeile mit dem **Subtraktionsverfahren** verrechnet.

Es entsteht die gewünschte Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 0 & 3 & 4 & 25{,}7 \\ 0 & 0 & -14 & -49 \end{array}\right)$$

5. **Berechnung der Unbekannten**
Um die Werte für die Unbekannten x, y und z zu bestimmen, wird die Matrix wieder in Gleichungen umgewandelt:

$$\begin{aligned} 2x + 1y + 2z &= 17{,}3 \\ 3y + 4z &= 25{,}7 \\ -14z &= -49 \end{aligned}$$

Berechnung von z:
Aus der dritten Gleichung folgt direkt:

$$-14z = -49 \quad | :(-14)$$
$$\mathbf{z = 3{,}5}$$

=> Ein Ginger-Ale kostet 3,50 Euro.

Berechnung von y:
Der Wert z = 3,5 wird in die zweite Gleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} 3y + 4z &= 25{,}7 \\ 3y + 4 \cdot 3{,}5 &= 25{,}7 \\ 3y + 14 &= 25{,}7 \quad | -14 \\ 3y &= 11{,}7 \quad | :3 \\ \mathbf{y} &\mathbf{= 3{,}9} \end{aligned}$$

=> Eine Fassbrause kostet 3,90 Euro.

Berechnung von x:
y und z werden in die Gleichung der ersten Zeile eingesetzt und auf x umgestellt:

$$\begin{aligned} 2x + 1y + 2z &= 17{,}3 \\ 2x + 1 \cdot 3{,}9 + 2 \cdot 3{,}5 &= 17{,}3 \\ 2x + 3{,}9 + 7 &= 17{,}3 \\ 2x + 10{,}9 &= 17{,}3 \quad | -10{,}9 \\ 2x &= 6{,}4 \quad | :2 \\ \mathbf{x} &\mathbf{= 3{,}2} \end{aligned}$$

=> Eine Cola kostet 3,20 Euro.

Wichtige Rechenregeln beim Gauß-Verfahren (chcdCm)
Beim Gauß-Verfahren dürfen die folgenden Operationen durchgeführt werden, um die Matrix zu vereinfachen und in Stufenform zu überführen:
- Zeilen und Spalten dürfen vertauscht werden.
- Eine Zeile darf mit einer Zahl multipliziert oder durch eine Zahl dividiert werden, solange die Zahl ungleich null ist.
- Zwei Zeilen können addiert oder voneinander subtrahiert werden.

Diese Regeln sind essenziell, um die Matrix schrittweise in Stufenform zu bringen, ohne die Lösungen des Gleichungssystems zu verändern.

ⓘ **Minimalschreibweise des Gauß'schen Eliminationsverfahrens (chcdCm)**

Um Schreibarbeit zu sparen, kann das Gauß-Verfahren in einer verkürzten Form dargestellt werden, indem die Zwischenschritte der Rechnungen zusammengefasst werden. Dies erfordert jedoch etwas Übung. Der Lösungsweg aus dem obigen Beispiel in "verkürzter Form" sieht folgendermaßen aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 1 & 2 & 3 & 21{,}5 \\ 1 & 3 & 2 & 21{,}9 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 2 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 2 \cdot \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 0 & 3 & 4 & 25{,}7 \\ 0 & 5 & 2 & 26{,}5 \end{array}\right) \quad 3 \cdot \text{III} - 5 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 17{,}3 \\ 0 & 3 & 4 & 25{,}7 \\ 0 & 0 & -14 & -49 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{lrl} \text{III} & -14z = -49 & \mid :(-14) \\ & \mathbf{z = 3{,}5} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{II} & 3y + 4z = 25{,}7 & \\ & 3y + 4 \cdot 3{,}5 = 25{,}7 & \mid -14 \\ & 3y = 11{,}7 & \mid :3 \\ & \mathbf{y = 3{,}9} & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2x + y + 2z = 17{,}3 & \\ & 2x + 3{,}9 + 2 \cdot 3{,}5 = 17{,}3 & \mid -10{,}9 \\ & 2x = 6{,}4 & \mid :2 \\ & \mathbf{x = 3{,}2} & \end{array}$$

L = {(3,2 ; 3,9 ; 3,5)}

Für Aufgaben in einem Sachkontext ist es notwendig, die Lösung in einem vollständigen Antwortsatz zu formulieren.
Beispiel: Yannik, Florian und Giman zahlen für eine Cola 3,20 Euro, eine Fassbrause 3,90 Euro und ein Ginger-Ale 3,50 Euro.

Aufgabe 4.65 (vRMUQ1)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

a) $6x + 5y + 4z = 56$, $3x + 3y + 1z = 24$, $2x + 2y + 1z = 18$

b) $4x + 5y + 3z = 25$, $2x + 3y + 4z = 19$, $1x + 4y + 6z = 25$

c) $8x + 4y + 3z = 40$, $4x + 5y + 4z = 33$, $2x + 3y + 1z = 13$

Aufgabe 4.66 (j9f5qv)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

a) $5x + 4y + 2z = 54$, $3x + 3y + 2z = 38$, $2x + 2y + 1z = 24$

b) $6x + 5y + 3z = 67$, $4x + 4y + 3z = 50$, $3x + 4y + 2z = 42$

c) $6x + 4y + 2z = 22$, $5x + 4y + 3z = 25$, $3x + 4y + 3z = 23$

Aufgabe 4.67 (rL5eFe)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

a) $7x + 5y + 4z = 43{,}3$, $4x + 4y + 2z = 29$, $1x + 3y + 1z = 17{,}8$

b) $5x + 3y + 3z = 39{,}7$, $4x + 3y + 4z = 38{,}4$, $2x + 2y + 3z = 24$

c) $10x + 6y + 5z = 40{,}7$, $5x + 4y + 3z = 24{,}2$, $4x + 3y + 3z = 20{,}9$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Gauß-Verfahren auch mit negativen Koeffizienten (chcdCm)

Bisher wurden Aufgaben mit ausschließlich positiven Koeffizienten behandelt. Um zu verdeutlichen, dass beim Gauß-Verfahren nicht nur Subtraktions-, sondern auch Additionsschritte nötig sind, folgt hier ein Beispiel, in dem auch negative Koeffizienten auftreten.

1. **Überführung eines linearen Gleichungssystem in die Koeffizienten-Matrix**

$4x - 3y + 5z = 43$
$-2x + 5y - 4z = -36$
$3x - 5y + 2z = 29$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 5 & 43 \\ -2 & 5 & -4 & -36 \\ 3 & -5 & 2 & 29 \end{array}\right)$$

2. **Eliminierung des ersten Koeffizienten in der zweiten und dritten Zeile**

Wie zuvor beschrieben, werden zunächst die zweite und erste sowie anschließend die dritte und erste Zeile miteinander verrechnet, um jeweils den ersten Koeffizienten in der zweiten und dritten Zeile auf null zu bringen. Da –2 und 4 unterschiedliche Vorzeichen besitzen, werden die zweite und erste Gleichungen addiert; da 3 und 4 dasselbe Vorzeichen haben, erfolgt eine Subtraktion von Zeile drei und eins.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 5 & 43 \\ -2 & 5 & -4 & -36 \\ 3 & -5 & 2 & 29 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 2 \cdot \text{II} + \text{I} \\ 4 \cdot \text{III} - 3 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 5 & 43 \\ 0 & 7 & -3 & -29 \\ 0 & -11 & -7 & -13 \end{array}\right)$$

3. **Eliminierung des zweiten Koeffizienten in der dritten Zeile**

Anschließend werden die dritte und die zweite Zeile miteinander verrechnet, um den zweiten Koeffizienten in der dritten Zeile auf null zu bringen. Da –11 und 7 unterschiedliche Vorzeichen haben, erfolgt eine Addition.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 5 & 43 \\ 0 & 7 & -3 & -29 \\ 0 & -11 & -7 & -13 \end{array}\right) \quad 7 \cdot \text{III} + 11 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 5 & 43 \\ 0 & 7 & -3 & -29 \\ 0 & 0 & -82 & 410 \end{array}\right)$$

4. **Rückführung in Gleichungen und Berechnung der Unbekannten**

III $-82z = 410 \quad | :(-82)$
$\mathbf{z = 5}$

II $7y - 3z = -29$
$7y - 3 \cdot 5 = -29 \quad | +15$
$7y = -14 \quad | :7$
$\mathbf{y = -2}$

I $4x - 3y + 5z = 43$
$4x - 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 5 = 43 \quad | -31$
$4x = 12 \quad | :4$
$\mathbf{x = 3}$

=> Die Lösung dieses Gleichungssystem lautet daher **L = {(3 ; –2 ; 5)}**.

Merke
Für das Additions- bzw. Subtraktionsverfahren gilt in Bezug auf die Vorzeichen folgende Regel:
gleich => subtrahieren (–)
verschieden => addieren (+)

Aufgabe 4.68 (qHvWFz)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

a) $3x - 5y + 2z = 29$
$-2x + 6y - z = -26$
$4x - 3y + 5z = 37$

b) $5x + 2y - 3z = 11$
$-6x + 4y + 2z = 22$
$3x - y + 6z = -20$

c) $-3x + 5y + 6z = -16$
$2x - 4y - 5z = 11$
$6x + 3y - z = 17$

Aufgabe 4.69 (XwkWLH)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

a) $4x - 6y + 2z = -16$
$-5x + 2y + z = 21$
$6x + 5y - 3z = -12$

b) $-6x + 2y + 5z = -30$
$5x + 3y - 4z = 20$
$-2x + 6y + z = -14$

c) $3x - 2y + 6z = 37$
$-4x + 5y - z = -33$
$2x + 3y + 2z = -5$

Aufgabe 4.70 (LU8kw7)

Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

a) $4a + 2b - c = 10$
$5b + 3c = 19$
$3a - b = 8$

b) $6a - 3b + c = 15$
$2a - 4c = -6$
$b + c = 5$

c) $5a + b - c = 18$
$4b + 2c = 22$
$2a - 3c = -4$

Aufgabe 4.71 (8WVBjT)

Mike plant den Verkauf von drei Immobilien, muss aber ein paar Reparaturen machen lassen. Er beauftragt ein Generalunternehmen, die alle Arbeiten (Maler-, Elektriker- und Fliesenlegerarbeiten) koordiniert. Mike erhält jeweils nur eine Gesamtrechnung pro Wohnung, weil die Firma alle Leistungen zusammen abrechnet. Er hat sich jedoch bei den Bauleiterbesuchen notiert, wie lange die einzelnen Handwerker für jedes Haus gearbeitet haben:

- Wohnung 1: 5 Std. Maler, 3 Std. Elektriker, 2 Std. Fliesenleger | Gesamtkosten: 670 Euro
- Wohnung 2: 3 Std. Maler, 4 Std. Elektriker, 3 Std. Fliesenleger | Gesamtkosten: 710 Euro
- Wohnung 3: 6 Std. Maler, 2 Std. Elektriker, 4 Std. Fliesenleger | Gesamtkosten: 820 Euro

a) Was verlangt die Generalunternehmer-Firma pro Stunde für Maler-, Elektriker- und Fliesenlegerarbeiten?

b) Die Gesamtkosten enthalten jeweils die gesetzliche Mehrwertsteuer in Höhe von 19 %. Wie hoch ist jeweils der Netto-Rechnungsbetrag?

Aufgabe 4.72 (g7UwAF)

Nina plant eine groß angelegte Marketingkampagne für drei verschiedene Kunden. Sie beauftragt eine Druckerei, die sowohl Flyer, Poster als auch Banner gestaltet, druckt und liefert. Zur Vereinfachung der Abrechnung stellt die Druckerei jeweils eine Gesamtrechnung pro Kampagne aus, unabhängig davon, welche Produkte genau bestellt wurden. Nina hat sich jedoch intern notiert, welche Mengen sie jeweils bestellt hat:

- Kampagne A: 200 Flyer, 50 Poster, 10 Banner | Gesamtkosten: 872,00 Euro.
- Kampagne B: 150 Flyer, 80 Poster, 15 Banner | Gesamtkosten: 1297,20 Euro.
- Kampagne C: 250 Flyer, 40 Poster, 8 Banner | Gesamtkosten: 709,30 Euro.

Wie hoch sind die Produktionskosten pro Flyer, pro Poster und pro Banner?

Aufgabe 4.73 (96SpLY)

Mike (Architekt) und Nina (Werbeagentur-Chefin) präsentieren sich gemeinsam auf einer großen Architektur- und Designmesse. Um Zeit zu sparen, beauftragen sie eine Messebaufirma, die sich um die komplette Ausstattung ihrer Messestände kümmert: Lieferung von Stühlen, Tischen und Leuchtwänden. Die Firma rechnet pauschal pro Stand ab, ohne Einzelpreise aufzulisten. Mike und Nina haben sich jedoch auf ihren Bestellzetteln notiert, welche Mengen sie bestellt haben:

- Stand 1: 8 Stühle, 3 Tische, 2 Leuchtwände | Gesamtkosten: 345,01 Euro.
- Stand 2: 5 Stühle, 5 Tische, 1 Leuchtwand | Gesamtkosten: 222,12 Euro.
- Stand 3: 6 Stühle, 2 Tische, 3 Leuchtwände | Gesamtkosten: 460,14 Euro.

Wie teuer ist jeweils ein Stuhl, ein Tisch und eine Leuchtwand?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Vertauschen von Zeilen in der Koeffizientenmatrix (xY64vx)

In den "Wichtigen Rechenregeln beim Gauß-Verfahren" zu Beginn dieses Kapitels wird die Regel des *Vertauschens von Zeilen und Spalten* erwähnt. Aber an welcher Stelle und warum sollte man so etwas durchführen? Dazu folgendes Beispiel mit zufälligen Zahlwerten:

1. **Überführung eines linearen Gleichungssystems in die Koeffizienten-Matrix**

   $0x + 2y + 5z = 11$
   $3x + 1y - 1z = 8$
   $1x + 4y + 2z = 16$

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 5 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

2. **Vertauschen von Zeilen**

   In diesem Fall kann das bekannte Schema nicht direkt angewendet werden, da der erste Koeffizient in der ersten Zeile (0x) gleich null ist. Somit ist keine Verrechnung möglich, um die darunterliegende 3 zu eliminieren. Deshalb wird die erste und zweite Zeile vertauscht, sodass ein führender x-Koeffizient ungleich null (nämlich die 3) an erster Stelle steht. Durch dieses Vertauschen entfällt der erste Verrechnungsschritt (zweite mit der ersten Zeile), da die Null an der gewünschten Stelle nun bereits vorhanden ist.

   Zumindest ist keine Verrechnung mit der schematisierten Verrechnungsreihenfolge (II/I, III/I, III/II) möglich!

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

3. **Durchführung der übrigen Rechenschritte**

   Jetzt können die restlichen Schritte des Gauß-Verfahrens normal ausgeführt werden. Am Ende ergibt sich folgende Matrix:

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -41 & -41 \end{array}\right)$$

   Daraus ergibt sich die Lösung: $L = \{(2 ; 3 ; 1)\}$

Sie sind gefragt...
Führen Sie das hier durchgeführte Gauß-Verfahren und die Bestimmung der gesuchten Variablen selbstständig aus.

Vertauschen von Zeilen und Spalten in der Koeffizientenmatrix (WQ2TBr)

Eine weitere Möglichkeit zur Anwendung des Gauß-Verfahrens besteht darin, je nach Struktur des linearen Gleichungssystems nicht nur Zeilen, sondern bei Bedarf auch Spalten zu vertauschen. Hierzu ein Beispiel mit zufällig gewählten Zahlenwerten:

1. **Überführung eines linearen Gleichungssystems in die Koeffizienten-Matrix**

   $1x + 0y + 2z = 0$
   $3x + 0y + 4z = 2$
   $5x + 6y + 7z = 9$

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

2. **Vertauschen von Zeilen und Spalten**

   In der obigen Matrix fällt auf, dass bereits an zwei Positionen eine Null vorhanden ist. Um das Gauß-Verfahren effizient anzuwenden, wird die dritte Zeile an die erste Stelle verschoben und zusätzlich die erste Spalte mit der zweiten Spalte vertauscht, sodass nur noch der letzte Verrechnungsschritt (dritte und zweite Zeile) durchgeführt wird.

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Sie sind gefragt...
Führen Sie das hier durchgeführte Gauß-Verfahren und die Bestimmung der gesuchten Variablen selbstständig aus.

3. **Durchführung der übrigen Rechenschritte**
Nun muss lediglich noch die 3 in der letzten Zeile durch den dritten Rechenschritt unseres Schemas eliminiert werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

ACHTUNG: Da die erste und zweite Spalte vertauscht wurden, ist bei der Bestimmung der Werte für x, y und z zu beachten, dass die erste Spalte nun für y (statt x) und die zweite Spalte für x (statt y) steht.
Das Gleichungssystem hat damit die Lösung: L = {(2; 1; –1)}.

ⓘ **Manchmal reicht "der kleine Gauß" auch aus (UHE6R1)**
Es gibt Fälle, in denen sich bereits beim Aufstellen des linearen Gleichungssystems erkennen lässt, dass eine vollständige Durchführung des Gauß-Algorithmus nicht notwendig ist.
2x + 1y – 3z = –8
1x + 4y + 2z = 3
0x + 0y + 5z = 20

Da in der letzten Zeile des Systems die Koeffizienten vor x und y null sind, kann z sofort bestimmt werden, nämlich mit z = 4. Anschließend gibt es zwei Vorgehensweisen: Entweder man stellt die reguläre Koeffizienten-Matrix auf und führt nur noch einen Verrechnungsschritt zwischen der zweiten und der ersten Zeile durch, oder man setzt den bekannten Wert für z direkt in die beiden oberen Gleichungen ein und löst das daraus entstehende kleinere Gleichungssystem.

Je nach Position der Nullen können auch hier Spalten und Zeilen vertauscht werden um eine möglichst einfache Koeffizientenmatrix zu erzielen.

1. **Durchführung der ersten Möglichkeit**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \text{II} - \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array}\right)$$

Nun können die Werte für x, y und z ganz einfach bestimmt werden.

Alternativen
Bei einem so kleinen Linearen Gleichungssystem können Sie alternativ auch das Einsetzungs- oder Gleichsetzungsverfahren nutzen um die Werte für x und y zu bestimmen.

2. **Durchführung der zweiten Möglichkeit**
Mit z = 4 ergibt sich für die ersten beiden Zeilen folgendes Lineares Gleichungssystem:
2x + 1y = 4
1x + 4y = –5

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \text{II} - \text{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right)$$

Und auch hier können nun die Werte für x und y bestimmt werden.

Aufgabe 4.74 (xgTysu)
Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

a) 0x + 2y + 5z = 13
2x + y – 2z = –3
x + 3y + 4z = 11

b) 2x + y + 0z = 3
x + 4y + 0z = –2
3x + 2y + 5z = 19

c) 2x + y – 3z = –6
5x + 0y + 0z = 10
x + 2y + 3z = 9

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.9 QUADRATISCHE FUNKTIONEN MIT LGS BESTIMMEN

Situationsbeschreibung – Eingangsbereich eines Kinos
Ein neues Kino plant eine auffällige Lichtinstallation über dem Eingangsbereich. Diese Installation soll in Form einer Parabel gestaltet werden, um die Aufmerksamkeit der Passanten zu gewinnen. Drei Kontrollpunkte an der Parabel wurden zur Planung vermessen:

- Der Punkt in 2 Metern horizontaler Entfernung vom Ursprung liegt 3 Meter hoch.
- Ein zweiter Messpunkt bei 4 Metern Entfernung erreicht eine Höhe von 6 Metern.
- Der dritte Messpunkt befindet sich bei 6 Metern Entfernung und liegt 3 Meter hoch.

Quadratischen Funktionen mit Gauß bestimmen (PYrq5N) ⓘ
Quadratische Funktionen und lineare Gleichungssysteme scheinen auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun zu haben. Das eine ist ja quadratisch und das andere linear. Tatsächlich können jedoch mithilfe von linearen Gleichungssystemen und dem Gauß'schen Eliminationsverfahren quadratische Funktionen bestimmt werden.

Beispiel Ⓑ
Gegeben sind die Punkte A(–1|9), B(2|4,5) und C(3|5), die auf dem Graphen einer Parabel liegen. Gesucht ist die Funktionsgleichung der Parabel in der Normalform $f(x) = ax^2 + bx + c$

1. Die Koordinaten der Punkte A, B und C werden in die Normalform der Parabel eingesetzt, um drei Gleichungen mit den drei Unbekannten a, b und c zu erhalten:
   Für Punkt A(–1|9): $9 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$
   Für Punkt B(2|4,5): $4{,}5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$
   Für Punkt C(3|5): $5 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$

   Somit ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:
   $9 = a - b + c$
   $4{,}5 = 4a + 2b + c$
   $5 = 9a + 3b + c$

2. Das Gleichungssystem kann als Koeffizientenmatrix dargestellt werden:
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 4{,}5 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

   Die Matrix lässt sich nun mit dem Gauß-Verfahren lösen. Die Ergebnisse stehen hier nicht für x, y und z, sondern für a, b und c. Die Werte beschreiben den Streckungsfaktor (a), die Verschiebung in x-Richtung (b) sowie den y-Achsenabschnitt (c) der Parabel.

Bevor Sie umblättern, versuchen Sie das Gleichungssystem selbstständig zu lösen.

3. Die Koeffizientenmatrix wird nun mit dem Gauß-Verfahren gelöst:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 4{,}5 \\ 9 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 6 & -3 & -31{,}5 \\ 0 & 12 & -8 & -76 \end{array}\right) \quad \text{III} - 2 \cdot \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 9 \\ 0 & 6 & -3 & -31{,}5 \\ 0 & 0 & -2 & -13 \end{array}\right)$$

III $-2c = -13 \quad | :(-2)$

$\mathbf{c = 6{,}5}$

II $6b - 3c = -31{,}5$

$6b - 3 \cdot 6{,}5 = -31{,}5 \quad | +18{,}5$

$6b = -12 \quad | :6$

$\mathbf{b = -2}$

I $a - b + c = 9$

$a - (-2) + 6{,}5 = 9 \quad | -8{,}5$

$\mathbf{a = 0{,}5}$

$\Rightarrow \mathbf{f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 6{,}5}$

Die Lösung wird nicht als Lösungsmenge des Gleichungssystems notiert, sondern die ermittelten Werte für a, b und c werden direkt in die Normalform der quadratischen Funktion eingesetzt.

Aufgabe 4.75 (Lsp33W)

Der Graph der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ verläuft durch die Punkte A, B und C. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

a) A(1|0), B(2|3), C(–1|6)
b) A(0|–2), B(2|4), C(–1|–7,5)
c) A(–2|3), B(0,5|–4,5), C(4|16,5)
d) A(1|7), B(–2|4), C(3|–11)
e) A(4|3), B(–1|–2), C(3|0)
f) A(3|7,5), B(2|9), C(5|–13,5)

Aufgabe 4.76 (A2XmFv)

Sie sollen die Höhe eines parabelförmigen Brückenbogens bestimmen. Da der Bogen zu hoch für eine direkte Messung ist, messen Sie den Abstand der Fußpunkte, der 20 m beträgt. Zusätzlich ermitteln Sie die Höhe 2 m vom Fußpunkt entfernt, die 1,80 m beträgt.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung des Bogens.
b) Berechnen Sie die maximale Höhe des Bogens.

Aufgabe 4.77 (e7AhV9)

Gegeben sind die folgenden Punkte einer quadratischen Funktion. Bestimmen Sie zu jeder Teilaufgabe sowohl die Normalform, als auch die Scheitelpunktform.

a) A(4|11,4), B(3|8), C(–2|9)
b) A(2|–6), B(1|–3), C(–1|–9)
c) A(–6|1), B(2|9), C(–2|–3)
d) A(0,5|3,5), B(1|–5), C(–1|–7)
e) A(5|8,5), B(2|4,5), C(–3|–3,5)
f) A(1|–0,5), B(–2|7,5), C(3|4)

Aufgabe 4.78 (bgVWwz)

Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Situationsbeschreibung auf der vorherigen Seite.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



4.10 VERMISCHTE ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 4.79 (xQ4wB4)

Welche der folgenden Punkte liegen auf der Normalparabel $f(x)=x^2$? Überprüfen Sie dies rechnerisch oder durch Überlegen und kreuzen Sie die passenden Punkte an.

☐ A(1,5|2,25) ☐ D(−1|−1) ☐ G(2,5|6,25)
☐ B(−2|4) ☐ E($-\frac{1}{2}|\frac{1}{4}$) ☐ H(3|−9)
☐ C(3|8) ☐ F(0,5|0,25) ☐ I(1|2)

Aufgabe 4.80 (tSwGqZ)

Überprüfen Sie die folgenden Aussagen zur Normalparabel $f(x) = x^2$. Markieren Sie, ob die jeweilige Aussage richtig oder falsch ist.

		richtig	falsch
a)	Der Punkt P(2|−4) gehört zur Normalparabel.	☐	☐
b)	Der Punkt P(2,5|6,25) liegt auf der Parabel, daher liegt auch der Punkt Q(−2,5|6,25) auf der Parabel.	☐	☐
c)	Für $x < 0$ steigen die Funktionswerte der Normalparabel.	☐	☐
d)	Wird der x-Wert verdoppelt, vervierfacht sich der zugehörige Funktionswert.	☐	☐

Aufgabe 4.81 (gRUPP9)

Prüfen Sie, welcher der folgenden Punkte auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 2$ liegt:

☐ A(0|−2) ☐ B(−1|−1) ☐ C(−2|−6) ☐ D($\sqrt{2}$|0) ☐ E(−2|−3)

Aufgabe 4.82 (WZwVMD)

Die Punkte A, B, C, D und E liegen auf der Parabel mit $f(x) = x^2 + 3$. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten.

a) A(1,5| y) b) B(x |7) c) C(−3| y) d) D(x |19) e) E(−2,5| y)

Aufgabe 4.83 (vHxRWn)

Gegeben sind die Parabeln mit

1.) $f(x) = x^2 + 1$ 2.) $g(x) = x^2 - 2$ 3.) $h(x) = x^2 + 4$

und die Punkte A(−1|2), B(1|−1), C(−2|0) und D(2|8)

a) Zeichnen Sie die drei Parabeln in ein gemeinsames Koordinatensystem.
b) Bestimmen Sie zeichnerisch, welcher der gegebenen Punkte auf welcher Parabel liegt.
c) Prüfen Sie nun rechnerisch Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe b).

◒ **Aufgabe 4.84 (u4xgbq)**

Verschieben Sie die Normalparabel so in y-Richtung, dass der jeweilige Punkt auf der Parabel liegt. Geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung in der Form $f(x) = x^2 + c$ sowie den Scheitelpunkt der verschobenen Parabel an.

a) A(0|4) b) B(2|0) c) C(–1|3) d) D(0|7) e) E(–2|1)

○ **Aufgabe 4.85 (FXCkCS)**

Welche der gegebenen Punkte liegen auf der Parabel $f(x) = (x – 2)^2$?

a) A(–1|9) b) B(3|2) c) C(2|0)

○ **Aufgabe 4.86 (sRR7M9)**

Die Punkte A, B und C liegen auf der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = (x – 1)^2$. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten.

a) A(3| y) b) B(4| y) c) C(–5| y)

◒ **Aufgabe 4.87 (RVe2yC)**

Die Punkte A, B und C liegen auf der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = (x + 3)^2$. Bestimmen Sie die fehlenden Koordinaten.

a) A(x |9) b) B(x |25) c) C(x |6,25)

● **Aufgabe 4.88 (gFVwhR)**

Geben Sie zu den folgenden Eigenschaften jeweils die Funktionsgleichung einer in x-Richtung verschobenen Parabel in der Form $f(x) = (x – d)^2$ an.

a) Der Scheitelpunkt ist S(–6|0).
b) Die Gerade x = 5 ist Symmetrieachse der Parabel.
c) Der Punkt P(2|16) liegt auf dem Graphen.

○ **Aufgabe 4.89 (4RTsyH)**

Ergänzen Sie die fehlenden Angaben in der Tabelle.

	Funktionsgleichung	Scheitel-punkt	Verschiebung in x-Richtung	Verschiebung in y-Richtung
a)	$f(x) = (x – 3)^2 – 5$			
b)		S(2|–7)		
c)			6 Einheiten nach links	3 Einheiten nach oben
d)		$S(\frac{3}{2}\|\frac{4}{5})$		
e)	$f(x) = (x + 4)^2 – 8$			
f)			3 Einheiten nach rechts	$\frac{3}{2}$ Einheinten nach unten

● **Aufgabe 4.90 (AtxpgV)**

Geben Sie zu den folgenden Eigenschaften jeweils die Gleichung einer in x- und y-Richtung verschobenen Normalparabel an.

a) Der Scheitelpunkt ist S(1|4).
b) Der Scheitelpunkt ist S(–3|2).
c) Die Gerade x = –2 ist die Symmetrieachse der Parabel und der Punkt P(0|5) liegt auf dem Graphen.
d) Die y-Koordinate des Scheitelpunktes ist 7 und die Gerade x = 5 ist die Symmetrieachse der Parabel.
e) Der Scheitelpunkt ist S(0|–3).

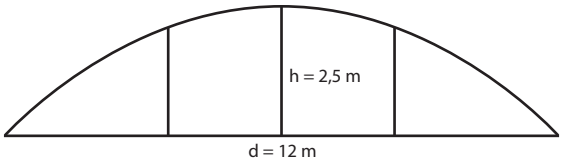
DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.91 (bXpkKT)



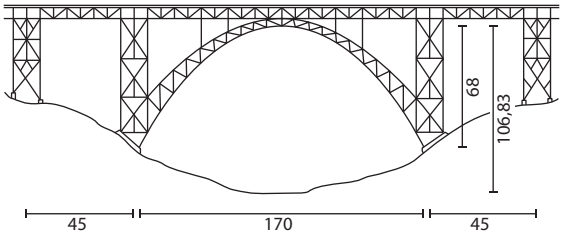
Die Storebelt-Brücke in Dänemark zählt zu den größten Hängebrücken Europas und verbindet die Inseln Fünen und Seeland. Die beiden Pylonen der Brücke stehen 1624 Meter voneinander entfernt und ragen jeweils 254 Meter über die Wasseroberfläche empor. Die Fahrbahn der Brücke liegt 77 Meter über dem Wasserspiegel.
Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für die Parabel, die den Verlauf des Tragseils beschreibt. Berücksichtigen Sie dabei, dass das Tragseil an den Spitzen der Pylonen befestigt ist und unterhalb der Fahrbahn verläuft. Fertigen Sie gegebenenfalls eine Skizze an, um die Situation zu veranschaulichen.

Aufgabe 4.92 (9KYZ8P)



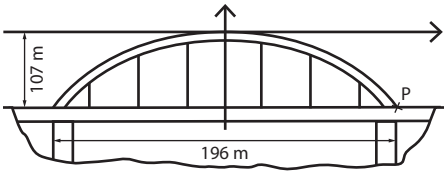
In der Abbildung ist der Bogen einer Bogenbrücke dargestellt. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung, die den Verlauf des Brückenbogens beschreibt. Nutzen Sie dazu die abgebildeten Maße und gehen Sie davon aus, dass der Brückenbogen eine parabolische Form hat.

Aufgabe 4.93 (vQnZph)



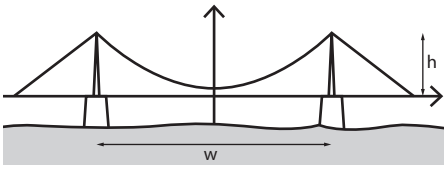
Die Müngstener Brücke ist die höchste und älteste Eisenbahnbrücke Deutschlands. Der Hauptbogen der Brücke setzt sich aus zwei symmetrischen Parabeln zusammen. Bestimmen Sie mit den Angaben aus der Konstruktionszeichnung eine Funktionsgleichung für den unteren Bogen.

Aufgabe 4.94 (AWJYut)



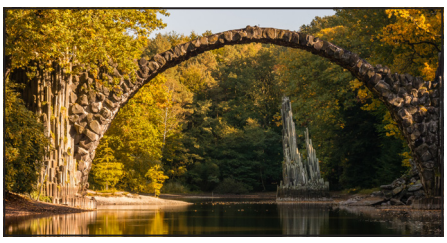
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die den Verlauf des Brückenbogens beschreibt. Überlegen Sie zunächst, welche Koordinaten der Punkt P hat. Achten Sie außerdem darauf, wie das Koordinatensystem gelegt wird und welche Symmetrieeigenschaften der Brückenbogen aufweist.

Aufgabe 4.95 (ZqvfGp)



Der Bogen einer Hängebrücke wird durch die Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}001x^2$ beschrieben. Berechnen Sie die Spannweite w, wenn die Höhe des Bogens h = 92 m beträgt. Achten Sie dabei auf die Lage des Koordinatensystems und berücksichtigen Sie die Symmetrie der Parabel.

Aufgabe 4.96 (2ADn9L)



Die Rakotzbrücke im Kromlauer Park in der Nähe von Cottbus wirkt wie aus einem Märchenwald. Der Brückenbogen hat eine Höhe von 6,5 m und eine Spannweite von 15,6 m. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung, die den Verlauf des Brückenbogens beschreibt. Achten Sie dabei auf die Lage des Koordinatensystems.

Aufgabe 4.97 (ENNar4)

Schreiben Sie die folgenden quadratischen Funktionen von der Scheitelpunktform in die Normalform um.

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 7$
b) $f(x) = (x - 1{,}4)^2 + 1$
c) $f(x) = 3(x + 0{,}3)^2 - 2{,}5$
d) $f(x) = -2(x - 2)^2 + 3\frac{1}{4}$
e) $f(x) = -5(x + \frac{1}{2})^2 - 1$
f) $f(x) = 1{,}2(x - 4)^2 + 0{,}8$
g) $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 4{,}5$
h) $f(x) = 0{,}75(x + 2{,}2)^2 - 6$
i) $f(x) = -\frac{3}{2}(x - \frac{1}{10})^2 + \frac{11}{4}$
j) $f(x) = 2(x + \frac{3}{5})^2 - 5$
k) $f(x) = -0{,}25(x - 5)^2 + 3\frac{1}{2}$
l) $f(x) = 0{,}5(x + 1{,}2)^2 - 2$

Aufgabe 4.98 (qegSu5)

Bringen Sie die folgenden quadratischen Funktionen aus der Normalform in die Scheitelpunktform.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 2{,}4x - 1$
c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$
d) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
e) $f(x) = -3x^2 + 1{,}5x + 2$
f) $f(x) = -2{,}5x^2 + 5x + 3$
g) $f(x) = 0{,}6x^2 - 1{,}8x$
h) $f(x) = 1{,}2x^2 + 1{,}6x + 0{,}8$
i) $f(x) = \frac{2}{100}x^2 + 1{,}2x$
j) $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 1$
k) $f(x) = 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 1$
l) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1$

Aufgabe 4.99 (Pb2UGF)

Ermitteln Sie die Lösungsmenge der folgenden quadratischen Gleichungen.

a) $0 = 3(-x^2 + 4)$
b) $0 = x^2 - 2x$
c) $0 = x^2 + 5x$
d) $0 = x^2 - 6x$
e) $0 = x^2 + 3x$
f) $0 = x^2 - 4x$
g) $0 = -x^2 + 2x$
h) $0 = x(x - 3)$
i) $0 = -(2x + 5)(x - 6)$
j) $0 = (x - 2)(x + 1)$
k) $0 = (3x - 12)(5 - x)$
l) $0 = x^2(x^2 - 16)$

Aufgabe 4.100 (3tZhvB)

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionsgleichungen.

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$
c) $f(x) = 2(x^2 - 4x + 5)$
d) $f(x) = -x(x^2 - 2x - 3)$
e) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$
f) $f(x) = 5x^2 - 11x + 4$
g) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
h) $f(x) = x^2 - 2x - 8$
i) $f(x) = 10 - 2x^2$
j) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 1$
k) $f(x) = x^2 + 2$
l) $f(x) = -20 + 0{,}25x^2$

Aufgabe 4.101 (kugqpy)

Beim Kugelstoßen folgt die Kugel einer nahezu parabelförmigen Flugbahn, deren Verlauf vom Abwurfwinkel und der Abwurfgeschwindigkeit abhängt. Die Flugbahn der Kugel von Nina lässt sich durch die Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}5x + 2{,}25$ beschreiben.

a) Bringen Sie die gegebene Funktionsgleichung in die Scheitelpunktform und bestimmen Sie die maximale Höhe, die die Kugel erreicht.
b) Kontrollieren Sie Ihre Berechnung, indem Sie die Scheitelpunktform zurück in die Normalform umwandeln und die ursprüngliche Funktionsgleichung prüfen.

Aufgabe 4.102 (3jB7xV)

Ein Rechteck hat eine Fläche von 47,25 cm². Die Länge des Rechtecks ist 6 cm größer als die Breite. Berechnen Sie die Maße der beiden Seiten des Rechtecks.

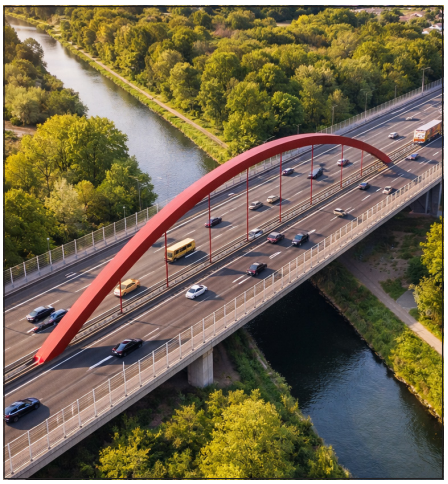
Aufgabe 4.103 (tTMZaK)

Bei der Leichtathletik-Weltmeisterschaft von 1991 in Tokio stellte Mike Powell aus den USA im Weitsprung einen neuen Weltrekord auf, indem er den bisherigen Rekord von 8,90 m um 5 cm übertraf. Analysen ergaben, dass die Flugbahn seines Körperschwerpunktes durch die Funktion $f(x) = -0{,}05x^2 + 0{,}3x + 1{,}35$ näherungsweise beschrieben werden kann. Dabei gibt x die horizontale Entfernung vom Absprungpunkt (in Metern) und y die Höhe des Körperschwerpunktes über dem Boden (in Metern) an.

a) Bestimmen Sie, bei welcher horizontalen Entfernung vom Absprungpunkt der Körperschwerpunkt eine Höhe von 1 m über dem Boden erreicht.
b) Überlegen Sie, ob bei diesem Sprung ein Betonquader mit einer Länge von 2,50 m und einer Höhe von 1,52 m übersprungen worden wäre. Begründen Sie Ihre Überlegungen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.104 (DktggN)

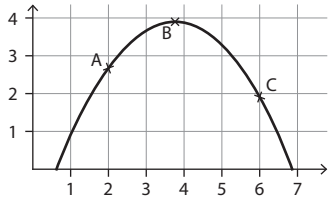


Die Schnettkerbrücke an der A40/B1 bei Dortmund wurde zwischen den Jahren 2005 und 2012 erweitert. Am 31. Mai 2012 wurde die Brücke offiziell fertiggestellt und für den Verkehr freigegeben. Ein zentrales Gestaltungselement ist ein 110 Meter langer, roter Stahlbogen mit einer Stichhöhe von 15,98 Metern über der Fahrbahn. Der 430 Tonnen schwere Stahlbogen wurde von der Schachtbau GmbH aus Nordhausen gefertigt. Insgesamt kamen 11.300 Kubikmeter Stahlbeton zum Einsatz, und die Baukosten beliefen sich auf rund 42 Millionen Euro. Für die Programmierung der Schweißroboter, die am Bogen arbeiten, ist die Funktionsgleichung des Bogens erforderlich.

a) Legen Sie ein passendes Koordinatensystem fest und ermitteln Sie die Funktionsgleichung des Bogens. Berechnen Sie dazu den Streckungsfaktor und runden Sie diesen auf fünf Nachkommastellen.

b) Der Bogen wird durch acht gleichmäßig verteilte Hängestäbe gestützt, die bei der Firma Anker-Schroeder.DE ASDO in Dortmund produziert wurden. Bestimmen Sie die Längen dieser Hängestäbe.

Aufgabe 4.105 (rYannM)



Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Hügels, dessen Form näherungsweise durch die Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}4x^2 + 3x - 1{,}725$ beschrieben werden kann. Dabei gibt x die horizontale Entfernung (in Metern) und f(x) die Höhe über dem Grund (in Metern) an.

a) Berechnen Sie die Höhe des Hügels über dem Grund an den Punkten A, B und C.

b) Bestimmen Sie, wie breit der Hügel an der Basis (am Boden) ist.

Aufgabe 4.106 (DELcMJ)

Nina fährt mit dem Fahrrad über eine modern gebaute Brücke, deren Tragseil parabelförmig verläuft. An der tiefsten Stelle hängt das Seil 5 m über der Straße. Am höchsten Punkt – direkt an den Brückenpfeilern – erreicht es eine Höhe von 50 m über der Straße. Die mathematische Beschreibung des Seils lautet: $f(x) = 0{,}0016x^2 + 5$

Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Abstand zwischen den beiden Brückenpfeilern etwa 240 m beträgt.

Aufgabe 4.107 (zLVaDZ)

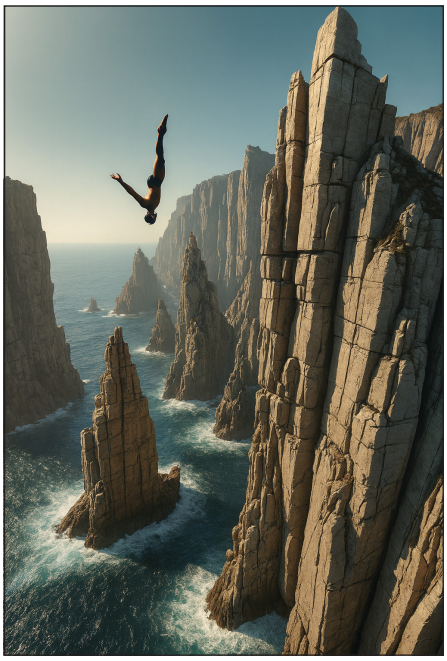


Die Carrick-a-Rede-Insel in Nordirland ist über eine schmale Hängebrücke erreichbar. Diese Brücke überspannt eine Meerenge mit einer Breite von 20 m. Der tiefste Punkt der Brücke befindet sich 30 m über der Wasseroberfläche. Außerdem hängt die Brücke in der Mitte um 0,4 m durch. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der parabelförmigen Hängebrücke.

Aufgabe 4.108 (n69Kma)

Nina möchte mit einer Tennisballwurfmaschine ihre Aufschläge verbessern. Sie stellt die Maschine so ein, dass die Flugbahn des Tennisballs über dem Netz ihren höchsten Punkt bei 1,30 m erreicht. Der Ball wird dabei genau auf der T-Linie aus einer Höhe von 1,10 m aus der Maschine abgeschossen. Prüfen Sie, ob der Ball noch im Spielfeld landet!

Aufgabe 4.109 (YTf39Q)



Die wagemutigen Klippenspringer von Acapulco beeindrucken mit ihren Sprüngen von hohen Felsen ins Meer. Die Flugbahn kann durch eine Parabel mathematisch beschrieben werden.

a) Begründen Sie, warum bei der Bestimmung der Parabel von einer maximalen Höhe von 36 m ausgegangen wird, obwohl die Klippe nur eine Höhe von 35 m hat.

b) Bestimmen Sie die Funktion der Parabel, wenn der Springer in einer horizontalen Entfernung von 7 m ins Wasser eintaucht.

c) Ein weiterer Springer springt von einem 10 m hohen Sprungturm. Stellen Sie die Funktionsgleichung für diesen Sprung auf, wenn Sie davon ausgehen, dass die Flugkurve den gleichen Verlauf hat wie in Teilaufgabe a). Ermitteln Sie zudem die horizontale Entfernung vom Absprungpunkt bis zum Eintauchen ins Wasser.

Aufgabe 4.110 (aDNYHZ)

Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

	Normalform	Scheitelpunktform	Scheitelpunkt	Nullstellen
a)	$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$			
b)		$f(x) = 2(x - 2{,}5)^2 + 5{,}5$		
c)			$S(0{,}5\vert -2{,}45)$	$x_1 = -3, x_2 = 4$
d)	$f(x) = -0{,}3x^2 - 3x - 6$			
e)		$f(x) = 3(x - \frac{3}{10})^2 + \frac{3}{50}$		
f)			$S(1\vert 1{,}5)$	$x_1 = 0, x_2 = 2$
g)	$f(x) = -0{,}25x^2 + 3x - 6$			
h)		$f(x) = 4(x - 4{,}5)^2 + 19$		
i)			$S(0\vert 8)$	$x_1 = -4, x_2 = 4$
j)	$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 5x + 14$			
k)		$f(x) = -\frac{4}{10}(x - \frac{15}{4})^2 + \frac{13}{8}$		
l)			$S(-1\vert 13{,}5)$	$x_1 = -4, x_2 = 2$
m)	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 8$			
n)		$f(x) = -2(x - 2{,}5)^2 - 5{,}5$		
o)			$S(1\vert -4)$	$x_1 = -1, x_2 = 3$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.111 (z5YA3c)

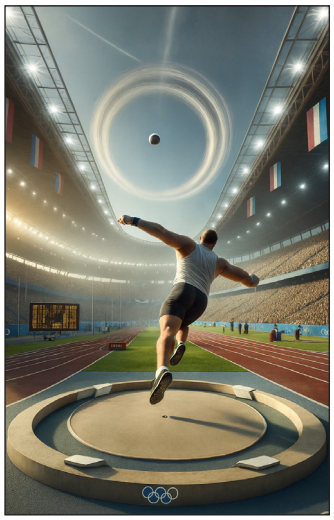
Bei der Analyse von Ninas Rückhandschlag beim Tennis wurden die folgenden Daten ermittelt: Der Ball wird 40 cm über dem Boden an der Grundlinie getroffen und erreicht seine maximale Höhe von 1,8 m über dem Netz. Trifft der Ball innerhalb des Spielfeldes auf?

Aufgabe 4.112 (mzqeet)

Gegeben sind die quadratischen Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$ und $f_2(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 15{,}5$.

a) Bestimmen Sie die Scheitelpunkt- bzw. die Normalform der Funktionen.
b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen mit den Achsen.
c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
d) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen.
e) Bestimmen Sie die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden Schnittpunkte.
f) Unter welchem Winkel schneidet die Verbindungsgerade die x-Achse?

Aufgabe 4.113 (kmm9ZB)

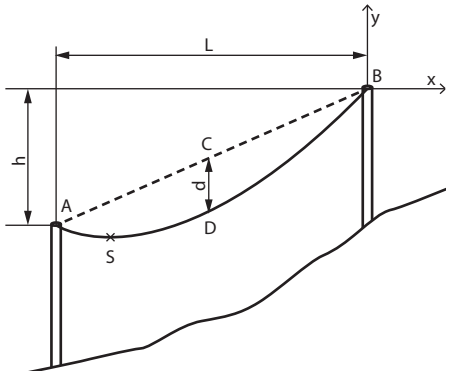


Der Kugelstoßer David Storl wurde 2011 in Daegu (Südkorea) als erster deutscher Weltmeister mit einer Weite von 21,78 m ausgezeichnet. Die Flugbahn der Kugel beim Kugelstoß folgt aufgrund physikalischer Gegebenheiten annähernd einer Parabel.
Während eines Trainings wurden mithilfe einer Videokamera und einer standardisierten Leinwand drei Punkte der Flugbahn der Kugel erfasst: $P_1(0|2{,}24)$, $P_2(1|2{,}92)$, $P_3(2|3{,}52)$

a) Berechnen Sie die maximale Höhe und die Weite von Davids Trainingsstoß. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Siegerweite der Weltmeisterschaft 2011.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Wurfparabel, die eine Stoßeweite von 18,54 m sowie eine Abwurfhöhe von 1,92 m beschreibt. Erklären Sie Ihr Vorgehen und verwenden Sie für den Parameter b den Wert 1.

Aufgabe 4.114 (6kwRJq)





Das Pumpspeicherkraftwerk Herdecke ist eine Nachfolgeanlage des Pumpspeicherkraftwerks Koepchenwerk und befindet sich im Besitz der RWE. Gelegen am Hengsteysee an der Südostflanke des Ardeygebirges, ist es das größte Pumpspeicherkraftwerk in Nordrhein-Westfalen. Um eine stabile Stromversorgung auch in die nördlichen Regionen zu gewährleisten, verlaufen Hochspannungsleitungen über das bergige Gebiet. Dabei wird das Stromkabel zwischen hohen Masten gespannt, wodurch es eine charakteristische Parabelform annimmt. Der Abstand zwischen zwei Masten beträgt L = 200 m, während der Höhenunterschied der beiden Masten h = 40 m beträgt.

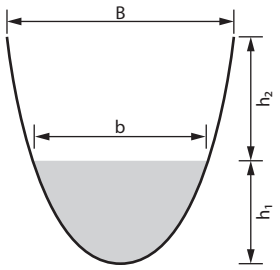
a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel sowohl in Scheitelpunktform als auch in Normalform, wenn der tiefste Punkt des Kabels S genau 50 m von Mast A entfernt ist und sich 5 m unterhalb der Aufhängung des Seils befindet.
b) Ermitteln Sie die Lage des Scheitelpunkts, wenn sich bei L/2 der Durchhang auf d = 15 m beläuft.

Aufgabe 4.115 (VKfvT7)





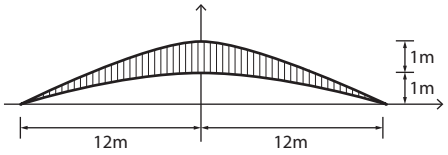
Die Ruhr bei Schwerte kann bei Bedarf am Pumpwerk Westhofen für Wartungsarbeiten abgelassen werden. Auf den Bildern sehen Sie den gleichen Abschnitt der Ruhr in vollem und in abgelassenem Zustand. Das Flussbett kann in vereinfachter Weise als Parabel modelliert werden.



a) Welche Breite B hat die Ruhr an dieser Stelle, wenn folgende Abmessungen bekannt sind:
$h_1 = 0{,}5$ m, $h_2 = 2$ m und $b = 4$ m

b) Wie tief ist ein 4 m breiter Ruhrabschnitt am Hengster Talsperren Wehr insgesamt, wenn 30 cm unterhalb der Oberkante die Wasserbreite 3,60 m ist?

Aufgabe 4.116 (jEDvGD)



Für die Sanierung der Sporthalle eines Berufskollegs in Dortmund wird eine neue Dachkonstruktion entworfen. Die Dachträger sind bogenförmig gestaltet und ihre Begrenzungslinien folgen parabolischen Verläufen. Die äußere Parabel beschreibt die Oberkante des Trägers, die innere Parabel die Unterkante.

a) Stellen Sie die Funktionsgleichungen der Parabeln auf.

b) Welche Dicke hat der Träger 6 m vom Rand entfernt?

Aufgabe 4.117 (rtBWNN)

In einem Supermarkt wird ein großes Tiefkühllager betrieben. Durch häufiges Öffnen der Lagertüren gelangt warme Luft in das Innere, wodurch sich eine Eisschicht an den Wänden und Kühlrippen bildet. Diese Eisschicht erhöht den Energieverbrauch. Techniker haben festgestellt, dass der Energieverbrauch E in Abhängigkeit von der Eisdicke d quadratisch ansteigt. Es wurden folgende Messwerte erhoben:

d in mm	0	2	5	10
E in kWh/24h	40,00	40,43	41,25	43,00

a) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die den Zusammenhang zwischen dem Energieverbrauch E und der Eisdicke d beschreibt.

b) Berechnen Sie den Energieverbrauch, wenn die Eisschicht 1,5 cm dick ist.

c) Bestimmen Sie den prozentualen Mehrverbrauch, wenn die Eisdicke von 0 mm auf 5 mm zunimmt.

d) Recherchieren Sie den aktuellen Industriestrompreis und berechnen Sie die jährlichen Stromkosten für das Tiefkühllager bei einer Eisdicke von 0 mm und 5 mm.

Aufgabe 4.118 (2XzSQk)

YouTube



Die Frontseite des Berliner Bogens in Hamburg ist parabelförmig und besteht aus einer beeindruckenden Glas- und Stahlkonstruktion. Das Gebäude hat eine Gesamtlänge von 140 m, eine Höhe von 36 m und eine Breite von 70 m.

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung, welche den Bogen des Berliner Bogens beschreibt.

b) Die dritte Etage befindet sich in einer Höhe von 12,7 m. Die gesamte Fläche dieser Etage (abzüglich 15 % für Flure, WCs und Aufenthaltsräume) soll in 100 gleich große Büroräume aufgeteilt werden. Der Mietpreis beträgt 25 Euro pro Quadratmeter und Monat. Berechnen Sie die Monatsmiete für ein einzelnes Büro.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.119 (z1MNNC)

Mike und Nina haben festgestellt, dass ihre Tiefkühltruhe zunehmend vereist, weil die Tür nicht immer richtig geschlossen wird. Dadurch bildet sich eine Eisschicht an den Innenwänden des Kühlraums. Ein Experiment zeigt:

- Bei einer Eisdicke von 2 mm steigt der Energieverbrauch um 6 %,
- bei 5 mm um 15 % und
- bei 9 mm sogar um 35 %.

Da der Zusammenhang zwischen der Eisdicke und dem Energieverbrauch durch eine quadratische Funktion beschrieben werden kann, soll die mathematische Modellierung helfen, den Mehrverbrauch besser zu verstehen und zu optimieren.

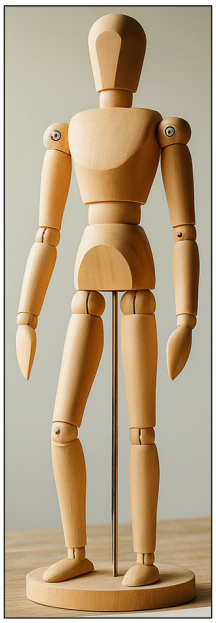
a) Ermitteln Sie aus den Angaben die Funktionsgleichung der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. (Zur Kontrolle: $f(x) = \frac{2}{7}x^2 + x + \frac{20}{7}$)

b) Übertragen Sie f(x) in ein geeignetes Koordinatensystem und stellen Sie den Verbrauch grafisch als Funktion zweiten Grades dar.

c) Berechnen Sie, bei welcher Eisdicke der Mehrverbrauch 50 % beträgt.

d) Berechnen Sie die jährlichen Mehrkosten für den Stromverbrauch, wenn der Haushaltskühlschrank ohne Eisbildung 0,8 kWh pro Tag verbraucht und der Strompreis bei 0,30 Euro pro kWh liegt. Bestimmen Sie die Mehrkosten für eine Eisdicke von 5 mm und 9 mm.

Aufgabe 4.120 (Se3PeY)



Der Goldene Schnitt findet sich in der Natur, Kunst und Architektur wieder, etwa in der Anordnung von Blättern an Pflanzen, der Form von Schneckenhäusern oder den Proportionen des menschlichen Körpers. Er beschreibt eine besondere Teilung einer Strecke, bei der das Verhältnis der kleineren Teilstrecke zur größeren Teilstrecke dem Verhältnis der größeren Teilstrecke zur Gesamtstrecke entspricht.

In Worten:
Eine gegebene Strecke wird so in zwei Teile unterteilt, dass das Verhältnis der kleineren Teilstrecke b zur größeren Teilstrecke a dem Verhältnis der größeren Teilstrecke a zur Gesamtstrecke a + b entspricht.

In bildlicher Darstellung:



Als Formel:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

a) Wie groß ist die kleinere Teilstrecke b, wenn die größere Teilstrecke a die Länge 1 hat?

b) Wie groß ist die größere Teilstrecke a, wenn die kleinere Teilstrecke b die Länge 1 hat?

Aufgabe 4.121 (tSNJHs)



Ein Basketballspieler wirft den Ball in Richtung Korb. Die Flugbahn des Balls wird durch die quadratische Funktion $g(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 1{,}5$ beschrieben, wobei x die horizontale Entfernung des Balls vom Spieler in Metern und g(x) die Höhe des Balls in Metern angibt.

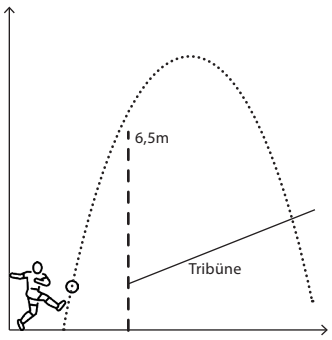
a) Der Ball verlässt die Hand des Spielers bei x = 1,5. Wie hoch war die Hand beim Abwurf?

b) Bestimmen Sie die maximale Höhe des Balls.

c) Der Ball trifft genau die Mitte des Korbrings. In welcher horizontalen Entfernung vom Spieler befindet sich diese Mitte, wenn der Korb eine Höhe von 2,30 m hat?

Aufgabe 4.122 (XCy2fu)

Ein Fußballspieler schießt den Ball über einen 6,5 m hohen Zaun, der das Spielfeld von der Zuschauertribüne trennt. Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch die quadratische Funktion $b(x) = -0{,}4x^2 + 4{,}2x - 3{,}5$ und die Tribüne mit der linearen Funktion $t(x) = 0{,}4x - 0{,}5$ beschrieben werden.



a) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Ball vom Spielfeld aus abgeschossen wird.
b) Der Zaun steht bei $x = 4$. Fliegt der Ball tatsächlich über den Zaun?
c) Berechnen Sie die maximale Flughöhe des Balls.
d) In welcher Entfernung hinter dem Zaun trifft der Ball auf der Zuschauertribüne auf?

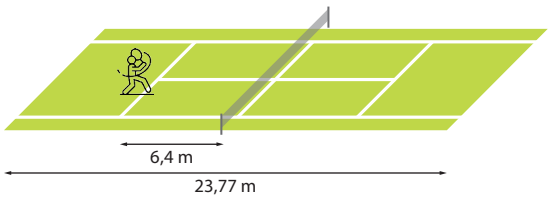
Aufgabe 4.123 (kSPTVa)

Gegeben sind jeweils drei Punkte, durch die eine quadratische Funktion verläuft. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) P(2|5), Q(–1|5), R(3|9)
b) P(1|–3), Q(3|–7), R(–2|6)
c) P(0|1), Q(4|1), R(–2|5)
d) P(2|8), Q(–1|–1), R(3|5)
e) P(0|1), Q(–2|9), R(3|19)
f) P(1|–1,5), Q(3|–3), R(–1|–0,5)
g) P(–1|8), Q(2|6), R(3|10)
h) P(0|5), Q(–3|2), R(2|–1)
i) P(–3|4), Q(1|–2), R(4|7)
j) P(2|3), Q(–2|–5), R(0|4)

Aufgabe 4.124 (zLT3V3)

Ein Tennisspieler analysiert die Flugbahn seines Vorhandschlags. Dabei werden folgende Werte gemessen:
Der Ball wird genau über der T-Linie in einer Höhe von 50 cm geschlagen. Während seines Fluges bewegt er sich parallel zur Seitenlinie und erreicht seine maximale Höhe von 2 m exakt über dem Netz.



a) Landet der Ball innerhalb des Spielfelds?
b) Angenommen, der Ball wird über der T-Linie in 1,45 m Höhe geschlagen und erreicht seine maximale Höhe von 2 m weiterhin über dem Netz – wie weit würde der Ball in diesem Fall fliegen?
c) Nun wird der Ball direkt über der Grundlinie in 50 cm Höhe getroffen und fliegt ebenfalls parallel zur Seitenlinie. Er landet genau auf der gegenüberliegenden Grundlinie. Über dem Netz erreicht der Ball dabei eine Höhe von 2,20 m. Wie hoch ist der Ball an seinem höchsten Punkt?

Aufgabe 4.125 (nWwBrJ)

Gegeben sind eine quadratische Funktion p(x) und eine lineare Funktion g(x). Untersuchen Sie die Lage der beiden Graphen zueinander, indem Sie die Schnittstellen der Parabel mit der Geraden bestimmen. Ermitteln Sie außerdem den Scheitelpunkt sowie die Nullstellen der quadratischen Funktion.

a) $p(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$, $g(x) = \frac{2}{3}x + 3$
b) $p(x) = x^2 - 4x + 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $p(x) = -x^2 - 3x$, $g(x) = \frac{1}{4}x + 2$
d) $p(x) = -x^2 + 2x + 3$, $g(x) = -\frac{3}{4}x + 1$
e) $p(x) = -x^2 - x + 4$, $g(x) = 3x + 5$
f) $p(x) = -x^2 - 6x$, $g(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

Aufgabe 4.126 (CWc6LD)

Betrachten Sie die folgenden Funktionen:

$f_1(x) = \frac{1}{3}x^2$ $\quad f_2(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 3$ $\quad f_3(x) = \frac{1}{4}(x + 3)^2$ $\quad f_4(x) = -\frac{3}{4}x + 1$

a) Berechnen Sie die Nullstellen jeder Funktion.
b) Ermitteln Sie die Schnittstellen für alle möglichen Funktionspaare, also f_1 mit f_2, f_1 mit f_3 usw. Insgesamt gibt es sechs verschiedene Kombinationen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.127 (euadwE)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittstellen der beiden Parabeln, ihre Scheitelpunkte und jeweils die Nullstellen der Funktionen.

a) $f_1(x) = -x^2 + 6x - 8,\ f_2(x) = 2x^2 - 4x + 1$
b) $f_1(x) = 0{,}5x^2 - 2x,\ f_2(x) = x^2 - 3x + 2$
c) $f_1(x) = x^2 - 5x + 6,\ f_2(x) = -2{,}5x^2 + 10x - 5$
d) $f_1(x) = 2x^2 + x + 3,\ f_2(x) = -x^2 + 4x - 1$
e) $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = (x + 2)^2$
f) $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = x^2 - 4$

Aufgabe 4.128 (zqWNwM)

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 3$ und $g(x) = x^2 + 4x + 5$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der beiden Funktionen, sofern sie existieren.
b) Entscheiden Sie anhand der Ergebnisse aus Teilaufgabe a), aber ohne weitere Rechnung, bei welcher der beiden Funktionen der Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse liegt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
c) Stellen Sie beide Funktionen in der Scheitelpunktform dar.
d) Erläutern Sie, weshalb sich die Graphen der Funktionen f und g nicht schneiden.

Aufgabe 4.129 (1PU1Xf)

Gegeben sind die folgenden Funktionen: $g(x) = 0{,}25x^2 - 3x + 4$ und $h(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 1$

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, an denen sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.
b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch die beiden Schnittpunkte verläuft.
c) Ermitteln Sie den Scheitelpunkt der beiden Funktionen.

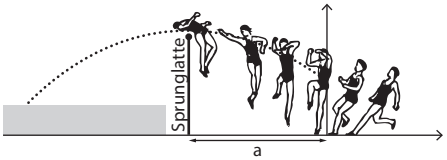
Aufgabe 4.130 (nwmPJE)



Die Heilig-Kreuz-Kirche im Stadtteil Ückendorf in Gelsenkirchen wurde zwischen 1927 und 1929 nach den Plänen des Architekten Josef Franke errichtet. Sie zählt zu den bedeutendsten Bauwerken des Backsteinexpressionismus im Ruhrgebiet. Aufgrund der markanten, parabelförmigen Gewölbe wird sie häufig auch als "Parabelkirche" bezeichnet. Die Form der Gewölbe prägt nicht nur das äußere Erscheinungsbild, sondern verleiht auch dem Innenraum seine besondere Wirkung. Im Rahmen eines Schulprojekts soll der Gewölbebogen modellhaft mithilfe einer Parabel beschrieben werden. Dazu wird ein Koordinatensystem festgelegt, in dem die Form des Bogens mathematisch erfasst werden kann. Eine Vermessung ergibt, dass die Punkte P(2|14), Q(4|20) und R(6|18) auf dem Gewölbebogen liegen.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, die durch diese drei Punkte verläuft.

Aufgabe 4.131 (rjwJsm)



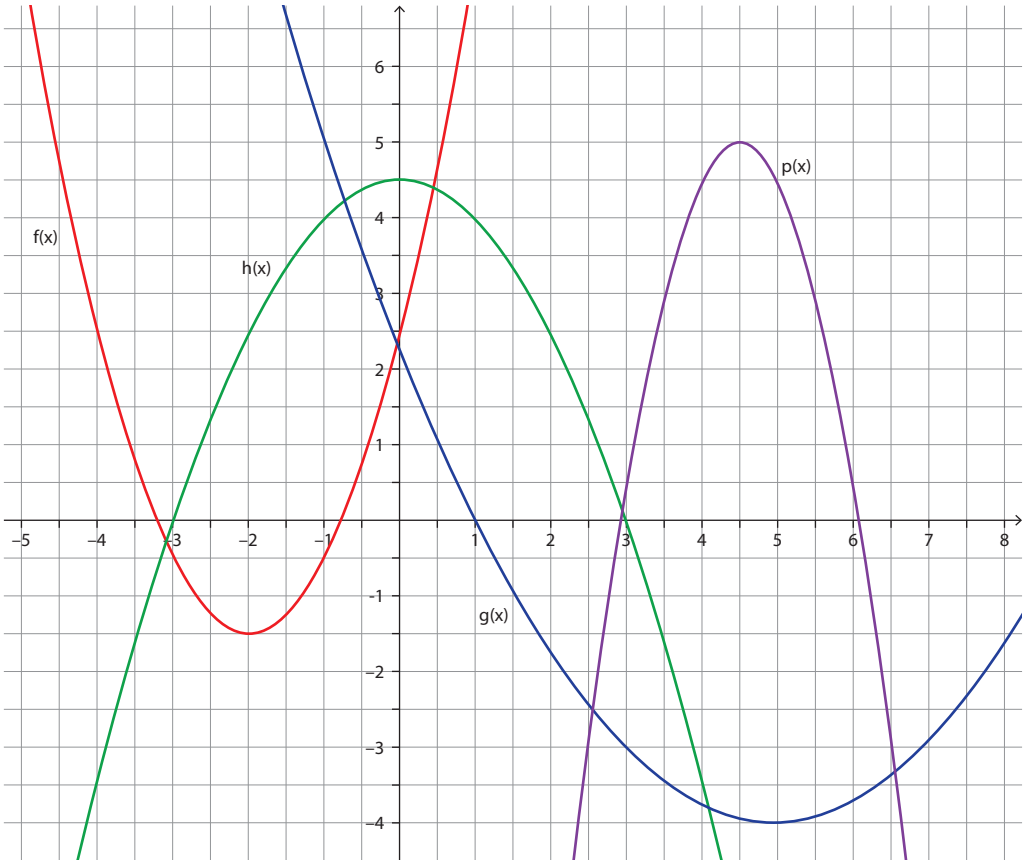
Beim Hochsprung mit dem Fosbury-Flop wölbt sich der Körper rücklings über die Latte. Der Körperschwerpunkt beschreibt dabei eine parabelförmige Flugbahn, die auch unterhalb der Latte verlaufen kann.

Nina trainiert für einen Wettkampf. Die Flugbahn ihres Körperschwerpunkts lässt sich durch die Funktion $f(x) = -0{,}5x^2 - 1{,}5x + 1$ beschreiben (Einheit: Meter). Die Sprunglatte liegt auf einer Höhe von 1,75 m.

a) Überquert Nina mit dieser Sprungbahn die Latte?
b) Wie groß ist der Abstand a zwischen Absprungpunkt und Sprunglatte?
c) In welcher Entfernung vom Absprungpunkt sollte für eine sichere Landung die Mitte der Weichbodenmatte liegen? Gehen Sie von einer Mattenhöhe von 50 cm aus.

○ **Aufgabe 4.132 (tEVBgb)**

Bestimmen Sie alle Schnittpunkte.



● **Aufgabe 4.133 (nEf1BN)**

Im neu eröffneten Freizeitbad *Wasserparadies* beträgt der reguläre Eintrittspreis für eine Tageskarte 28 Euro. Die Besucherzahlen liegen jedoch mit durchschnittlich 480 Gästen pro Tag unter den Erwartungen. Eine Marktanalyse zeigt: Wird der Preis jeweils um 0,20 Euro gesenkt, so steigt die Besucherzahl pro Senkung um 12 Personen.

a) Begründen Sie, warum sich die Einnahmen in Abhängigkeit von der Anzahl der Preisnachlässe s durch die Gleichung $E(s) = (28 - 0{,}2s)(480 + 12s)$ darstellen lassen.

b) Ermitteln Sie, bei welchem Eintrittspreis die Einnahmen am größten sind.

● **Aufgabe 4.134 (sE58Px)**

Ein Sportartikelhersteller verkauft derzeit monatlich 7600 Paar Laufschuhe zu einem Stückpreis von 48 Euro. Eine Marktanalyse zeigt: Wird der Preis pro Paar um jeweils 1 Euro gesenkt, so erhöht sich der monatliche Absatz um 240 Paar.

a) Stellen Sie eine Gleichung in Normalform für den monatlichen Erlös E(x) in Abhängigkeit von der Anzahl der Preisnachlässe x (in Euro) auf.

b) Berechnen Sie, bei welchem Verkaufspreis der monatliche Erlös maximal ist.

● **Aufgabe 4.135 (W4fqFb)**

Ein Reiseveranstalter plant, in der Nebensaison günstige Flüge auf die Kanarischen Inseln anzubieten. Bei einem Ticketpreis von 350 Euro buchen 160 Personen. Nach einer Preisreduzierung um 40 Euro steigen die Buchungszahlen auf 192 Personen.

Der Veranstalter erkennt: Für jeweils 40 Euro Preisnachlass kommen 32 zusätzliche Kunden hinzu. Daraufhin möchte er herausfinden, bei welchem Ticketpreis er den höchsten Umsatz erzielen kann.

a) Stellen Sie eine Gleichung in Normalform der Einnahmen E(x) auf.

b) Berechnen Sie, welcher Ticketpreis den maximalen Umsatz bringt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

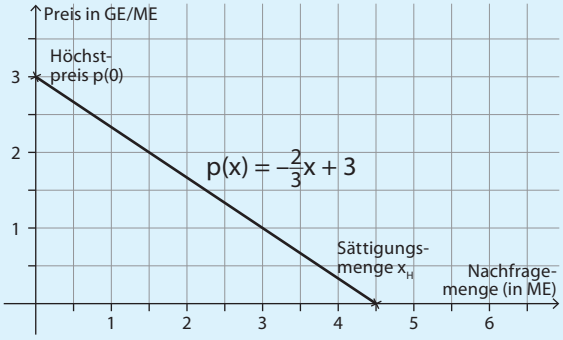


4.11 EIN BLICK IN DIE FINANZMATHEMATIK – TEIL II

Der zweite Teil der Finanzmathematik erweitert das Verständnis wirtschaftlicher Zusammenhänge. Im Fokus steht, wie Preis und Nachfrage mathematisch zusammenhängen und welche Rolle sie für die Berechnung von Erlös, Kosten und Gewinn spielen.

Preis-Absatz-Funktion (SFV5SQ)

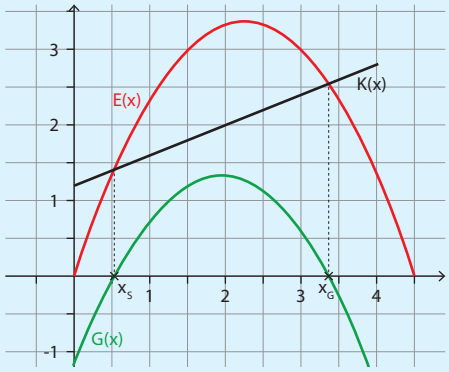
Die **Nachfrage** nach einem Produkt hängt von verschiedenen Faktoren ab. Der wichtigste ist jedoch der Preis. In der Praxis lässt sich beobachten: Steigt der Preis, sinkt die Nachfrage. Dieses Verhalten wird als **Gesetz der Nachfrage** bezeichnet.



Mathematisch beschreibt man diesen Zusammenhang mit der sogenannten **Preis-Absatz-Funktion**, die angibt, welchen Preis man bei einer bestimmten **Absatzmenge** erzielen kann. Diese Funktion wird in der Regel mit p(x) bezeichnet, wobei x die Absatzmenge (in Mengeneinheiten, ME) und p(x) den zugehörigen Preis (in Geldeinheiten pro Mengeneinheit, GE/ME) darstellt. Die maximale Absatzmenge wird als **Sättigungsmenge** x_H bezeichnet. Sie markiert den Punkt, an dem der Markt vollständig versorgt ist – selbst bei einem Preis von 0 GE würde niemand mehr kaufen. Da negative Preise oder Mengen wirtschaftlich nicht sinnvoll sind, wird die Betrachtung auf den **ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich** eingeschränkt: $D_{ök} = [0;x_H]$.

In vielen Fällen genügt eine lineare Funktion, um diesen Zusammenhang zu modellieren.

Aus Teil I wissen Sie bereits, dass sich der Erlös aus der verkauften Menge und dem Preis eines Produkts ergibt: $E(x) = p \cdot x$



Schauen Sie, was sich damit bei gegebenen Kosten für die anderen Funktionen ergibt:

$E(x) = p \cdot x$
$= (-\frac{2}{3}x + 3) \cdot x$
$= -\frac{2}{3}x^2 + 3x$

$K(x) = 0{,}4x + 1{,}2$

$G(x) = E(x) - K(x)$
$= -\frac{2}{3}x^2 + 3x - (0{,}4x + 1{,}2)$
$= -\frac{2}{3}x^2 + 3x - 0{,}4x - 1{,}2$
$= -\frac{2}{3}x^2 + 2{,}6x - 1{,}2$

Die Menge, bei welcher der Gewinn maximal ist, wird als *gewinnmaximale Ausbringungsmenge* oder auch **Cournot'sche Menge x_C** bezeichnet.
Den entsprechenden Preis, bei welchem der Gewinn maximal ist, nennt man **Cournot'scher Preis $p(x_C)$**.

Menge und Preis bezeichnet man auch gemeinsam als **Cournot'schen Punkt $C(x_C \mid p(x_C))$**.

Da die Gewinnfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist, besitzt sie zwei Nullstellen:

- Die **Gewinnschwelle** x_S: Ab dieser Absatzmenge wird erstmals Gewinn erzielt.
- Die **Gewinngrenze** x_G: Ab dieser Menge übersteigen die Kosten wieder den Erlös – es entsteht Verlust.

Zwischen x_S und x_G liegt der Bereich, in dem das Unternehmen Gewinn macht.

Aufgabe 4.136 (3fpvfs)

Die Firma Osterhase GmbH stellt Schokoladen-Osterhasen her. Die Preis-Absatz-Funktion ist durch $p(x) = -0{,}2x + 8$ gegeben und die Produktionskosten lassen sich mit der linearen Kostenfunktion $K(x) = x + 12$ beschreiben.
Dabei bezeichnet x die produzierte und verkaufte Menge in Mengeneinheiten (ME), und alle Beträge sind in Geldeinheiten (GE) angegeben.

a) Wie groß ist die Sättigungsmenge (in ME)?
b) Wie lautet der ökonomisch sinnvolle Definitionsbereich für die Absatzmenge?
c) Bestimmen Sie die Erlösfunktion E(x).
d) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion G(x).
e) Zeichnen Sie die Funktionen E(x), K(x) und G(x) in ein geeignetes Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 40$, y-Achse: $-20 \le x \le 80$)
f) Berechnen Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze.
g) Wie hoch ist der maximale Gewinn (in GE)?
h) In welcher Preisspanne erzielt die Osterhase GmbH einen Gewinn?
i) Welcher Verkaufspreis entspricht dem Punkt des maximalen Gewinns?

Aufgabe 4.137 (yENxD8)

Die Ostertraum GmbH möchte zum Frühjahr eine neue Produktlinie auf den Markt bringen: zuckerreduzierte Schoko-Osterhasen. Der Verkaufspreis pro Einheit hängt von der produzierten Menge x (Mengeneinheiten, ME) ab und lässt sich durch $p(x) = -0{,}1x + 5$ beschreiben und die Herstellungskosten können mit der linearen Funktion $K(x) = 0{,}9x + 8$ modelliert werden. Alle Beträge sind in Geldeinheiten (GE) angegeben.

a) Bei welcher Produktionsmenge wäre der Marktpreis so niedrig, dass sich der Osterhase nicht mehr verkaufen ließe?
b) In welchem Bereich der Produktionsmenge ist die wirtschaftliche Betrachtung der Situation sinnvoll?
c) Ermitteln Sie die Erlösfunktion in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge x.
d) Stellen Sie eine Gewinnfunktion in Abhängigkeit von der Verkaufsmenge x auf.
e) Stellen Sie den Erlösverlauf E(x), die Kostenkurve K(x) sowie die Gewinnentwicklung G(x) grafisch dar.
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 50$, y-Achse: $-10 \le x \le 70$)
f) Ermitteln Sie die Produktionsmengen, bei denen genau kein Gewinn entsteht. In welchem Intervall ist der Betrieb profitabel?
g) Wie hoch kann der Gewinn maximal ausfallen?
h) Für welche Verkaufspreise ist der Betrieb tatsächlich wirtschaftlich rentabel?
i) Welcher Verkaufspreis wird erzielt, wenn der höchste mögliche Gewinn erreicht wird?

Aufgabe 4.138 (9fWh8b)

Ein Unternehmen für nachhaltige Verpackungslösungen plant, eine neue Linie umweltfreundlicher Versandboxen auf den Markt zu bringen. Vor der Produktionsfreigabe soll geprüft werden, ob sich die Herstellung wirtschaftlich lohnt. Aus einer Marktanalyse ergibt sich, dass der Verkaufspreis in Abhängigkeit von der Absatzmenge x (in Mengeneinheiten) durch folgende Funktion beschrieben werden kann: $p(x) = -0{,}25x + 25$
Die variablen Produktionskosten pro Box betragen 2,5 GE. Zusätzlich fallen Fixkosten z. B. für die Umrüstung der Produktionsstraße auf Recyclingmaterialien in Höhe von 350 GE an.
Die Geschäftsleitung bittet Sie um eine betriebswirtschaftlich fundierte Einschätzung.

a) Stellen Sie eine Funktion auf, die die Gesamtkosten für die Produktion der Verpackungsboxen in Abhängigkeit von x beschreibt.
b) Ermitteln Sie, ab welcher Verkaufsmenge eine wirtschaftlich sinnvolle Produktion möglich ist (Sättigungsmenge).
c) Bestimmen Sie, in welchem Intervall ein Gewinn erzielt werden kann.
d) Berechnen Sie, bei welcher Ausbringungsmenge der Gewinn am größten ist.
e) Ermitteln Sie den Preis, der bei dieser gewinnmaximalen Menge verlangt werden kann.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.139 (6zhLKi)

Ein mittelständisches Unternehmen entwickelt tragbare Solarladegeräte für mobile Endgeräte. Vor dem geplanten Markteintritt soll überprüft werden, ob sich die Produktion unter den gegebenen Rahmenbedingungen wirtschaftlich lohnt. Die Gesamterlöse bei Verkauf von x Hundert Geräten werden durch die Funktion $E(x) = -0{,}01x^2 + x$ beschrieben.
Die Gesamtkosten der Produktion setzen sich aus Fixkosten und variablen Kosten zusammen. Sie sind durch die Funktion $K(x) = 0{,}3x + 6$ gegeben.

a) Ermitteln Sie auf Grundlage der Erlösfunktion eine passende Preis-Absatz-Funktion, die den Zusammenhang zwischen Preis und abgesetzter Menge beschreibt.
b) Stellen Sie die Gewinnfunktion des Unternehmens auf und untersuchen Sie, für welche Produktionsmengen ein wirtschaftlicher Gewinn zu erwarten ist.
c) Bestimmen Sie die Ausbringungsmenge, bei der der Gewinn maximal ist, und berechnen Sie den dazugehörigen Gewinn.
d) Ermitteln Sie den Cournot'schen Punkt und erläutern Sie, welche Bedeutung dieser Punkt für eine wirtschaftlich sinnvolle Preisgestaltung hat.

Aufgabe 4.140 (kheDmc)

Sie sind Mitarbeiterin/Mitarbeiter des Unternehmens **ADIDAS AG** und arbeiten in der Abteilung Finanzwesen. ADIDAS produziert täglich Sportschuhe der Marke Superstar.
Bei der morgigen Vorstandssitzung sollen alle Kosten, Erlöse und Gewinne aller Produkte des Unternehmens vorgestellt werden, damit das Produktangebot für das kommende Jahr optimiert werden kann.
Sie sind zuständig für Daten der Marke Superstar aus der Originals Kollektion. Der Vorstandsvorsitzende der ADIDAS AG, Herbert Hainer, gibt Ihnen für Ihre Kalkulation lediglich folgende Informationen für die quadratische Kostenfunktion und die Preis-Absatz-Funktion:

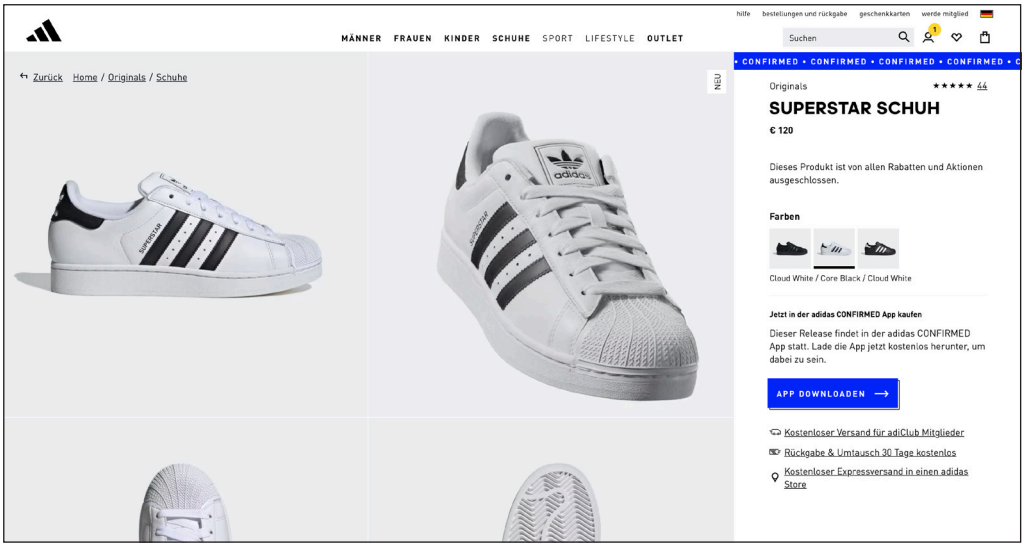
Menge (in ME)	200	500	1.000
Kosten (in GE)	12.500	27.500	72.500

Die Preis-Absatz-Funktion: $p(x) = -0{,}1x + 125$

Bestimmen Sie folgende Werte, die Sie Ihrem Chef bei der Präsentation vorlegen können:

a) Kostenfunktion
b) variable Kosten
c) Fixkosten
d) Erlösfunktion
e) Gewinnfunktion
f) Gewinnmaximum
g) Gewinnschwelle
h) Gewinngrenze
i) Cournot'sche Menge
j) Cournot'scher Preis
k) Höchstpreis
l) Sättigungsmenge

Schauen Sie sich die folgende Produktinfo an und vergleichen Sie die unverbindliche Preisempfehlung mit Ihren ermittelten Werten. Was bedeutet das für die ADIDAS AG?



Aufgabe 4.141 (PxWurG)

Sie sind Mitarbeiter/Mitarbeiterin des Unternehmens **SIEMENS AG** und arbeiten in der Abteilung Finanzwesen. SIEMENS produziert täglich Kaffeevollautomaten der Serie "EQ900". Bei der morgigen Vorstandssitzung sollen alle Kosten, Erlöse und Gewinne aller Produkte des Unternehmens vorgestellt werden, damit das Produktangebot für das kommende Jahr optimiert werden kann.
Ihr Team ist zuständig für Daten der Kaffeevollautomaten-Serie "EQ900". Der Vorstandsvorsitzende der SIEMENS AG, Joe Kaeser, gibt Ihnen für Ihre Kalkulation lediglich folgende Informationen für die lineare Kostenfunktion und die Erlösfunktion:

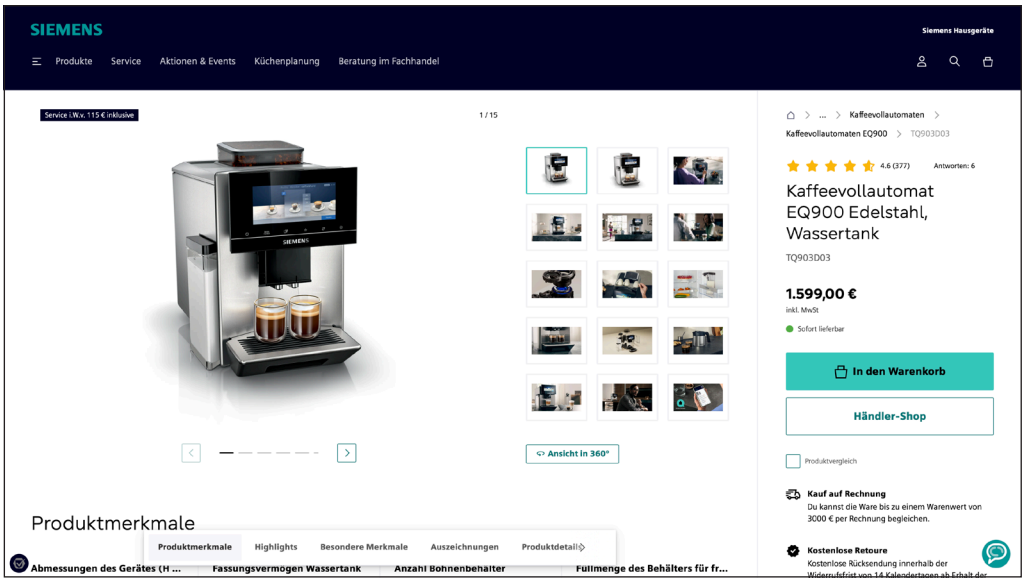
Menge (in ME)	0	100	400
Kosten (in GE)	100.000	200.000	500.000

Die Erlösfunktion: $E(x) = -4{,}2x^2 + 3000x$

Bestimmen Sie folgende Werte, die Sie Ihrem Chef bei der Präsentation vorlegen können:

a) Kostenfunktion
b) variable Kosten
c) Fixkosten
d) Preis-Absatz-Funktion
e) Gewinnfunktion
f) Gewinnmaximum
g) Gewinnschwelle
h) Gewinngrenze
i) Cournot'sche Menge
j) Cournot'scher Preis
k) Höchstpreis
l) Sättigungsmenge

Schauen Sie sich die folgende Produktinfo an und vergleichen Sie die unverbindliche Preisempfehlung mit Ihren ermittelten Werten. Was bedeutet das für die SIEMENS AG?



Aufgabe 4.142 (AqgwLT)

Das Unternehmen ProGrip GmbH, bekannt für hochwertiges Handwerkzeug, plant die Einführung eines neuen Schraubendreher-Sets. Der Marktpreis hängt von der produzierten Stückzahl ab.
Die Marketingabteilung modelliert die Preis-Absatz-Funktion mit $p(x) = -0{,}15x + 18$.
Die Produktion verursacht Fixkosten in Höhe von 220 GE, dazu kommen variable Kosten von 3,2 GE pro Stück.
Beurteilen Sie auf Basis der mathematischen Modelle, ob eine Produktion unter den gegebenen Bedingungen wirtschaftlich tragbar ist.

a) Stellen Sie die Gesamtkostenfunktion in Abhängigkeit von x auf.
b) Bestimmen Sie das Intervall, in dem mit Gewinn gerechnet werden kann.
c) Ermitteln Sie den Punkt, an dem der Gewinn maximal ist.
d) Wie hoch ist der Preis je Set bei dieser Menge und wie beurteilen Sie diesen aus Marktsicht?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 4.143 (DBNzsY)

Ein Unternehmen plant die Einführung eines neuen Produkts. Die Kostenfunktion lautet $K(x) = 0{,}05x + 4$ und die Gewinnfunktion $G(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}45x - 4$.

a) Leiten Sie die zugehörige Preis-Absatz-Funktion her.
b) Für welche Produktionsmengen erzielt das Unternehmen Gewinn?
c) Wie hoch ist der maximale Gewinn und welcher Preis gehört dazu?
d) Wie groß sind der Höchstpreis und die Sättigungsmenge?

Aufgabe 4.144 (6WPbL3)

Die Firma ToolWorks AG, ein Anbieter von Spezialzangen für den Industriebereich, plant ein neues Produkt auf den Markt zu bringen. Der Verkaufspreis hängt von der produzierten Stückzahl ab und wird durch die Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -0{,}2x + 22$ modelliert. Für die Produktion fallen Fixkosten in Höhe von 180 GE an. Die variablen Kosten betragen 4,1 GE pro Stück.

a) Stellen Sie die Gesamtkostenfunktion in Abhängigkeit von x auf.
b) Geben Sie den Bereich an, in dem das Unternehmen Gewinn erwirtschaftet.
c) Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge der maximale Gewinn erzielt wird und und wie der Verkaufspreis pro Stück bei dieser Menge ist.
d) Stellen Sie die Erlösfunktion auf und skizzieren Sie diese im Vergleich zur Gewinnfunktion.
e) Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich.

Aufgabe 4.145 (YsA9D2)

Ein regionaler Getränkehersteller möchte nachhaltiger werden und überlegt, ein Getränk in Mehrweg-Glasflaschen einzuführen. Aufgrund der höheren Verpackungskosten ist unklar, ob sich dieses Konzept rechnet.
Die Preis-Absatz-Funktion wird mit $p(x) = -0{,}2x + 6$ beschrieben.
Die Kostenfunktion lautet: $K(x) = 1{,}1x + 5$

a) Ermitteln Sie den Break-Even-Point (Gewinnschwelle) dieser Produktion.
b) Berechnen Sie die gewinnmaximale Menge und interpretieren Sie deren Bedeutung für die Produktionsplanung.

Aufgabe 4.146 (dCvkNM)

Das Start-up ECOstep produziert Sneaker aus Recyclingmaterialien. Die Preisgestaltung erfolgt nach $p(x) = -0{,}05x + 12$ und die Produktionskosten betragen $K(x) = 0{,}8x + 30$.
Die Geschäftsleitung will wissen, ob das Projekt im ersten Produktionsjahr mit einer maximalen Stückzahl von 100 gewinnbringend ist.

a) Stellen Sie die Erlös- und Gewinnfunktion auf.
b) Untersuchen Sie, ob innerhalb der maximal geplanten Produktion Gewinn erzielt wird.
c) Ermitteln Sie die optimale Absatzmenge für maximalen Gewinn.
d) Um wie viel Prozent müsste die maximal produzierte Stückzahl erhöht werden, um die gewinnmaximale Produktionsmenge zu erreichen?
e) Der Produktionsleiter schlägt vor, bei Stückzahlen über 90 einen Mengenrabatt anzubieten. Diskutieren Sie, welche Konsequenzen das für den Gewinn hätte.

Aufgabe 4.147 (KZmVby)

Ein Unternehmen entwickelt einen neuen kabellosen Gaming-Controller. Der Verkaufspreis hängt von der Absatzmenge x (in ME) ab und wird durch $p(x) = -0{,}1x + 40$ beschrieben.
Die Fixkosten betragen 500 GE, die variablen Kosten 5 GE pro Stück.

a) Stellen Sie die Erlös- und Gewinnfunktion auf.
b) Bestimmen Sie, ab welcher Stückzahl das Produkt Gewinn erzielt.
c) Ermitteln Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den zugehörigen Preis.
d) Beurteilen Sie, ob sich die Produktion trotz unsicherer Absatzmenge wirtschaftlich lohnt.

4.12 CHECKLISTE – QUADRATISCHE FUNKTIONEN

Mit der Checkliste können Sie als Vorbereitung auf die Klassenarbeit überprüfen, welche grundlegenden Themenbereiche der Unterrichtsreihe Sie gut können bzw. wo Sie noch unsicher sind. Wenn Sie die Checkliste erfolgreich bearbeitet haben, sollten Sie in der Klassenarbeit auf jeden Fall eine ausreichende Leistung erzielen.

	Meine Kompetenzen (bitte kreuzen Sie entsprechend an):	Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
1	Ich kann quadratische von nicht quadratischen Funktionen unterscheiden.				
2	Ich kann Funktionswerte für vorgegebene x-Werte bestimmen.				
3	Ich kann quadratische Funktionen zeichnen.				
4	Ich kenne die allgemeine Scheitelpunktform und weiß, was die Variablen a, d und e bedeuten.				
5	Ich kann mit gegebenem Scheitelpunkt und einem weiteren Punkt die Scheitelpunktform bestimmen.				
6	Ich kenne die allgemeine Form einer quadratischen Funktion und weiß, was a und c bedeuten.				
7	Ich kann die Scheitelpunktform in die Normalform umwandeln.				
8	Ich kann die Normalform mithilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform umwandeln.				
9	Ich beherrsche mindestens ein Verfahren um die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen zu bestimmen.				
10	Ich kann sagen, wann eine quadratische Funktion zwei, keine oder eine Nullstelle besitzt.				
11	Ich kann die Nullstellen aus Textaufgaben heraus bestimmen.				
12	Ich kann den y-Achsenabschnitt mit einem Sachzusammenhang in Verbindung bringen.				
13	Ich kann die Nullstellen mit einem Sachzusammenhang in Verbindung bringen.				
14	Ich kenne die unterschiedlichen Lagebeziehungen von Geraden und Parabeln zueinander.				

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

		Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
15	Ich kann die Schnittpunkte einer Parabel und einer Geraden bestimmen.				
16	Ich kann sagen, wie viele Schnittpunkte zwei Parabeln miteinander haben.				
17	Ich kann die Schnittpunkte zweier Parabeln bestimmen.				
18	Ich kann die Faktorschreibweise einer quadratischen Funktion bestimmen.				
19	Ich kann die Faktorschreibweise in die allgemeine Schreibweise (Normalform) umformen.				
20	Ich kann Sachzusammenhänge in lineare Gleichungssysteme umwandeln.				
21	Ich kann lineare Gleichungssysteme mit drei Unbekannten lösen.				
22	Ich kann lineare Gleichungssysteme mit mehr als drei Unbekannten lösen.				
23	Ich kann die Lösungen eines linearen Gleichungssystem auf einen Sachkontext beziehen				

Hilfestellung

Beim Durchgehen der Checkliste sind noch folgende Fragen aufgetaucht:

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.1 FUNKTIONEN HÖHEREN GRADES

Situationsbeschreibung – Videodreh mit einer Drohne
Für ein Imagevideo über den Westfalenpark soll eine Drohne eine ruhige Kamerafahrt über eine zentrale Achse fliegen. Damit die Aufnahme besonders "cinematisch" wirkt, ist die Höhe der Drohne nicht konstant, sondern folgt einem geplanten Höhenprofil: Zuerst steigt die Drohne schnell an, fliegt dann in einer leichten Wellenform und sinkt anschließend wieder ab. Zur besseren Planung wird die Höhe y in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke x modelliert (alle Angaben in Metern). Das Höhenprofil wird durch folgende Funktion angegeben:
$q(x) = -0{,}005x^4 + 0{,}15x^2 + 3$

So kann die Flugroute vorab am Computer visualisiert und mit den gewünschten Bildausschnitten (z. B. Blick auf Wasserfläche, Wegeführung oder Lichtinstallation) abgestimmt werden.

Der Grad einer Funktion (wmJ1Be)
In den vergangenen Kapiteln wurden vor allem lineare und quadratische Funktionen betrachtet, zum Beispiel $g(x) = 2x - 4$ oder $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$. Solche Funktionen lassen sich nach dem **Grad** einordnen. Der Grad hängt davon ab, welcher Exponent in der Funktionsgleichung am größten ist. Lineare Funktionen haben Grad 1, quadratische Funktionen Grad 2. Diese beiden Typen sind jedoch nur ein kleiner Teil möglicher Funktionen. Häufig treten Funktionsgleichungen auf, in denen höhere Potenzen von x vorkommen, zum Beispiel x^3, x^4, x^5 oder noch größere Exponenten.

Solche Funktionsgleichungen heißen **Polynomfunktionen** oder **ganzrationale Funktionen** (die Begriffe werden synonym verwendet). Eine Polynomfunktion setzt sich aus Summen von Potenztermen zusammen, also aus Termen wie $a \cdot x^k$, wobei a eine Zahl ist und k eine nichtnegative ganze Zahl (0, 1, 2, 3, …). Damit sind auch lineare und quadratische Funktionen Polynomfunktionen.

Merksatz
Eine Polynomfunktion besteht aus einer Summe von Termen in der Form $a \cdot x^k$ mit $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Von Funktionen höheren Grades spricht man, wenn der Grad größer als 2 ist. Eine Polynomfunktion kann in **Normalform** (zum Beispiel mit dem 4. Grad) allgemein so geschrieben werden: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a \neq 0$.

Leitkoeffizient
Der Faktor a vor dem Term mit dem höchsten Exponenten heißt Leitkoeffizient (auch: Streckungsfaktor).

Dabei sind a, b, c, d, e feste Zahlen. Entscheidend ist: Der Grad wird ausschließlich durch den höchsten vorkommenden Exponenten bestimmt. Es ist also nicht nötig, dass alle Potenzen tatsächlich in der Funktionsgleichung stehen; einzelne Terme dürfen fehlen.

Merksatz
Der Grad einer Funktion ist der größte Exponent von x, dessen Koeffizient nicht 0 ist.

Beispielsweise ist $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - 26x^2 + 13$ eine Polynomfunktion 5. Grades, obwohl die Terme mit x^4 und x nicht vorkommen.

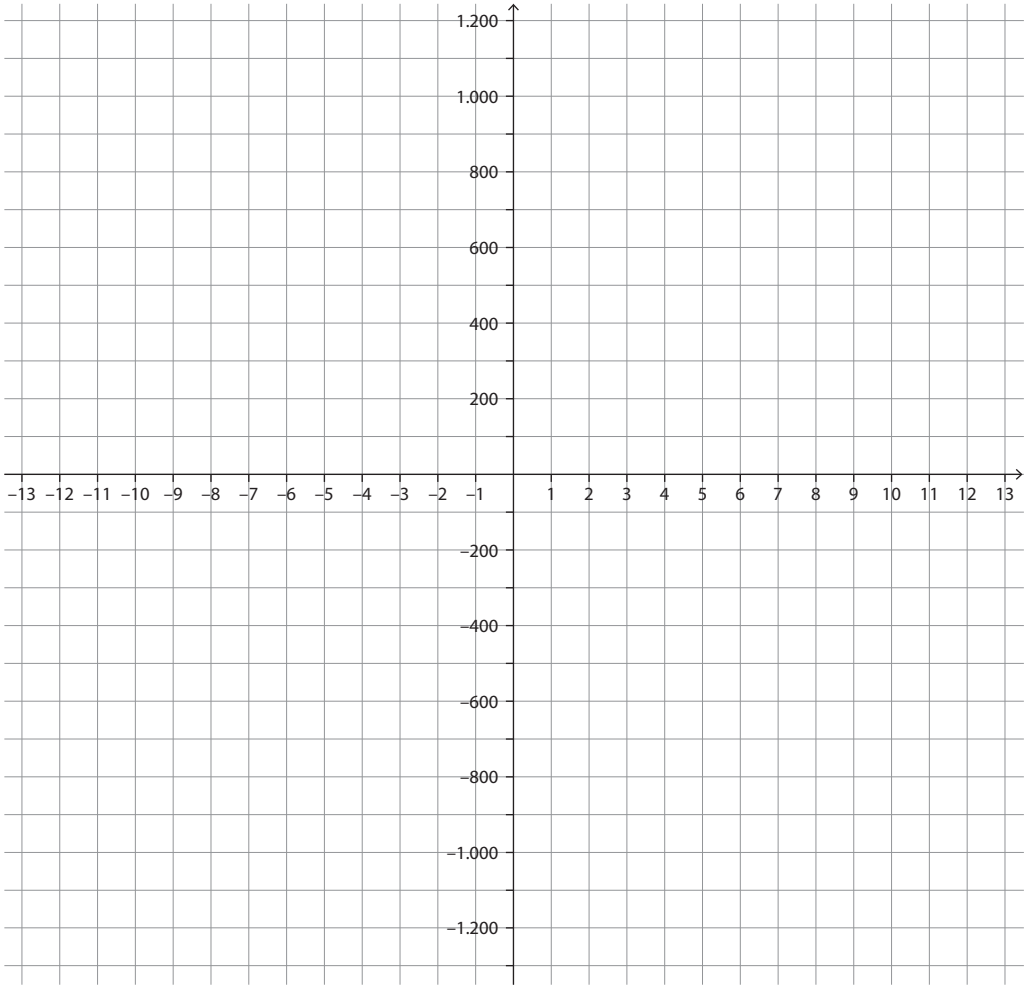
Aufgabe 5.1 (X6xMkc)

Gegeben sind folgende Funktionsgleichungen:

$f(x) = 0{,}2x^4 + x^3 - 20{,}4x^2 - 87{,}2x - 88$ $\quad h(x) = -x^4 - 8x^3 + 40x^2 + 224x + 240$

$g(x) = -5x^3 + 285x - 280$ $\quad i(x) = 5x^3 - 30x^2 - 200x + 960$

a) Zeichnen (und beschriften) Sie die gegebenen Funktionen mit Hilfe der Tabellenfunktion Ihres Taschenrechners in das Koordinatensystem (idealerweise mit verschieden farbigen Stiften).



Grenzverhalten
Statt umgangssprachlich "von oben nach unten" wird mathematisch das Grenzverhalten beschrieben:
Der Funktionsgraph verläuft für x -> –∞ gegen +∞ und für x -> +∞ gegen –∞, also

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

"**Der Funktionsgraph verläuft für x gegen minus Unendlich gegen plus Unendliche und für x gegen plus Unendlich gegen minus Unedlich.**"

Je nach Grad und Vorzeichen des Leitkoeffizienten ergeben sich entsprechend die anderen Kombinationen.

b) Anhand der gezeichneten Graphen können Sie nun bestimmte Eigenschaften der Funktionen für verschiedene Grade ablesen (ergänzen sie die Begriffe "oben" bzw. "unten"):

Wenn der Grad der Funktion **gerade** ist und der Leitkoeffizient **a > 0**, verläuft der Funktionsgraph von _____ nach _____.

Wenn der Grad der Funktion **gerade** ist und der Leitkoeffizient **a < 0**, verläuft der Funktionsgraph von _____ nach _____.

Wenn der Grad der Funktion **ungerade** ist und der Leitkoeffizient **a > 0**, verläuft der Funktionsgraph von _____ nach _____.

Wenn der Grad der Funktion **ungerade** ist und der Leitkoeffizient **a < 0**, verläuft der Funktionsgraph von _____ nach _____.

c) Auch bei Polynomfunktionen höheren Grades beschreibt der letzte Summand der Funktionsgleichung den _____.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.2 (d6Dezf) ○

Geben Sie für jede Funktion an, ob der Graph von oben nach oben, von unten nach unten, von unten nach oben oder von oben nach unten verläuft. Begründen Sie jeweils kurz mit Hilfe des Grades und des Leitkoeffizienten.

a) $f(x) = -2x^6 + 3x^2 - 1$
b) $g(x) = 0{,}5x^5 - 4x$
c) $h(x) = -x^4 + 7x^2$
d) $p(x) = 3x^3 - 2x + 5$
e) $k(x) = -0{,}3x^7 + x^2 - 6$
f) $m(x) = 1{,}2x^8 - 5x^3 + 2$
g) $n(x) = -0{,}8x^4 + 2x - 9$
h) $q(x) = 0{,}25x^9 - 3x^2 + 1$
i) $r(x) = 5x^6 - 0{,}4x^3 + 7$

Aufgabe 5.3 (HkUgFY) ○

Ordnen Sie den vier Funktionsgleichungen A–D die vier Verläufe 1–4 zu:

1. von oben nach oben
2. von unten nach unten
3. von unten nach oben
4. von oben nach unten

A: $f(x) = 0{,}2x^4 - 5x^2 + 1$
B: $f(x) = -0{,}1x^5 + 2x$
C: $f(x) = 3x^3 - 1$
D: $f(x) = -x^6 + 4$

Aufgabe 5.4 (deWn7A)

Erstellen Sie jeweils eine Polynomfunktion in Normalform (mindestens 3. Grades), deren Graph den folgenden Verlauf hat: ○

a) von oben nach oben
b) von unten nach unten
c) von unten nach oben
d) von oben nach unten

Aufgabe 5.5 (jUG78v) ◒

Geben Sie den kleinstmöglichen Grad an, mit dem ein Polynom diesen Verlauf haben kann, und nennen Sie ein Beispiel:

a) von oben nach oben
b) von unten nach unten
c) von unten nach oben
d) von oben nach unten

Aufgabe 5.6 (m9utzN) ○

Ein Schüler behauptet: "Bei Grad 6 verläuft der Graph immer von unten nach oben."
Beurteilen Sie die Aussage und korrigieren Sie sie.

Symmetrieverhalten (7jjp69) ⓘ

Bei Polynomfunktionen kann man oft schon an der Funktionsgleichung erkennen, ob der Graph eine Symmetrie besitzt. Das ist hilfreich, weil man beim Zeichnen und beim späteren Untersuchen des Graphen schneller einen Überblick bekommt. Es wird unterschieden zwischen Achsensymmetrie, Punktsymmetrie und keiner Symmetrie.

Achsensymmetrie zur y-Achse

Ein Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn links und rechts von der y-Achse derselbe Verlauf entsteht. Formal gilt:
$f(x) = f(-x)$
Für $f(x) = x^2$ ergibt sich damit beispielsweise $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Merkhilfe: Kommen in der Polynomfunktion **nur gerade Exponenten** vor (z. B. x^2, x^4, x^6 und ggf. ein konstanter Term), dann ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.

Punktsymmetrie zum Ursprung

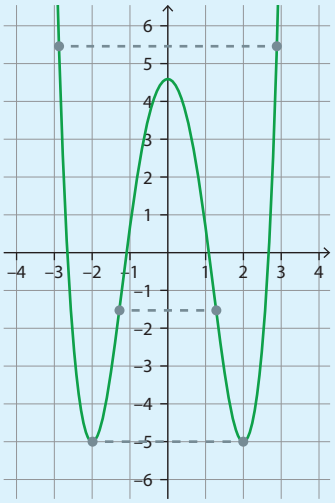
Ein Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn er durch eine Drehung um 180° um den Ursprung auf sich selbst abgebildet wird. Formal gilt:
$f(-x) = -f(x)$.
Für $f(x) = x^3$ ergibt sich damit beispielsweise $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Merkhilfe: Kommen in der Polynomfunktion **nur ungerade Exponenten** vor (z. B. x, x^3, x^5) und kein konstanter Term, dann ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

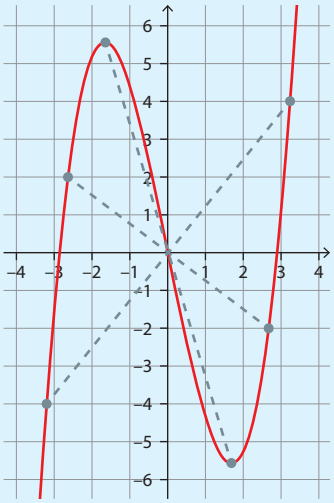
Keine Symmetrie

Wenn **gerade und ungerade Exponenten** gemischt vorkommen, besitzt der Graph in der Regel keine der beiden genannten Symmetrien. Auch ein konstanter Term verhindert die Punktsymmetrie zum Ursprung.

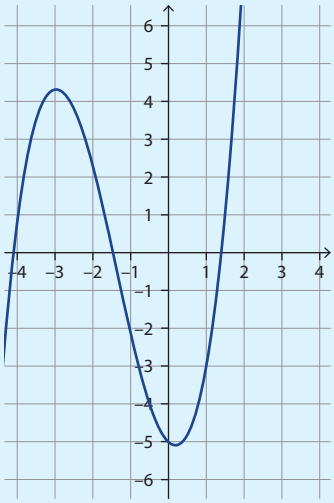
Achsensymmetrie



Punktsymmetrie



keine Symmetrie



○ **Aufgabe 5.7** **(ybrfTh)**

Bestimmen Sie jeweils

1. den Grad der Funktion und
2. ob der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung oder nicht symmetrisch ist.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7$ b) $g(x) = -x^5 + 4x^3 - x$ c) $h(x) = 0{,}5x^3 + 2x^2 - 1$

○ **Aufgabe 5.8** **(FjqxRb)**

Ordnen Sie den Funktionen jeweils eine Aussage zu.

Aussagen:	Funktionen:
1. Grad gerade, $a > 0$, achsensymmetrisch	A: $f(x) = x^5 + x^2$
2. Grad gerade, $a < 0$, achsensymmetrisch	B: $g(x) = 2x^6 - 3x^2$
3. Grad ungerade, $a > 0$, punktsymmetrisch	C: $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$
4. Grad ungerade, $a < 0$, punktsymmetrisch	D: $p(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$
5. Grad ungerade, keine Symmetrie	E: $q(x) = -0{,}5x^3 + 2x$
6. Grad gerade, keine Symmetrie	F: $r(x) = -3x^4 + x$

◒ **Aufgabe 5.9** **(HQWjxQ)**

Prüfen Sie durch Einsetzen von $-x$, ob die Funktion achsensymmetrisch ($f(-x) = f(x)$), punktsymmetrisch ($f(-x) = -f(x)$) oder nicht symmetrisch ist.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ c) $h(x) = x^3 + x^2$ e) $q(x) = -3x^5 + 2x^3 - 7x$

b) $g(x) = 2x^5 - x$ d) $p(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^2$ f) $r(x) = x^4 + x^2 + 4$

○ **Aufgabe 5.10** **(F5jWdT)**

Schauen Sie sich die Situationsbeschreibung zur Drohnenaufnahme aus diesem Kapitel an und untersuchen Sie die zugehörige Funktion $q(x)$:

a) Bestimmen Sie den Grad der Funktion.

b) Entscheiden Sie, ob der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse, punktsymmetrisch zum Ursprung oder nicht symmetrisch ist. Begründen Sie anhand der Funktionsgleichung.

c) Zeichnen Sie den Graphen in einem Koordinatensystem und überprüfen Sie Ihre Vermutung aus b).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.2 POLYNOMDIVISION

Situationsbeschreibung – Funktionsweise eines QR-Codes
Auf Plakaten, Eintrittskarten oder Verpackungen sind QR-Codes oft Wind, Wetter und kleinen Beschädigungen ausgesetzt: Ein Kratzer, ein Aufkleberrest oder ein Knick verdeckt schnell einen Teil der schwarzen und weißen Module. Trotzdem lassen sich viele QR-Codes noch scannen, weil im Code zusätzliche Fehlerkorrektur-Daten gespeichert sind. QR-Codes verwenden dafür die sogenannte **Reed-Solomon-Fehlerkorrektur**, bei der die Informationen mithilfe von Polynom-Rechnen so ergänzt werden, dass fehlende oder verfälschte Teile innerhalb bestimmter Grenzen rekonstruiert werden können.

Im Hintergrund steckt dabei eine Idee, die in diesem Kapitel aufgegriffen wird: Beim Erzeugen der Fehlerkorrektur wird mit Polynomen gerechnet – und ein zentraler Schritt lässt sich als Polynomdivision (bzw. "Division mit Rest" bei Polynomen) verstehen.

Linearfaktorzerlegung (9BkRsx)
Aus Kapitel 4.9 ist die Faktorschreibweise bereits bekannt. Das Umformen einer Polynomfunktion von der Normalform in die Faktorschreibweise heißt Linearfaktorzerlegung. Der Name kommt daher, dass die Funktion dabei in lineare Faktoren (Klammern ersten Grades) zerlegt wird.

Allgemein kann festgehalten werden, dass eine Funktionsgleichung in Linearfaktorschreibweise angegeben werden kann als: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots$
wobei $a \neq 0$ gilt und $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Nullstellen sind (Nullstellen können auch mehrfach auftreten).

Die Linearfaktorzerlegung basiert auf dem Satz vom Nullprodukt:

> "*Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.*"

Das heißt: Für $a \cdot b = 0$ muss **entweder** $a = 0$ **oder** $b = 0$ sein, damit die Gleichung Null ergibt. Denn dann gilt: $0 \cdot b = 0$ oder $a \cdot 0 = 0$.

Sei beispielsweise die Funktion $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$ gegeben, dann können die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -5$ mit Hilfe der pq-Formel bestimmt werden. Dann lautet die Faktorschreibweise dieser Funktion: $f(x) = 2(x - 3)(x + 5)$.

Ist hingegen die Faktorschreibweise gegeben, so können daraus die Nullstellen bestimmt werden, indem die einzelnen Klammern gleich Null gesetzt werden:
Aus $f(x) = 0{,}5\underbrace{(x + 2)}_{\substack{0 = x + 2 \\ x = -2}}\underbrace{(x - 6)}_{\substack{0 = x - 6 \\ x = 6}}$ folgen demnach die Nullstellen $x_1 = -2$ oder $x_2 = 6$.

ⓘ **Von der Faktorschreibweise zur Normalform (VamXg4)**

Um aus der Faktorschreibweise die Normalform zu erhalten, werden die Klammern ausmultipliziert. Dabei gilt: Jeder Term der einen Klammer wird mit jedem Term der anderen Klammer multipliziert.

Hilfe nötig?
Falls Sie zum Ausmultiplizieren noch Hilfe benötigen, schauen Sie noch einmal in Kapitel 1.7 "Klammern multiplizieren".

Beispiel (Funktion zweiten Grades)

$f(x) = (x - 2)(x + 4)$ | Klammern miteinander multiplizieren
$= x^2 + 4x - 2x - 8$ | Werte zusammenfassen
$= 2 + 2x - 8$

Beispiel (Funktion dritten Grades)

$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 3)$ | die ersten beiden Klammern multiplizieren
$= (x^2 + 2x - 1x - 2)(x + 3)$ | Werte in der großen Klammer zusammenfassen
$= (x^2 + x - 2)(x + 3)$ | große und kleine Klammer multiplizieren
$= x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x - 2x - 6$ | Werte zusammenfassen
$= x^3 + 4x^2 + x - 6$

○ **Aufgabe 5.11 (TAJniF)**

Ermitteln Sie zu den folgenden Nullstellen jeweils zuerst eine passende Faktorschreibweise der (quadratischen) Funktion und formen Sie diese anschließend durch Ausmultiplizieren in die Normalform um.

a) $x_1 = 4 \ \wedge \ x_2 = -2$
b) $x_1 = 2 \ \wedge \ x_2 = -7$
c) $x_1 = -1 \ \wedge \ x_2 = 6$
d) $x_1 = -3 \ \wedge \ x_2 = 5$
e) $x_1 = -4 \ \wedge \ x_2 = 1$
f) $x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = -8$

○ **Aufgabe 5.12 (XY432Z)**

Formen Sie die folgenden quadratischen Funktionen in die Faktorschreibweise um. Bestimmen Sie dazu zuerst die Nullstellen (z. B. mit der pq-Formel).

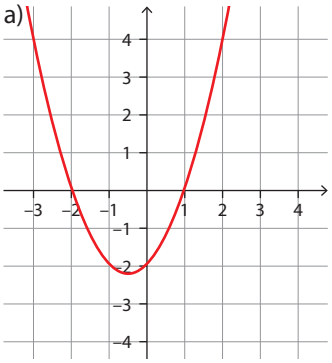
a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$
b) $f(x) = x^2 - 8x + 7$
c) $f(x) = x^2 - 9$
d) $f(x) = x^2 - 1{,}3x - 3$
e) $f(x) = x^2 - 14x + 47{,}04$
f) $f(x) = 2x^2 - 11x + 12$

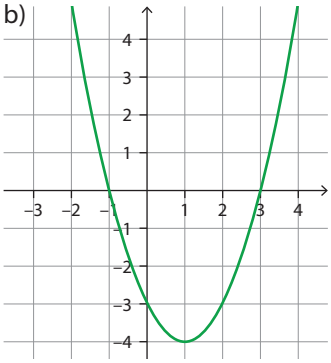
◒ **Aufgabe 5.13 (zbZTpe)**

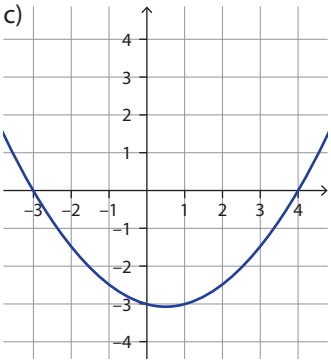
Merke
Gehen Sie davon aus, dass es auch bei der Faktorschreibweise einen Streckungsfaktor a gibt, also $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (z. B. $f(x) = 3(x - 1)(x + 2)$ mit $a = 3$).

Lesen Sie einen weiteren Punkt aus dem Graphen ab um den Streckungsfaktor a zu bestimmen.

Gegeben sind die folgenden Graphen. Graph 1 und Graph 2 stellen jeweils eine verschobene Normalparabel dar, Graph 3 eine gestauchte Parabel. Bestimmen Sie mithilfe der Faktorschreibweise die Funktionsgleichung und geben Sie diese anschließend in Normalform an.

a)


b)


c)


◒ **Aufgabe 5.14 (4AgZJG)**

Zu den folgenden drei Nullstellenkombinationen ist jeweils eine Polynomfunktion 3. Grades gesucht. Stellen Sie zuerst die Faktorschreibweise auf und formen Sie anschließend durch Ausmultiplizieren in die Normalform um.

a) $x_1 = 2 \ \wedge \ x_2 = -1 \ \wedge \ x_3 = 4$
b) $x_1 = -2 \ \wedge \ x_2 = 1 \ \wedge \ x_3 = -5$
c) $x_1 = -3 \ \wedge \ x_2 = 3 \ \wedge \ x_3 = 6$
d) $x_1 = -4 \ \wedge \ x_2 = 2 \ \wedge \ x_3 = 5$
e) $x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = -3 \ \wedge \ x_3 = 7$
f) $x_1 = -1 \ \wedge \ x_2 = -2 \ \wedge \ x_3 = 4$
g) $x_1 = -6 \ \wedge \ x_2 = 1 \ \wedge \ x_3 = 3$
h) $x_1 = -5 \ \wedge \ x_2 = -1 \ \wedge \ x_3 = 2$
i) $x_1 = -2 \ \wedge \ x_2 = 0 \ \wedge \ x_3 = 6$
j) $x_1 = 4 \ \wedge \ x_2 = 5 \ \wedge \ x_3 = -3$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Polynomdivision (2sDfg4)

Von der Faktorschreibweise zur Normalform gelangt man durch Ausmultiplizieren recht einfach. Der umgekehrte Weg ist umfangreicher: Soll aus der Normalform die Faktorschreibweise entstehen, werden dazu die Nullstellen benötigt. Bei quadratischen Funktionen lassen sich die Nullstellen mit der pq-Formel bestimmen. Für Funktionen höheren Grades gibt es für die **Nullstellenberechnung** weitere Verfahren. Eines davon ist die Polynomdivision.

Herleitung der Polynomdivision

Für die Polynomdivision ist wichtig zu wissen: Polynome lassen sich nicht nur multiplizieren, sondern (unter bestimmten Voraussetzungen) auch dividieren. Das wirkt zunächst ungewohnt – ist aber genau dann hilfreich, wenn aus einer Funktionsgleichung in Normalform wieder die Faktorschreibweise gewonnen werden soll.

Zur Herleitung dient folgendes Beispiel:

$$f(x) = \underbrace{(x-2)}_{1\text{ NS}}\underbrace{(x+1)}_{1\text{ NS}}\underbrace{(x+3)}_{1\text{ NS}}$$

Jede Klammer enthält eine Nullstelle.

In dieser Darstellung sind die Nullstellen (NS) sofort erkennbar: In der ersten Klammer steckt die Nullstelle x = 2, in der zweiten Klammer die Nullstelle x = –1 und in der dritten Klammer die Nullstelle x = –3. Werden nun die ersten beiden Klammern miteinander multipliziert, entsteht eine quadratische Funktion:

$$f(x) = \underbrace{(x-2)}_{1\text{ NS}}\underbrace{(x+1)}_{1\text{ NS}}\underbrace{(x+3)}_{1\text{ NS}} = \underbrace{(x^2-x-2)}_{2\text{ NS}}\underbrace{(x+3)}_{1\text{ NS}}$$

Die große Klammer enthält zwei Nullstellen, die kleine Klammer eine Nullstelle.

In der linken großen Klammer befinden sich nun zwei Nullstellen, nämlich genau die Nullstellen der beiden linearen Faktoren, die zuvor miteinander multipliziert wurden (x = 2 und x = –1). Diese könnten z. B. mit der pq-Formel bestimmt werden. Aus der kleinen Klammer lässt sich weiterhin eine Nullstelle direkt ablesen (x = –3). Werden nun auch diese beiden Klammern miteinander ausmultipliziert, ergibt sich Folgendes:

$$f(x) = \underbrace{(x-2)}_{1\text{ NS}}\underbrace{(x+1)}_{1\text{ NS}}\underbrace{(x+3)}_{1\text{ NS}} = \underbrace{(x^2-x-2)}_{2\text{ NS}}\underbrace{(x+3)}_{1\text{ NS}} = \underbrace{x^3+2x^2-5x-6}_{3\text{ NS}}$$

Das Endpolynom enthält drei Nullstellen.

In diesem Polynom dritten Grades sind zwar alle drei Nullstellen "enthalten", aber sie sind nicht mehr direkt ablesbar. Mit den bisherigen Mitteln lässt sich aus dieser Normalform allein nicht sofort zu allen Nullstellen zurückkehren. Genau hier setzt die Polynomdivision an. Entscheidend ist folgende Idee: **Ist eine Nullstelle bekannt, dann ist auch ein passender Linearfaktor bekannt**. Im Beispiel ist x = –3 eine Nullstelle, demnach gehört der Linearfaktor (x + 3) zur Funktion. Damit gilt:

$$\underbrace{(\quad ? \quad)}_{2\text{ NS}} \cdot \underbrace{(x+3)}_{1\text{ NS}} = \underbrace{x^3+2x^2-5x-6}_{3\text{ NS}}$$

Der "unbekannte" Teil $(x^2 – x – 2)$ lässt sich also wiederfinden, indem die Gleichung umgestellt, also durch (x + 3) geteilt wird:

$$\underbrace{(\quad ? \quad)}_{2\text{ NS}} = \underbrace{(x^3+2x^2-5x-6)}_{3\text{ NS}} : \underbrace{(x+3)}_{1\text{ NS}}$$

Wird diese Division durchgeführt, entsteht ein Polynom zweiten Grades $(x^2 – x – 2)$. Dessen Nullstellen lassen sich anschließend z. B. mit der pq-Formel bestimmen. Dieser Rechenschritt heißt **Polynomdivision**, weil ein Polynom durch ein anderes Polynom dividiert wird.

Ⓑ **Durchführung der Polynomdivision**

Die Polynomdivision zur Bestimmung von Nullstellen ist eigentlich sehr einfach, da sie nur aus drei Schritten besteht, die sich immer wiederholen. Dabei wird ein Polynom ähnlich wie bei der schriftlichen Division "Stück für Stück" abgebaut, bis am Ende kein Rest mehr übrig ist (oder ein Rest übrig bleibt). Wichtig ist dabei: Dividiert wird immer zuerst der Term mit dem höchsten Exponenten, denn daraus ergibt sich der nächste Summand im Ergebnis. Im Folgenden wird die Polynomdivision am obigen Beispiel Schritt für Schritt durchgeführt:

1. Der erste Summand des linken Polynoms geteilt durch x:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3) = x^2$$

$x^3 : x$ $\quad = x^2$

2. Das Ergebnis multipliziert mit der kleinen Klammer:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : \underline{(x + 3)} = x^2$$
$$\underline{(x^3 + 3x^2)} \qquad x^2 \cdot (x + 3)$$
$$= x^3 + 3x^2$$

3. Die untereinander stehenden Polynome werden subtrahiert und der nächste Summand wird nach unten gezogen:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3) = x^2$$
$$-\underline{(x^3 + 3x^2)} \quad \downarrow$$
$$-x^2 - 5x$$

1. Jetzt folgt wieder der erste Schritt, indem der erste Summand aus dem Ergebnis der Subtraktion durch x geteilt wird:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3) = x^2 - x$$
$$-\underline{(x^3 + 3x^2)} \qquad = -x$$
$$-x^2 - 5x$$
$$-x^2 : x$$

2. Das Ergebnis wird wieder mit der kleinen Klammer multipliziert:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : \underline{(x + 3)} = x^2 - x$$
$$-\underline{(x^3 + 3x^2)} \qquad -x \cdot (x + 3)$$
$$-x^2 - 5x$$
$$\underline{-x^2 - 3x}$$
$$= -x^2 - 3x$$

3. Die untereinander stehenden Polynome werden wieder subtrahiert und der nächste Summand wird nach unten gezogen:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3) = x^2 - x$$
$$-\underline{(x^3 + 3x^2)} \quad \downarrow$$
$$-x^2 - 5x$$
$$-\underline{(-x^2 - 3x)}$$
$$-2x - 6$$

1. Und wieder folgt der erste Schritt:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3) = x^2 - x - 2$$
$$-\underline{(x^3 + 3x^2)} \qquad = -2$$
$$-x^2 - 5x$$
$$-\underline{(-x^2 - 3x)}$$
$$-2x - 6$$
$$-2x : x$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

2. Und wieder folgt der zweite Schritt:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3) = x^2 - x - 2$$
$$-(x^3 + 3x^2)$$
$$-x^2 - 5x$$
$$-(-x^2 - 3x)$$
$$-2x - 6$$
$$-2x - 6$$

$-2 \cdot (x + 3)$

$= -2x - 6$

3. Und wieder folgt der dritte Schritt:

$$(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x + 3) = x^2 - x - 2$$
$$-(x^3 + 3x^2)$$
$$-x^2 - 5x$$
$$-(-x^2 - 3x)$$
$$-2x - 6$$
$$-(-2x - 6)$$
$$0$$

Da als Ergebnis der letzten Subtraktion der Rest 0 entsteht, ist die Polynomdivision abgeschlossen. Damit ist das "unbekannte" Polynom gefunden, in dem die beiden übrigen Nullstellen enthalten sind. Diese lassen sich anschließend z. B. mit der pq-Formel bestimmen:

$$0 = x^2 - x - 2$$
$$x_{1/2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 2}$$
$$\mathbf{x_1 = 2 \ \vee \ x_2 = -1}$$

Damit ergeben sich insgesamt drei Nullstellen:
$x_1 = 2$, $x_2 = -1$ und $x_3 = -3$
wobei $x_3 = -3$ die Nullstelle ist, mit der die Polynomdivision durchgeführt wurde.

Nicht immer pq-Formel
In diesem Beispiel wird die pq-Formel angewendet, da das Quotientenpolynom den Grad 2 hat und es sich somit um eine quadratische Funktion handelt. Ergibt sich nach der Polynomdivision ein Polynom anderen Grades, muss gegebenenfalls ein anderes Lösungsverfahren verwendet werden.

Aufgabe 5.15 (QHHSms) ○

Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch.

a) $(x^3 - 4x^2 + x + 6) : (x - 3)$
b) $(-x^3 - 3x^2 + 28x + 60) : (x + 2)$
c) $(3x^3 - 12x^2 + 3x + 18) : (x - 2)$
d) $(-2x^3 + 4x^2 + 62x + 56) : (x + 4)$
e) $(5x^3 - 30x^2 + 55x - 30) : (x - 3)$
f) $(2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 28x + 48) : (x - 4)$

Aufgabe 5.16 (i3X2KE) ○

Führen Sie die Polynomdivisionen mit der jeweils gegebenen Nullstelle für folgende Funktionen durch.

a) $f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 16x + 24$ eine Nullstelle liegt bei $x = -2$
b) $f(x) = -3x^3 - 9x^2 + 54x + 120$ eine Nullstelle liegt bei $x = 4$

Aufgabe 5.17 (pFBvzM) ○

Berechnen Sie alle übrigen Nullstellen der gegebenen Funktionen.

a) $g(x) = 4x^3 - 36x^2 + 44x + 84$ eine Nullstelle liegt bei $x = 3$
b) $h(x) = -2x^3 - 14x^2 + 72$ eine Nullstelle liegt bei $x = -3$

Aufgabe 5.18 (fN5djE) ◒

Bei den folgenden Funktionen liegt jeweils eine Nullstelle im Intervall $[-3; 3]$. Bestimmen Sie diese Nullstelle (z. B. durch systematisches Ausprobieren oder mithilfe der Tabellenfunktion des Taschenrechners). Führen Sie mit dieser Nullstelle die Polynomdivision durch und bestimmen Sie anschließend alle übrigen Nullstellen.

a) $l(x) = 2x^3 - 6x^2 - 56x + 120$
b) $m(x) = -x^3 - 6x^2 + 19x + 84$
c) $n(x) = 3x^3 - 12x^2 - 75x + 84$
d) $o(x) = -2x^3 - 6x^2 + 56x + 120$

◒ **Aufgabe 5.19 (UGBgtC)**

Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch:

a) $(x^3 - 9x + 8) : (x - 1)$
b) $(x^4 - 2x^3 - 13x + 14) : (x - 1)$
c) $(x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 14x^2 + 24x - 24) : (x - 1)$
d) $(x^4 - 5x^2 + 4) : (x + 2)$
e) $(3x^4 - 24x^3 + 18x + 3) : (x - 1)$
f) $(x^4 - 7x^2 - 6x) : (x + 2)$

◒ **Aufgabe 5.20 (bnMHuq)**

Berechnen Sie alle übrigen Nullstellen der gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^4 + 11x^3 - 92x + 80$ — eine Nullstelle liegt bei $x = 2$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ — eine Nullstelle liegt bei $x = -1$
c) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 6x^2$ — eine Nullstelle liegt bei $x = -2$
d) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ — eine Nullstelle liegt bei $x = 3$
e) $f(x) = -3x^4 + 30x^2 - 27$ — eine Nullstelle liegt bei $x = -3$
f) $f(x) = -2x^3 + \frac{136}{15}x^2 + \frac{62}{15}x - \frac{168}{5}$ — eine Nullstelle liegt bei $x = 4$

◒ **Aufgabe 5.21 (DsQgYL)**

Ein Ball wird geworfen. Seine Höhe über dem Boden (in Metern) wird in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch die Funktion $h(t) = -0{,}04t^3 - 0{,}02t^2 + 1{,}12t + 1{,}1$ beschrieben. Dabei entspricht $t = 0$ dem Abwurfpunkt.

a) Weisen Sie durch Einsetzen nach, dass $t = -1$ eine Nullstelle von h ist.
b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Polynomdivision alle weiteren Nullstellen von h.
c) Zeichnen Sie den Graphen von h mit Hilfe der Tabellenfunktion des Taschenrechners.
(Koordinatensystem: x-Achse: $-6 \le x \le 6$ mit 1 cm = 1 m; y-Achse: $-2 \le y \le 3$ mit 1 cm = 1 m)
d) Welche Nullstelle ist im Sachzusammenhang als "Bodenberührung" sinnvoll? Begründen Sie kurz.

● **Aufgabe 5.22 (PrcmZP)**

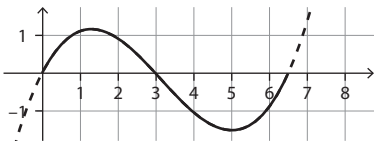
Eine Fußgängerbrücke führt über eine sechsspurige Schnellstraße. Der Bogen dieser Brücke wird durch die Funktion $b(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}07x^2 - 0{,}05x + 0{,}75$ modelliert. Dabei ist x die Breite und b(x) die Höhe des Bogens über dem Boden in Metern (eine Einheit entspricht jeweils 10 Metern).

Aus den Bauplänen ist bekannt: Bei $x = -3$ liegt der Bogen auf Bodenniveau.

a) Weisen Sie durch Einsetzen nach, dass $x = -3$ eine Nullstelle von h ist.
b) Bestimmen Sie die weiteren Nullstellen von b.
c) Zeichnen Sie den Graphen von h mithilfe der Tabellenfunktion des Taschenrechners.
(Koordinatensystem: x-Achse: $-3 \le x \le 5$ mit 1 cm = 10 m; y-Achse: $0 \le y \le 1$ mit 1 cm = 2,5 m)
d) Geben Sie die Spannweite des Brückenbogens an.
e) Die Schnellstraße ist inklusive Mittel- und Seitenstreifen 30 m breit. Die Mitte der Straße liegt bei $x = 0$. Auch an den äußersten Rändern der Seitenstreifen muss die Brücke noch mindestens 5 Meter über der Fahrbahn liegen. Wird diese Vorgabe eingehalten?

◒ **Aufgabe 5.23 (ptZkus)**

Ein Landschaftsquerschnitt wird durch die Funktion $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}95x^2 + 1{,}95x$ beschrieben. Dabei ist x die Entfernung (in 100 m) und f(x) die Höhe (in 100 m). Bestimmen Sie die Breite der Senke (des Grabens), wenn der Hügel am Fuß eine Breite von 300 m hat.



◒ **Aufgabe 5.24 (sWfKrB)**

Gewinnschwelle/-grenze
Gewinnschwelle: Ab dieser Absatzmenge wird erstmals Gewinn erzielt. Gewinngrenze: Ab dieser Menge entsteht wieder Verlust.

Ein Kleinserienhersteller fertigt ein neues Fahrzeugmodell. Die gesamten Produktionskosten K(x) (in Euro) in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x werden beschrieben durch die Funktion $K(x) = 5x^3 - 450x^2 + 16800x + 75000$.

Jedes Fahrzeug wird zu einem festen Stückpreis von 20.300 Euro verkauft. Bestimmen Sie die Gewinngrenze, wenn bekannt ist, dass die Gewinnschwelle bei $x = 10$ liegt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

QR-Codes nutzen Polynomdivision zur Fehlerkorrektur

Entwickelt wurde der QR-Code 1994 von der japanischen Firma DENSO WAVE (ein Toyota-Zulieferer), weil in der Fertigung eine schnellere und leistungsfähigere Alternative zum klassischen Barcode benötigt wurde. Ursprünglich industriell genutzt, verbreitete er sich später stark – auch, weil er frei nutzbar war und mit dem Siegeszug von Smartphones endgültig alltagstauglich wurde.

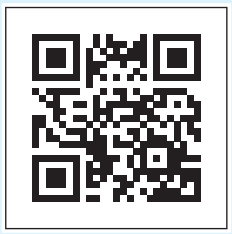
Der QR-Code (Kurzform für **Quick Response Code**) ist eine zweidimensionale Weiterentwicklung des klassischen Barcodes. Statt nur einer Zahlenfolge kann er Informationen flächig speichern – und wird dadurch beim Scannen mit Smartphone oder Lesegerät meist sehr schnell erkannt und ausgelesen. In der Praxis steckt dahinter immer ein klar definiertes Raster aus kleinen Modulen (Kästchen), das die Daten codiert.

Wie viele Informationen hineinpassen, hängt von Version und Kodierung ab: Maximal sind 7089 Ziffern bzw. 4296 Zeichen möglich – also nicht nur einzelne Wörter, sondern auch längere Inhalte wie Internetadressen, Kontaktdaten oder kurze Texte. Für die Gestaltung ist wichtig: Mehr Daten = größerer und dichterer Code, weil mehr Module benötigt werden. Dadurch steigen auch die Anforderungen an Druckqualität, Kontrast und ausreichende Größe, damit das Muster nicht "zuläuft".

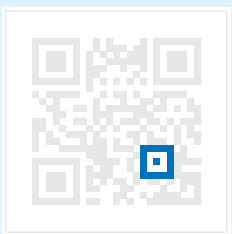
Damit QR-Codes im Alltag robust funktionieren, ist eine Fehlerkorrektur eingebaut. Dabei werden zusätzliche Informationen mitgespeichert, sodass der Code oft selbst dann noch lesbar bleibt, wenn Teile beschädigt oder verdeckt sind. Je nach Fehlerkorrekturstufe können bis zu etwa 30 % der Fläche fehlen, ohne dass der Code unlesbar wird. Trotzdem gilt: Ein sauberer Freiraum (Quiet Zone) und ein hoher Hell-Dunkel-Kontrast erhöhen die Scan-Sicherheit deutlich.

Die Anatomie eines QR-Codes

Auf den ersten Blick wirkt ein QR-Code wie ein zufälliges Schwarz-Weiß-Muster – fast wie ein verpixeltes Bild oder "Rauschen". Tatsächlich besteht er aber aus vielen einzelnen Kästchen (Modulen), die nach festen Regeln angeordnet sind. Bestimmte Bereiche dienen nicht den eigentlichen Daten, sondern helfen dem Scanner beim Erkennen, Ausrichten und Auslesen des Codes.





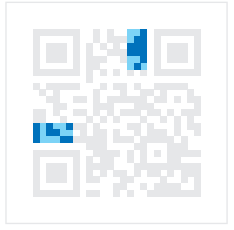




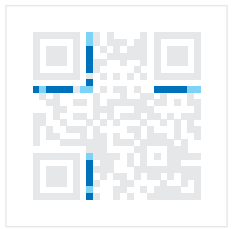
1. *Positionsmarkierungen*
   In drei Ecken befinden sich die großen markanten Quadrate. Sie machen dem Scanner sofort klar: Hier ist ein QR-Code. Gleichzeitig geben sie die Ausrichtung vor, damit der Code unabhängig davon gelesen werden kann, wie er gedruckt oder fotografiert wurde. Dadurch kann der Scanner den Code schnell lokalisieren, richtig drehen und zuverlässig auswerten.

2. *Ausrichtungsmarkierungen*
   Je nach QR-Code-Größe kommen zusätzliche, kleinere Markierungen hinzu (je größer der Code, desto mehr Markierungen). Sie unterstützen den Scanner besonders dann, wenn der Code verzerrt ist (z. B. auf einer gebogenen Fläche) oder wenn durch größere Datenmengen ein größerer QR-Code entsteht. So kann die Kamera kleine Schräglagen und perspektivische Fehler ausgleichen, bevor die Daten gelesen werden.

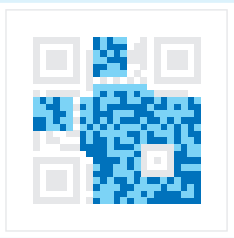
3. *Synchronisationslinien (Taktzellen)*
   Zwischen den Markierungen liegen Linien aus abwechselnd schwarzen und weißen Modulen. Sie dienen als "Takt" und helfen dem Scanner, die Größe der einzelnen Kästchen und das Raster des Codes korrekt zu bestimmen. Dadurch kann der Scanner das Modulraster exakt nachzeichnen, selbst wenn das Foto leicht unscharf oder aus schrägem Winkel aufgenommen wurde.



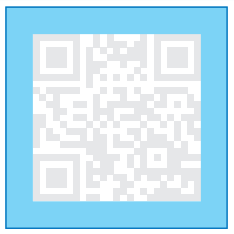
4. *Versionsfelder*
QR-Codes existieren in vielen Größen (Versionen). In speziellen Feldern ist kodiert, welche Version verwendet wird. Daraus ergibt sich unter anderem, wie groß der Code ist und wie viele Daten grundsätzlich hineinpassen. Der Scanner erkennt dadurch sofort, wie viele Module pro Seite zu erwarten sind und an welchen Stellen weitere Funktionsmuster (z. B. zusätzliche Ausrichtungsmarken) liegen.



5. *Formatfelder*
Diese Bereiche enthalten wichtige Grundeinstellungen des Codes, zum Beispiel Informationen zur Fehlerkorrekturstufe und zur verwendeten Datenmaske. Das erleichtert das zuverlässige Auslesen. So weiß der Scanner sofort, wie viele Fehler er beim Lesen ausgleichen darf. Die Formatinformationen sind zudem mehrfach im Code abgelegt, damit sie auch bei kleinen Beschädigungen noch sicher erkannt werden.



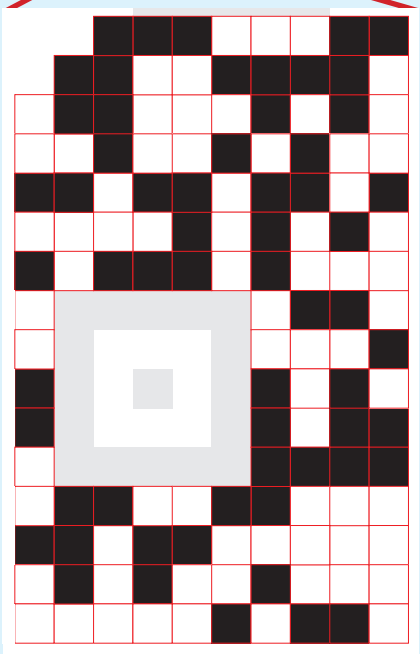
6. *Datenfeld (Nutzdaten und Fehlerkorrektur)*
Der größte Teil des Codes besteht aus den eigentlichen Nutzdaten sowie zusätzlichen Fehlerkorrekturinformationen (dazu später mehr). Diese sorgen dafür, dass der Code oft selbst dann noch lesbar ist, wenn Teile (bis zu 30 %) beschädigt oder verdeckt sind. Die Daten werden dabei in einem festgelegten Muster durch das Raster verteilt, damit einzelne Kratzer nicht gleich zusammenhängende Information zerstören.

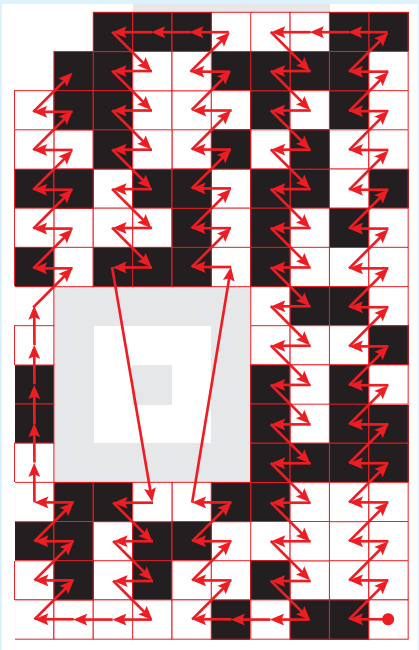


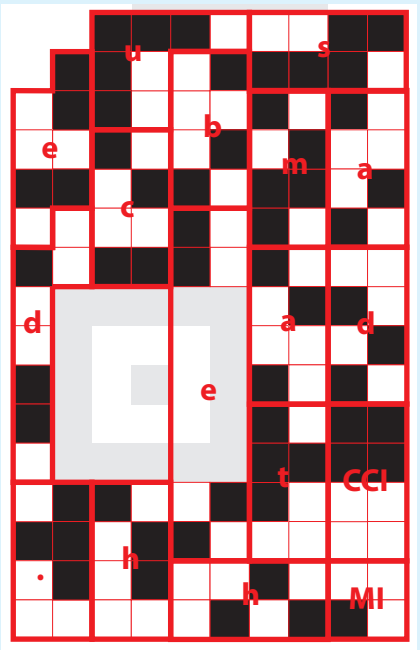
7. *Randzone (Quiet Zone)*
Um den QR-Code herum befindet sich ein freier Rand. Er ist entscheidend, damit das Scan-Programm den Code klar von seiner Umgebung trennen kann – ähnlich wie Weißraum bei einem Layout die Lesbarkeit verbessert. Fehlt diese Randzone oder ist sie zu klein, kann der Scanner den Code schlechter lokalisieren und verwechselt ihn leichter mit dem Hintergrundmuster.



Aufbau des Datenfeldes am Beispiel der Domain "dasmathebuch.de"
Die Inhalte eines QR-Codes werden als Bitfolge gespeichert, also als Folge aus 0 und 1. Im gedruckten QR-Code sieht man diese Bits als Module (die kleinen Quadrate). In den Datenmodulen steht dabei in der Regel 0 für hell und 1 für dunkel. Wichtig ist jedoch: Nicht jedes Quadrat gehört zu den Nutzdaten, denn viele Bereiche sind Funktionsmuster (z. B. Positionsmarkierungen, Ausrichtungsmarken, Taktlinien sowie Format- und Versionsfelder), die nicht mit Nutzdaten beschrieben werden.







DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Ein Bit ist eine einzelne 0 oder 1, und 8 Bit ergeben ein Byte. Im Byte-Modus (dazu gleich mehr) werden die Nutzdaten als Bytes abgelegt. Häufig entspricht bei einfachen Texten ein Zeichen genau einem Byte (z. B. bei ASCII). Bei UTF-8 ist das nicht grundsätzlich so, denn manche Zeichen benötigen mehrere Bytes (z. B. Umlaute oder Emojis). Für unsere Beispiel-Domain mit einfachen Zeichen gilt aber: Jedes Zeichen belegt genau ein Byte. Beispielhaft hat der Buchstabe S im ASCII/UTF-8-Byte den Binärcode 01010011.

ASCII
Ein einfacher Zeichensatz mit 128 Zeichen (z. B. A–Z, a–z, Ziffern, Satzzeichen); jedes Zeichen wird mit 7 Bit dargestellt (oft als 1 Byte gespeichert).

UTF-8
Eine Unicode-Kodierung, die sehr viele Zeichen unterstützt; Zeichen werden mit 1 bis 4 Bytes gespeichert, wobei ASCII-Zeichen in UTF-8 identisch codiert sind.

Bit
"Binary Digit" – kann nur zwei Zustände annehmen: 0 (Strom aus) oder 1 (Strom an). Alle Daten und Programme auf einem Computer bestehen aus diesen 0/1-Einheiten. 8 Bit ergeben ein Byte, 1024 Byte ergeben ein Kilobyte (KB), 1024 KB ergeben ein Megabyte (MB), 1024 MB ergeben ein Gigabyte (GB) und 1024 GB ergeben ein Terabyte (TB).

Der Datenstrom im QR-Code wird nicht zeilenweise eingetragen, sondern nach einem festgelegten Muster im Datenbereich verteilt. Die Platzierung beginnt unten rechts und verläuft in einem Zickzackmuster durch jeweils zwei Spalten, abwechselnd nach oben und nach unten. Trifft dieses Muster auf Funktionsbereiche (z. B. die Ausrichtungsmarkierung wie in unserem Beispiel), werden diese nicht überschrieben, sondern "übersprungen": Der Bitstrom läuft weiter und wird an der nächsten freien Stelle fortgesetzt, sodass die Daten das Raster gewissermaßen umschlängeln. In echten QR-Codes kommen zusätzlich Fehlerkorrekturinformationen hinzu, und die Daten werden außerdem mit einer Datenmaske überdeckt (maskiert), damit keine ungünstigen Muster entstehen. Beim Auslesen wird diese Maskierung wieder rückgängig gemacht. Die Maskierung lassen wir in unserem Beispiel weg.

Am Anfang der Nutzdaten stehen immer vier Bits, der sogenannte **Mode Indicator** (MI). Er gibt an, wie die folgenden Daten zu interpretieren sind. Mögliche Modi sind zum Beispiel:
1) 0001 – numerisch (nur Ziffern 0–9) – 10 verschiedene Zeichen
2) 0010 – alphanumerisch (0–9, A–Z, Leerzeichen, $%*+-./:) – 45 verschiedene Zeichen
3) 0100 – Byte (8-Bit-Bytes; Schriftsatz UTF-8) – bis zu 154.998 verschiedene Zeichen
4) 1000 – Kanji (Shift-JIS Kanji) – 6.879 verschiedene japanische Schriftzeichen

Da wir in diesem Beispiel die Domain "dasmathebuch.de" mit Kleinbuchstaben und einem Punkt kodieren, verwenden wir den Byte-Modus, also MI = 0100. Jedes Zeichen wird demnach innerhalb von 8 Kästchen (Modulen), also mit 8 bit (0 bzw. 1) kodiert.

Direkt danach folgt der **Character Count Indicator** (CCI). Er enthält die Länge des Inhalts im jeweiligen Modus. Wie viele Bits der CCI umfasst, hängt von QR-Version und Modus ab; bei kleinen QR-Versionen (1–9) hat der CCI im Byte-Modus 8 Bit, also ein Byte. Unsere Domain "dasmathebuch.de" besteht aus 15 Zeichen, also 15 Byte. Die Zahl 15 entspricht binär 1111; auf 8 Bit aufgefüllt ergibt das CCI = 00001111. Ab diesem Punkt werden im Byte-Modus die Zeichen als 8-Bit-Bytes gespeichert. Für die Domain ergeben sich die folgenden Binärcodes (UTF-8/ASCII, 8 Bit):

Zeichen	Binärcode (UTF-8 / ASCII, 8 Bit)
• d	01100100
• a	01100001
• s	01110011
• m	01101101
• a	01100001
• t	01110100
• h	01101000
• e	01100101
• b	01100010
• u	01110101
• c	01100011
• h	01101000
• .	00101110
• d	01100100
• e	01100101

Eine komplette Binärtabelle kann unter dem nebenstehenden QR-Code abgerufen werden.

Fehleranalyse mit der Polynomdivision

Damit ein QR-Code auch dann noch lesbar bleibt, wenn einzelne Module verschmutzt, zerkratzt oder teilweise verdeckt sind, wird zu den Nutzdaten zusätzliche Prüfinformation gespeichert. Die Grundidee kann man (vereinfacht) so beschreiben: Aus der Nachricht wird durch eine Polynomdivision ein Rest berechnet. Dieser Rest wird zusammen mit der Nachricht gespeichert. Beim späteren Scannen kann das Gerät die gleiche Division erneut durchführen. Wenn der Rest wieder "passt", sind die Daten sehr wahrscheinlich korrekt; wenn nicht, ist beim Lesen etwas verfälscht worden. Im echten QR-Code ist das Verfahren umfangreicher und leistungsfähiger, aber das Grundprinzip "Rest berechnen und anhängen" bleibt.

Als Beispiel verwenden wir den einfachen Text "mathe". Ein Computer speichert Buchstaben als Zahlen. Für diese fünf Zeichen (ASCII/UTF-8) gelten die Dezimalwerte:
m = 109, a = 97, t = 116, h = 104, e = 101.
Dieselben Werte könnte man auch in Binär-Code (je 8 Bit) notieren: 01101101 01100001 01110100 01101000 01100101. Das ist nur eine andere Schreibweise derselben Bytewerte.

Wir bilden nun ein Polynom, bei dem die Zahlen die Koeffizienten sind. Das Nachrichtenpolynom M(x) hat bei fünf Zeichen den Grad 4:

$$M(x) = 109 + 97x + 116x^2 + 104x^3 + 101x^4$$

Damit wir am Ende zwei Prüfwerte anhängen können, "schieben" wir die Nachricht um zwei Stellen nach links (entspricht: zwei Nullwerte anhängen). Mathematisch ist das eine Multiplikation mit x^2:

$$D(x) = M(x) \cdot x^2 = 109x^2 + 97x^3 + 116x^4 + 104x^5 + 101x^6$$

Jetzt teilen wir D(x), also unser erweitertes Nachrichtenpolynom durch ein einfaches Generatorpolynom. Dies ist nicht zufällig gewählt, sondern wird so festgelegt, dass es für eine gewünschte Anzahl von Prüfsymbolen eine mathematisch strukturierte Fehlererkennung und -korrektur ermöglicht, z. B.:

$$G(x) = x^2 + 3x + 2$$

Wichtig: Diese Division wird hier in einem speziellen Rechensystem für Bytes durchgeführt (vereinfacht gesagt: Beim "Addieren/Subtrahieren" gibt es keine Überträge; die Rechnung verhält sich bei manchen Schritten anders als in der normalen Dezimalrechnung). Für die Anwendung ist vor allem das Ergebnis entscheidend: Wir erhalten bei der Division D(x) : G(x)

$$(109x^2 + 97x^3 + 116x^4 + 104x^5 + 101x^6) : (x^2 + 3x + 2) = 202 + 209x + 234x^2 + 199x^3 + 101x^4$$

Polynomdivision mit Rest
Bei den bisherigen Polynomdivisionen die Sie selbst durchgeführt haben, war der Rest immer Null.

Die Rechnung geht nicht ganz auf, sodass ein Rest übrig bleibt (so wie bei 7 : 2 = 3 Rest 1):

$$R(x) = 252x + 137$$

Genau dieser Rest sind unsere Prüfwerte. Das bedeutet: Zu "mathe" werden (in dieser vereinfachten Darstellung) die beiden zusätzlichen Zahlen 252 und 137 angehängt, in Binär 11111100 und 10001001. Beim späteren Prüfen teilt man dann "Daten + Rest" erneut durch G(x). Wenn der QR-Code korrekt gelesen wurde, geht die Division ohne Rest auf; wenn Bits/Bytes beim Lesen verfälscht wurden, entsteht ein anderer Rest – und das ist das Signal, dass etwas nicht stimmt.

YouTube

Weitere Infos dazu gibt es unter dem links abgebildeten QR-Code.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.3 HORNER-SCHEMA

Situationsbeschreibung – Vernissage
Zur Eröffnung einer Kunstausstellung findet im Foyer eine Vernissage statt – so nennt man die feierliche Auftaktveranstaltung einer Ausstellung, bei der Gäste die Werke erstmals sehen und miteinander ins Gespräch kommen. Für diesen Anlass wird ein langes, geschwungenes Banner als Teil der Raumgestaltung an einer Wand montiert. Die Unterkante des Banners verläuft dabei nicht gerade, sondern folgt einer geplanten Kurve, damit die Form besonders dynamisch und "fließend" wirkt.

Zur Planung wird die Höhe y der Unterkante in Abhängigkeit von der horizontalen Position x modelliert (alle Angaben in Metern). Das Profil der Unterkante wird durch die Funktion $b(x) = -0{,}01x^4 + 0{,}04x^3 + 0{,}1x^2 - 0{,}28x + 0{,}15$ beschrieben.

Damit das Banner an bestimmten Stellen exakt auf Höhe der Bodenlinie endet bzw. diese berührt (z. B. an Übergängen oder an festgelegten Montagepunkten), müssen die Nullstellen der Funktion bestimmt werden: Dort gilt $b(x) = 0$. Zwei Nullstellen sind aus der Planung bereits bekannt (sie ergibt sich aus einem festen Befestigungspunkt mit $x = -3$ und $x = 1$).

Das Horner-Schema als Alternative zur Polynomdivision (ZcRfMU) ⓘ
Das Horner-Schema ist eine Alternative zur Polynomdivision für die Nullstellenberechnung. Genau wie bei der Polynomdivision gilt dabei: Eine Nullstelle muss gegeben sein. Das Horner-Schema arbeitet dabei nur mit den Koeffizienten der Funktion. Es ist dadurch meist schneller als die Polynomdivision, besonders bei höheren Graden oder Dezimalzahlen.

Durchführung des Horner-Schemas Ⓑ
Sei hier die Funktion aus Kapitel "5.2 Polynomdivision" aufgegriffen: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. Eine Nullstelle ist bereits mit $x = -3$ bekannt.

Beim Horner-Schema werden die Koeffizienten tabellenartig notiert, links wird die gegebene Nullstelle eingetragen und anschließend spaltenweise weitergerechnet. Die letzte Zahl rechts ist der Rest, alle vorherigen Zahlen ergeben die Koeffizienten des Quotientenpolynoms (das entspricht dem Ergebnis der Polynomdivision).
Für die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ werden nun die Koeffizienten in die erste Zeile eingetragen sowie die bereits ermittelte Nullstelle $x = -3$ in die erste Spalte. Der zweite Wert in der zweiten Zeile ist immer eine Null:

	1	**2**	**–5**	**–6**
x = –3	**0**			

Der Rest ist der y-Wert
Der letze Wert entspricht immer dem y-Wert am gegebenen x-Wert. Wenn der Rest Null ergibt, dann liegt eine Nullstelle vor. Wenn der Rest ungleich Null ist, gibt er den y-Wert an.

Merksatz
Nach unten addieren, nach rechts multiplizieren.

Die weiteren Tabellenwerte werden nun schrittweise im "Zick-Zack" berechnet. Im ersten Schritt werden die 1 und 0 addiert. Der daraus entstehende Wert 1 wird anschließend mit der Nullstelle multipliziert, also $1 \cdot (-3)$:

	1	**2**	**–5**	**–6**
x = –3	**0**	–3		
	1			

Nicht immer pq-Formel
In diesem Beispiel wird die pq-Formel angewendet, da das Quotientenpolynom den Grad 2 hat und es sich somit um eine quadratische Funktion handelt. Ergibt sich nach dem Horner-Schema ein Polynom anderen Grades, muss gegebenenfalls ein anderes Lösungsverfahren verwendet werden.

Diese beiden Rechenschritte werden so oft wiederholt, bis alle Felder ausgefüllt sind:

	1	**2**	**–5**	**–6**
x = –3	**0**	–3	3	6
	1	–1	–2	0

Die letzte Zahl ganz rechts ist der Rest; er muss 0 sein, wenn die verwendete Zahl tatsächlich eine Nullstelle ist (analog zur Polynomdivision). Die Koeffizienten in der letzten Zeile ergeben das Quotientenpolynom (analog zur Polynomdivision): $q(x) = x^2 - x - 2$.
Die übrigen Nullstellen werden anschließend z. B. mit der pq-Formel bestimmt. Insgesamt ergeben sich drei Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ und $x_3 = -3$.

Horner-Schema mit fehlenden Summanden

In dem folgenden Beispiel fehlen einige Terme, weil mehrere Koeffizienten Null sind (z. B. x^4, x^2 und das absolute Glied). Diese Werte werden in der Tabelle dann als Null notiert.
Für die Funktion $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ ergibt sich mit $x = 2$ als Nullstelle folgende Tabelle:

	1	**0**	**–5**	**0**	**4**	**0**
x = 2	**0**	2	4	–2	–4	0
	1	2	–1	–2	0	0

Damit ist das Quotientenpolynom $q(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$. Hier können die restlichen Nullstellen noch nicht mit der pq-Formel bestimmt werden. Das Horner-Schema müsste insgesamt noch zwei weitere male durchführen werden, wozu wiederum zwei weitere Nullstellen benötigt werden, um dann ein Polynom mit dem Grad 2 zu erhalten.

ⓘ

Minimalschreibweise des Horner-Schemas

Achtung
Bei der nebenstehenden Rechnung handelt es sich um das **Mindeste**, was Sie beim Horner-Schema notieren müssen!

Es müssen weder die Rechenschritte noch die Pfeile notiert werden. Es reichen die reinen Tabellenwerte.
Die Funktion $f(x) = -0{,}5x^3 + 0{,}25x^2 + 6{,}75x - 9$ mit der Nullstelle $x_1 = 1{,}5$ ergibt:

	–0,5	**0,25**	**6,75**	**–9**
x = 1,5	**0**	–0,75	–0,75	9
	–0,5	–0,5	6	0

Das Quotientenpolynom lautet somit: $q(x) = -0{,}5x^2 - 0{,}5x + 6$
Damit ergeben sich, neben $x_1 = 1{,}5$ als erste Nullstelle, mit Hilfe der pq-Formel die weiteren Nullstellen: $x_2 = 3$ und $x_3 = -4$

Lösungen
Anbei die Codes für die Lösungen der aufgeführten Aufgaben mit dem Horner-Schema:
5.15 – vCgkm4
5.16 – tfDGfT
5.19 – SjL129

Aufgabe 5.25 (siehe links)

Lösen Sie zu Übungszwecken die Aufgaben 5.15, 5.16 und 5.19 nochmals mit dem Horner-Schema. Welche Methode ist für Sie einfacher? Polynomdivision oder Horner-Schema?

◒

Aufgabe 5.26 (EV4Swt)

Bestimmen Sie alle weiteren Befestigungspunkte des geschwungenen Banners, also die Nullstellen der Funktion aus der Situationsbeschreibung.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.4 SUBSTITUTION

Situationsbeschreibung – Lichtinstallation
Für eine Lichtinstallation in der Eingangshalle soll ein großer, achsensymmetrischer Leuchtbogen entworfen werden. Damit die Form von beiden Seiten gleich wirkt, wird die Höhe y des Bogens in Abhängigkeit von der horizontalen Position x (in Metern) durch eine achsensymmetrische Funktion zur y-Achse beschrieben: $f(x) = -0{,}05x^4 + 0{,}8x^2 + 1{,}2$

Wann wird die Substitution angewendet? (9AbJYZ)
Die Substitution ist ein weiteres Verfahren zur Nullstellenberechnung. Um diese Rechenmethode anwenden zu können, muss die Funktionsgleichung eine bestimmte Struktur haben: Die auftretenden Exponenten müssen **Vielfache voneinander** sein (typisch: nur gerade Potenzen wie x^4 und x^2 oder nur Potenzen wie x^6 und x^3). Zusätzlich dürfen keine "störenden" Exponenten vorkommen, die nicht in dieses Muster passen.

Das heißt, eine Substitution ist z. B. für die Funktion $f(x) = 2x^4 - 20x^2 + 18$ möglich, da die Exponenten 4 und 2 Vielfache voneinander sind. Solche Funktionen treten im Unterricht besonders häufig auf, weshalb hier zunächst dieser Funktionstyp betrachtet wird.

ⓘ

Merksatz
Für die Substitution müssen die Exponenten einer Funktion vielfache voneinander sein.

Beispiel
Um die Nullstellen einer Funktion wie $f(x) = 2x^4 - 20x^2 + 18$ zu bestimmen, wird ausgenutzt, dass der Term x^2 mehrfach vorkommt, denn es gilt $x^4 = x^2 \cdot x^2$. Bei der Substitution wird daher x^2 durch z ersetzt/substituiert (mit $x^2 = z$ gilt $x^4 = x^2 \cdot x^2 = z \cdot z = z^2$):

$f(x) = 2x^4 - 20x^2 + 18 \quad | \, x^2 = z$ (Substitution)
$f(z) = 2z^2 - 20z + 18$

Damit entsteht eine quadratische Gleichung, die mit bereits bekannten Verfahren gelöst werden kann (z. B. der pq-Formel). Mit $f(z) = 0$ ergibt dies:

$0 = 2z^2 - 20z + 18 \quad | :2$
$0 = z^2 - 10z + 9 \quad |$ pq-Formel
$z_{1/2} = 5 \pm \sqrt{5^2 - 9}$
$z_1 = 9 \;\vee\; z_2 = 1$

Damit sind zunächst die beiden z-Werte bestimmt. Für die ursprüngliche Aufgabe werden jedoch die x-Werte benötigt. Dazu wird die Rücksubstitution verwendet. Da bei der Substitution $x^2 = z$ gesetzt wurde, gilt bei der Rücksubstitution: $x = \sqrt{z}$. Dies ergibt:

$z_1 = 9 \quad | \, x = \sqrt{z}$
$x_{1/2} = \sqrt{9}$
$\mathbf{x_1 = 3 \;\vee\; x_2 = -3}$

$z_2 = 1 \quad | \, x = \sqrt{z}$
$x_{3/4} = \sqrt{1}$
$\mathbf{x_3 = 1 \;\vee\; x_4 = -1}$

Die Funktion f(x) hat demnach vier Nullstellen: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$ und $x_4 = -1$

Ⓑ

Substitution anpassen
Für eine Funktion mit Exponenten wie x^3 und x^6, ergibt sich eine Substitution von $x^3 = z$ und eine Rücksubstitution von $x = \sqrt[3]{z}$.

Achtung
Bei der nebenstehenden Rechnung handelt es sich um das **Mindeste**, was Sie bei der Substitution notieren müssen!

Minimalschreibweise der Substitution

Für die Funktion $f(x) = 2x^4 - 40x^2 + 128$ reicht für die Substitution folgende Notation:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^4 - 40x^2 + 128 && | :2 \\ &= x^4 - 20x^2 + 64 && | \, x^2 = z \\ &= z^2 - 20z + 64 && | \text{ pq-Formel} \\ z_{1/2} &= 10 \pm \sqrt{10^2 - 64} \\ z_1 &= 16 \quad \vee \quad z_2 = 4 && | \, x = \sqrt{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 \quad \vee \quad x_2 = -4 \quad \vee \quad x_3 = 2 \quad \vee \quad x_4 = -2$$

Aufgabe 5.27 (XUyVuV)

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen mithilfe der Substitution.

a) $f(x) = -2x^4 + 34x^2 - 32$
b) $f(x) = -3x^4 - 60x^2 + 1728$
c) $f(x) = -6x^4 - 30x^2 - 24$
d) $f(x) = -2x^4 + 80x^2 - 288$
e) $f(x) = 5x^4 + 130x^2 + 125$
f) $f(x) = -x^4 + 17x^2 - 16$
g) $f(x) = 2x^4 - 64x^2 - 288$
h) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
i) $f(x) = -x^4 - 90x^2 - 648$

Aufgabe 5.28 (DAswiG)

Geben Sie die folgenden Funktionen in Faktorschreibweise an.

a) $f(x) = 2x^4 - 40x^2 + 128$
b) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{101}{16}x^2 + \frac{25}{16}$
c) $g(x) = 0{,}5x^4 - 5x^2 + 4{,}5$
d) $j(x) = \frac{1}{8}x^4 - 5x^2 + 18$
e) $k(x) = -0{,}5x^4 + 29x^2 - 220{,}5$
f) $m(x) = x^4 - \frac{281}{4}x^2 + 400$
g) $n(x) = 0{,}25x^4 - 24{,}25x^2 + 324$
h) $o(x) = x^6 - 7x^3 + 6$

Aufgabe 5.29 (4syX8p)



Durch vulkanische Prozesse sind in der Karibik im Laufe vieler Jahrhunderte zwei neue Inseln entstanden. Ihr Höhenprofil ober- und unterhalb des Meeresspiegels lässt sich näherungsweise durch die Funktion $f(x) = -\frac{1}{50}x^4 + \frac{9}{40}x^2 - \frac{81}{200}$ beschreiben. Dabei steht x für die horizontale Entfernung (in 100 m) und f(x) für die Höhe relativ zum Meeresspiegel (in 100 m). Bestimmen Sie die zurückzulegende Strecke, die ein Schwimmer von der einen zur anderen Insel schwimmen müsste.

Aufgabe 5.30 (z6S44x)

Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung zur Lichtinstallation. Bestimmen Sie die Gesamtbreite des Leuchtbogens, also die horizontale Spannweite zwischen den beiden Bodenpunkten, an denen der Bogen den Boden berührt.

Aufgabe 5.31 (6n5iYL)

In einer Spritzgussfertigung für Kunststoff-Clips (Automobil-Innenraum) wird die Ausschussquote stark von der Presskraftstufe abhängig. Für eine kurze Testreihe wird eine Kennzahl Q(x) definiert:

- $Q(x) > 0$: mehr Gutteile als Ausschuss (Produktion lohnt sich)
- $Q(x) = 0$: genau "ausgeglichen" (Grenzfall)
- $Q(x) < 0$: mehr Ausschuss als Gutteile (Produktion lohnt sich nicht)

Dabei ist x die Presskraftstufe (dimensionslos) im Bereich $0 \le x \le 4$. Das Verhalten wird modellhaft beschrieben durch: $Q(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

a) Bestimmen Sie die Presskraftstufen x im Bereich $0 \le x \le 4$, bei denen $Q(x) = 0$. Nutzen Sie dabei die Substitution $z = x^2$.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion Q(x) für $0 \le x \le 4$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Markieren Sie dabei die Nullstellen aus a) und beschriften Sie die Achsen sinnvoll.
c) Leiten Sie aus Ihrem Graphen (und/oder aus den Ergebnissen aus a)) ab, in welchen Presskraftstufen-Bereichen die Produktion im Modell sinnvoll ist ($Q(x) > 0$).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.5 FAKTORISIEREN

Situationsbeschreibung – Social-Media-Kampagne
In einer Werbeagentur wird für eine Social-Media-Kampagne die effektive Reichweite R(x) modelliert. Dabei steht x für die Intensität des Werbebudgets (in passenden Einheiten). "Effektiv" bedeutet: Es zählt nur die Reichweite, die wirklich bei der Zielgruppe ankommt – Streuverluste und Übersättigung sind also schon mitgedacht.
Für x = 0 wird nichts geschaltet, daher ist die effektive Reichweite selbstverständlich 0. Außerdem gibt es Budgetbereiche, in denen Anzeigen zwar laufen, aber kaum noch echte Zielgruppen-Reichweite erzeugen (z. B. weil die Zielgruppe bereits vollständig erreicht ist oder der Algorithmus nur noch dieselben Personen wiederholt ausspielt). Genau solche Schwellen lassen sich über Nullstellen erkennen.

Die Werbeagentur beschreibt die effektive Zielgruppen-Reichweite R(x) in Abhängigkeit vom Werbebudget x (in GE – Geldeinheiten) durch die Funktion $R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Wann wird die Faktorisierung angewendet? (abG6HD) ⓘ
Faktorisieren ist ein Verfahren, das bei der Bestimmung von Nullstellen häufig eine entscheidende Vereinfachung ermöglicht. Inhaltlich geht es dabei darum, einen Term so umzuformen, dass er als Produkt von Faktoren geschrieben werden kann. Im hier verwendeten Sinn bedeutet "Faktorisieren" vor allem das Ausklammern eines gemeinsamen Faktors.

Ausklammern ist immer dann möglich, wenn alle Summanden einen gemeinsamen Bestandteil besitzen (z. B. x, x^2 oder auch einen Zahlenfaktor). Durch das Ausklammern entsteht eine Produktdarstellung, die anschließend mit dem Satz vom Nullprodukt ausgewertet werden kann: Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer seiner Faktoren null ist (siehe Kapitel 5.2 "Polynomdivision").

Dieses Vorgehen taucht bereits in Kapitel 4.4 "Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen" im Abschnitt "Nullstellen von gemischt-quadratischen Gleichungen" auf. Dort wird ebenfalls ein gemeinsamer Faktor ausgeklammert, um die Nullstellen leichter bestimmen zu können.

Beispiel Ⓑ
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$.

Da in jedem Summanden ein x vorkommt, kann x ausgeklammert werden:
$f(x) = x(x^2 + 2x - 3)$

Für die Nullstellen gilt:
$f(x) = 0$
$x(x^2 + 2x - 3) = 0$

Nach dem Satz vom Nullprodukt folgt:
$\mathbf{x_1 = 0}$ oder $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Die quadratische Gleichung kann z. B. mit der pq-Formel gelöst werden:
$x_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1^2 + 3} = -1 \pm 2$

Damit ergeben sich die Nullstellen:
$\mathbf{x_1 = 0}$, $\mathbf{x_2 = -3}$, $\mathbf{x_3 = 1}$.

Beim Faktorisieren tritt häufig eine Nullstelle x = 0 auf, da ein x ausgeklammert wird. Das ist jedoch kein Muss: Je nach Funktion kann auch ein anderer gemeinsamer Faktor ausgeklammert werden (z. B. x^2 oder ein Zahlenfaktor). Für den verbleibenden Klammerterm muss anschließend passend entschieden werden, welches Lösungsverfahren geeignet ist — etwa pq-Formel, Substitution oder (bei höheren Graden) Polynomdivision bzw. Horner-Schema.

ⓘ **Minimalschreibweise der Faktorisierung**

Achtung
Bei der nebenstehenden Rechnung handelt es sich um das **Mindeste**, was Sie bei der Faktorisierung notieren müssen!

Die Faktorschreibweise kann auch sehr kompakt notiert werden. Die Berechnung der Nullstellen sieht für die Funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 - 6x$ dann beispielsweise folgendermaßen aus:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 0 \\
&0 = 2x^3 - x^2 - 6x && \mid \text{Faktorisieren} \\
&= \underbrace{x}_{=0}\,\underbrace{(2x^2 - x - 6)}_{=0} \\
&\mathbf{x_1 = 0} \ \vee \ 2x^2 - x - 6 = 0 && \mid :2 \\
&\qquad\quad x^2 - 0{,}5x - 3 = 0 \\
&\qquad\quad x_{2/3} = 0{,}25 \pm \sqrt{0{,}25^2 + 3} \\
&\qquad\quad \mathbf{x_2 = 2} \ \vee \ \mathbf{x_3 = -1{,}5}
\end{aligned}
$$

○ **Aufgabe 5.32 (x2eXLL)**
Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 12x$
b) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 5x$
c) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 9x$
d) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 6x$
e) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$
f) $f(x) = x^3 - 9x$
g) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
h) $f(x) = x^3 + 0{,}5x^2 - 5x$
i) $f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}75x^2 - 2x$

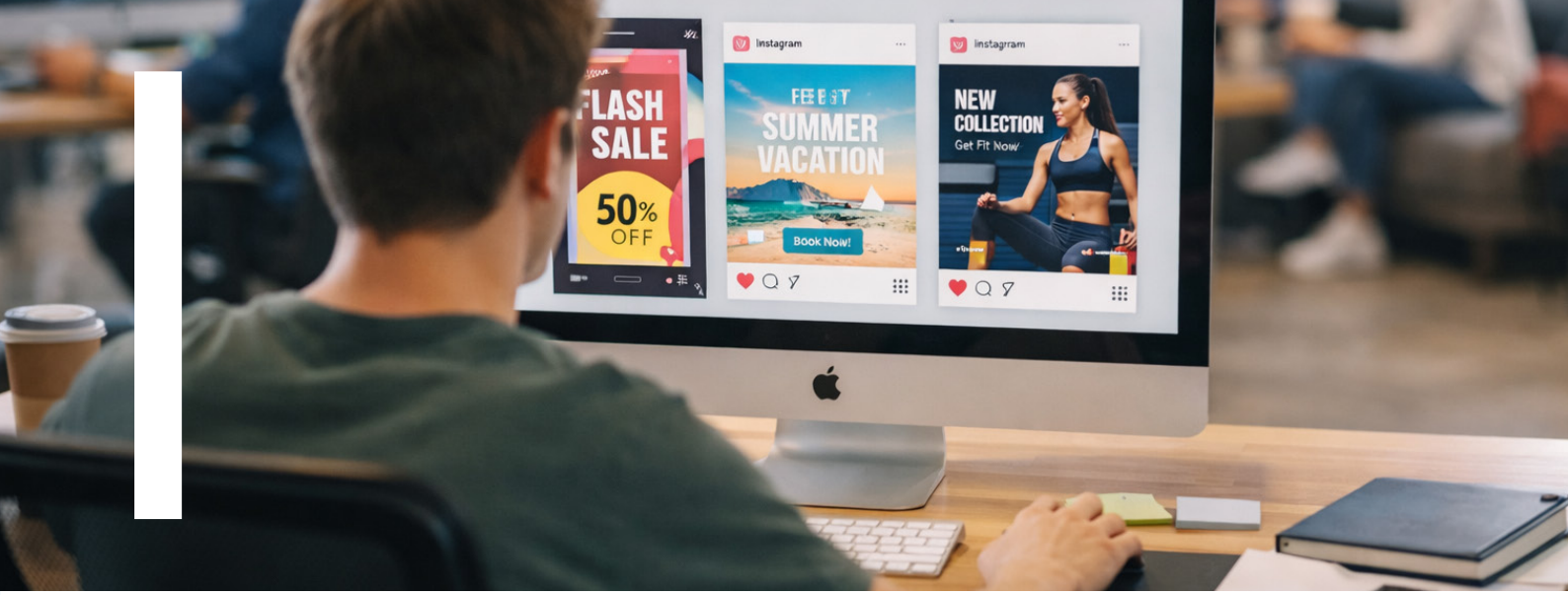
◒ **Aufgabe 5.33 (jVtwax)**
Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x$
b) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$
c) $f(x) = x^5 - \frac{73}{4}x^3 + 36x$
d) $f(x) = x^5 - 3x^4 - 13x^3 + 15x^2$
e) $f(x) = x^5 - 29x^3 + 100x$
f) $f(x) = x^5 - 5{,}7x^4 - 2{,}5x^3 + 19{,}8x^2$

◒ **Aufgabe 5.34 (mfxQ3z)**
In der Situationsbeschreibung wird ein Schwellwert erwähnt: Ab einem bestimmten Budget ist die Zielgruppe praktisch vollständig erreicht – zusätzliche Ausspielungen führen dann nicht mehr zu zusätzlicher effektiver Reichweite.
Bestimmen Sie den Schwellwert, indem Sie die ermitteln, ab welchem Budget die Reichweite wieder den Wert null erreicht. Geben Sie diese Budget-Schwelle in GE an.

● **Aufgabe 5.35 (9P8xEw)**
Ein Online-Shop plant eine zeitlich begrenzte Rabattaktion. Der Gewinn G(x) (in GE) hängt von der Rabattstufe x ab. Dabei beschreibt x eine intern genutzte Kennzahl für die Rabattintensität (z. B. in 5%-Schritten). Für bestimmte Rabattstufen ist der Gewinn genau 0.
Der Gewinn wird modelliert durch dei Funktion $G(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$.
Interpretieren Sie die Nullstellen im Sachzusammenhang: Welche Rabattstufen führen zu einem Gewinn von 0 GE?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.6 ÜBUNGEN ZUR NULLSTELLENBERECHNUNG

Situationsbeschreibung – A/B-Tests
In einer jungen, modernen Werbeagentur werden für eine Social-Media-Kampagne mehrere Varianten parallel entwickelt. Ziel ist es, die Variante zu finden, die bei der Zielgruppe am besten funktioniert. Für jede Version wird die effektive Zielgruppen-Wirkung W(x) (z. B. Netto-Reichweite) in Abhängigkeit von einer Steuergröße x modelliert (z. B. Budgetstufe).

Solche parallelen Tests werden im Marketing häufig als A/B-Tests bezeichnet: Dabei werden zwei (oder mehr) Varianten einer Anzeige, Landingpage oder Kampagnenidee zeitgleich ausgespielt und anschließend anhand messbarer Kennzahlen verglichen. Streng genommen ist "A/B" der Vergleich von genau zwei Varianten; in der Praxis werden jedoch oft mehrere Varianten gleichzeitig getestet (A/B/n-Test). Die zugrunde liegende Idee bleibt gleich: Unterschiede in der Wirkung sollen datenbasiert sichtbar gemacht werden.

Eine Nullstelle einer Wirkungsfunktion bedeutet in diesem Kontext: Für diesen Wert von x ist die effektive Wirkung gleich 0. Solche Punkte sind wichtig, weil sie kritische Schwellenwerte markieren – also Werte, bei denen eine Kampagne weder Nutzen bringt (oder gerade "kippt") und daher angepasst oder neu bewertet werden sollte.

Für die vier Kampagnenversionen gelten folgende Modelle:
$A(x) = x^2 - 6x + 8$ $\quad C(x) = 2x^3 - x^2 - 6x$
$B(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ $\quad D(x) = 0{,}5x^4 - 5x^2 + 4{,}5$

Kombination von Lösungsverfahren ⓘ
Nun müssen unterschiedliche Lösungsverfahren zur Nullstellenbestimmung miteinander kombiniert bzw. nacheinander ausgeführt werden. Zunächst ist zu überlegen, mit welchem Verfahren sinnvoll begonnen werden kann. Welche Schritte anschließend folgen, hängt vom jeweiligen Zwischenergebnis ab. Ziel ist es, durch eine geeignete Vorgehensweise am Ende alle Nullstellen bestimmen zu können.

Aufgabe 5.36 (tTLQHq) ○
Notieren Sie, mit welchem Lösungsverfahren Sie jeweils beginnen können:

a) Bei $f(x) = x^4 - 8x^2 + 15$ beginnen Sie mit der _____

b) Bei $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ beginnen Sie mit der/dem _____

c) Bei $f(x) = x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 15x^2$ beginnen Sie mit der _____

d) Bei $f(x) = x^2 - 13x + 12$ beginnen Sie mit der _____

○ **Aufgabe 5.37 (BY3A2B)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

a) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass $x = 3$ eine Nullstelle ist.
b) Führen Sie das Horner-Schema mit $x = 3$ durch.
c) Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen des Quotientenpolynoms.

○ **Aufgabe 5.38 (zCGQee)**

Gegeben ist die Funktion $g(x) = 2x^3 + 2x^2 - 5{,}5x - 3$

a) Prüfen Sie, ob $x = -2$ eine Nullstelle ist.
b) Führen Sie die Polynomdivision durch $(x + 2)$ durch.
c) Zerlegen Sie das Restpolynom weiter und bestimmen Sie alle Nullstellen.

◒ **Aufgabe 5.39 (Z3yc9N)**

Gegeben ist die Funktion $h(x) = x^6 - 7x^3 + 6$

a) Führen Sie die Substitution $z = x^3$ durch und lösen Sie die entstehende Gleichung.
b) Bestimmen Sie daraus alle Nullstellen von h(x).
c) Erläutern Sie, warum aus den beiden Lösungen der Gleichung in z (bei der Substitution $z = x^3$) nur zwei Nullstellen entstehen – und nicht vier wie oft bei der Substitution $z = x^2$.

○ **Aufgabe 5.40 (HUifsh)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^4 - 12x^3 - 15x^2$

a) Faktorisieren Sie den Funktionsterm so weit wie möglich.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen.
c) Geben Sie an, welche Nullstellen mehrfach vorkommen.

◒ **Aufgabe 5.41 (cjb9Lz)**

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^2 - 4x - 12$
b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$
d) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$
e) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
f) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2$
g) $f(x) = x^4 - 15x^2 - 10x + 24$
h) $f(x) = x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 27x^2 + 10x - 24$
i) $f(x) = x^5 - 13x^3 + 36x$
j) $f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$

◒ **Aufgabe 5.42 (AzMSsz)**

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^5 - 4{,}25x^3 + x$
b) $f(x) = x^2 - 0{,}75x - 6{,}75$
c) $f(x) = x^5 - 1{,}5x^4 + 0{,}5x^3$
d) $f(x) = x^3 - x^2 - 3{,}75x + 4{,}5$
e) $f(x) = x^4 + 0{,}5x^3 - 7{,}5x^2$
f) $f(x) = x^2 + 2{,}5x - 6$
g) $f(x) = x^3 - 3{,}5x^2 - 1{,}5x + 9$
h) $f(x) = x^4 - 11{,}25x^2 + 20{,}25$
i) $f(x) = x^6 - 11{,}25x^4 + 20{,}25x^2$
j) $f(x) = x^3 - 5{,}5x^2 + 3{,}5x + 10$

◒ **Aufgabe 5.43 (Bkenx7)**

Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 5x^2 + 8x - 21$
b) $f(x) = 3x^3 - 13x^2 - 18x + 40$
c) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3$
d) $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18$
e) $f(x) = 2x^5 - 62{,}5x^3 + 312{,}5x$
f) $f(x) = 5x^3 - 12x^2 - 23x + 42$
g) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{29}{4}x^2 + \frac{441}{32}$
h) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{25}x^2 - \frac{108}{125}x$
i) $f(x) = -3x^5 + \frac{4803}{100}x^3 - \frac{12}{25}x$
j) $f(x) = 2x^3 + \frac{71}{5}x^2 + \frac{94}{25}x - \frac{832}{25}$

◒ **Aufgabe 5.44 (XxAFTw)**

Bestimmen Sie für jede Kampagnenversion aus der Situationsbeschreibung die Werte der Steuergröße x, bei denen die Zielgruppenwirkung W(x) gleich 0 ist. Erläutern Sie anschließend kurz die Bedeutung dieser Werte im Kampagnenkontext (z. B. als Budget-/Intensitätsstufen ohne effektive Wirkung).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.7 MITTLERE ÄNDERUNGSRATE

Situationsbeschreibung – Logistikzentrum
In einem Logistikzentrum werden an einem typischen Werktag mehrere LKW nacheinander entladen. Die Pakete gelangen anschließend über eine Förderanlage in verschiedene Sortierbereiche. Damit es weder zu Staus auf dem Band noch zu Leerlauf in der Sortierung kommt, wird die Leistung der Anlage fortlaufend erfasst. Dazu wird in regelmäßigen Abständen gemessen, wie viele Pakete seit Schichtbeginn insgesamt verarbeitet wurden. Diese kumulierte Anzahl hängt stark von der Tageszeit ab: Morgens trifft häufig eine erste Anlieferwelle ein, später folgen weitere Lieferungen, und um die Mittagszeit können Pausen oder Schichtwechsel die Abläufe verlangsamen. Am Nachmittag steigt die Menge oft noch einmal deutlich an, bevor sie zum Schichtende wieder abflacht.

Um diese Entwicklung übersichtlich auszuwerten, wird die bisher verarbeitete Gesamtmenge als Funktion P(t) modelliert. Dabei bezeichnet t die Uhrzeit (in Stunden) und P(t) die kumulierte Anzahl der bis dahin verarbeiteten Pakete.

Für einen konkreten Werktag wurden folgende Messwerte aufgenommen:

Uhrzeit t	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00
Pakete P	0	420	1200	2250	3230	4350	5590	6490	7450	8630

Auf dieser Grundlage lassen sich später Zeitintervalle miteinander vergleichen und Entscheidungen z. B. zur Personalplanung und Zuführung der LKW besser begründen.

Der Differenzenquotient (N1nurz)
Der Differenzenquotient ist im Grunde keine völlig neue Rechnung, sondern nur ein neuer Begriff für etwas, das bereits bekannt ist. Aus Kapitel 3.2 "Steigung mit dem Steigungsdreieck bestimmen" stammt die Steigungsformel

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Diese Formel kann auch mit Funktionswerten geschrieben werden:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Bei einer Geraden liefert diese Rechnung die "normale" Steigung, weil die Gerade überall gleich steil ist. Bei einer Parabel oder allgemein bei gekrümmten Graphen ist die Steigung jedoch nicht an jeder Stelle gleich. Wird die Rechnung trotzdem für zwei x-Werte durchgeführt, entsteht eine **mittlere Änderungsrate** zwischen diesen beiden Stellen. Diese mittlere Änderungsrate wird im Alltag oft **durchschnittliche Steigung** genannt; der mathematische Name dafür ist **Differenzenquotient**.

ⓘ

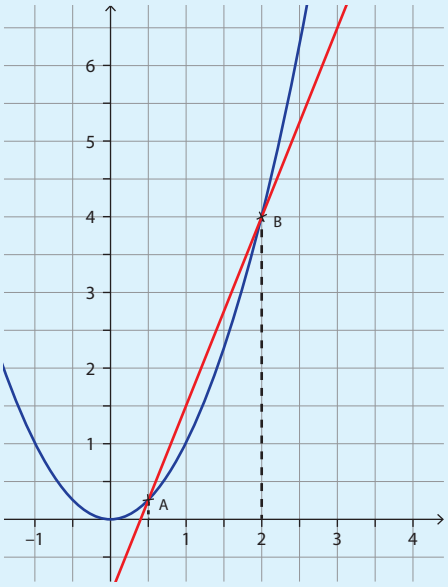
Das Ergebnis einer Subtraktion wird als *Differenz* und das Ergebnis einer Division als *Quotient* bezeichnet. Da hier in Zähler und Nenner Differenzen gebildet und diese dann dividiert werden, nennen Sie dies den **Differenzenquotienten**.

Die Begriffe "durchschnittliche Steigung", "mittlere Änderungsrate" und "Differenzenquotient" werden in diesem Zusammenhang gleichbedeutend verwendet.

Ⓑ **Beispiel**

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = x^2$. Gesucht ist beispielsweise die mittlere Änderungsrate im Intervall [0,5; 2], also zwischen den Stellen $x = 0{,}5$ und $x = 2$. Dazu werden die Funktionswerte $f(0{,}5)$ und $f(2)$ in den Differenzenquotienten eingesetzt.

$$m = \frac{f(2) - f(0{,}5)}{2 - 0{,}5} = \frac{2^2 - 0{,}5^2}{2 - 0{,}5} = \frac{4 - 0{,}25}{2 - 0{,}5} = \frac{3{,}75}{1{,}5} = \mathbf{2{,}5}$$



Damit hat die Parabel im betrachteten Intervall eine durchschnittliche Steigung von $m = 2{,}5$. Der Graph ist zwar an manchen Stellen steiler und an anderen flacher, aber insgesamt ergibt sich über das Intervall dieser Mittelwert.

Sofern eine Funktionsgleichung gegeben ist, werden zur Berechnung lediglich die beiden x-Werte benötigt; die passenden Funktionswerte werden dann mit $f(x_1)$ und $f(x_2)$ berechnet. Ist keine Funktionsgleichung vorhanden, reichen zwei Punkte $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ aus, um mit derselben Formel zu arbeiten.

○ **Aufgabe 5.45 (riaeZh)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.

a) Berechnen Sie den Differenzenquotienten für die Intervalle [0; 1], [−1,5; 2] und [−1; 1].

b) Veranschaulichen Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe a), indem Sie den Graphen der Funktion in ein Koordinatensystem einzeichnen und zusätzlich jeweils die zugehörige Sekante (Gerade durch die Intervall-Endpunkte) eintragen.

◒ **Aufgabe 5.46 (fDVspm)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Berechnen Sie den Differenzenquotienten für die Intervalle [−2; 0], [−2; 1] und [−3; 2].

◒ **Aufgabe 5.47 (cm4gWV)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -0{,}5x^2 + 6x + 2$.

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von f im Intervall [1; 5].

b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [5; 9].

c) Vergleichen Sie beide Werte. Was lässt sich über die Veränderung der Steigung in den beiden Intervallen sagen?

d) Bestimmen Sie das Intervall der Länge 2, in dem die mittlere Änderungsrate genau 0 ist.

○ **Aufgabe 5.48 (JvMhuw)**

Chemische Reaktionen können mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ablaufen. Wird beispielsweise Zink in Salzsäure eingebracht, entsteht Wasserstoff. Die folgende Tabelle zeigt die Wasserstoffmenge in Abhängigkeit von der Zeit:

Zeit (in min)	2	4	6	8	10	12
Menge Wasserstoff (in ml)	12	25	38	50	60	67

a) Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Zeit und Wasserstoffmenge als Kurve in einem Koordinatensystem dar.

b) Beschreiben Sie, wie sich die Zunahme der Wasserstoffmenge im Verlauf der Zeit verändert.

c) Berechnen Sie die mittleren Änderungsraten in den Intervallen [2; 4], [4; 8] und [8; 12].

d) Formulieren Sie zu jedem Intervall einen kurzen Antwortsatz (inklusive Einheit).

e) Prüfen Sie, ob die berechneten Ergebnisse die Aussage aus Teilaufgabe b) bestätigen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.49 (wEVMed)

Bei einer E-Bike-Tour wird die verbleibende Akku-Kapazität A(t) in Prozent gemessen. t ist die Fahrzeit in Stunden.

Fahrzeit t (h)	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
Akku A(t) (%)	100	92	81	69	55	44	38

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von A(t) in den Intervallen [0,0; 1,0], [1,0; 2,0] und [2,0; 3,0] und geben Sie die Einheiten an.
b) Interpretieren Sie das Vorzeichen der mittleren Änderungsraten im Kontext.
c) In welchem Intervall wurde der Akku im Durchschnitt am stärksten verbraucht? Nennen Sie eine plausible Erklärung.
d) Bestimmen Sie mithilfe einer linearen Näherung aus dem Intervall [2,0; 3,0], nach welcher Fahrzeit der Akku voraussichtlich 20 % erreicht.
e) Stellen Sie die Tabellenwerte in einem Koordinatensystem dar und prüfen Sie hier Ihre Berechnung aus Aufgabenteil d) nun grafisch.

Aufgabe 5.50 (gnB47j)

Die Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland zwischen 1960 und 2025. Soll daraus ein "durchschnittliches" Wachstum abgeleitet werden, hängt das Ergebnis stark davon ab, welcher Zeitraum betrachtet wird. Je nach gewähltem Abschnitt kann der Eindruck entstehen, die Bevölkerung wachse deutlich, stagniere oder gehe sogar zurück. Genau diese Wirkung wird in Medien und Berichten häufig bewusst genutzt.

a) Berechnen Sie für die folgenden Zeiträume, um wie viel die Bevölkerung in Deutschland pro Jahr durchschnittlich wächst bzw. sinkt (mittlere Änderungsrate):
   1.) zwischen den Jahren 1960 und 2005.
   2.) zwischen den Jahren 2000 und 2010.
   3.) zwischen den Jahren 2005 und 2025.
b) Eine Zeitung möchte einen kurzen, prägnanten Titel für die Titelseite formulieren. Je nachdem, ob der Artikel eher optimistisch oder eher kritisch wirken soll, könnte eine andere der oben berechneten Änderungsraten gewählt werden. Formulieren Sie zu jedem der drei Zeiträume eine mögliche Schlagzeile im Stil der BILD-Zeitung. (Beispielstil: "DEUTSCHLAND WÄCHST WIEDER!" / "SCHRUMPFT UNSER LAND?")
c) Stellen Sie die Bevölkerungsentwicklung in einem Diagramm dar. Wählen Sie dafür eine sinnvolle Skalierung und Achseneinteilung (x-Achse: Jahr, y-Achse: Einwohnerzahl).

Jahr	**Anzahl**
1960	73,1 Mio.
1980	78,4 Mio.
1990	79,8 Mio.
2000	82,3 Mio.
2005	82,4 Mio.
2010	81,8 Mio.
2015	82,2 Mio.
2018	83,0 Mio.
2020	83,2 Mio.
2022	83,1 Mio.
2024	83,6 Mio.
2025	83,5 Mio.

Aufgabe 5.51 (cZuqxu)

Die Höhe einer Kressepflanze wurde über mehrere Tage hinweg gemessen. Die Messwerte sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Zeit (in d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Höhe (in mm)	0	2	8	18	30	40	48	52	55

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Pflanzenhöhe (inklusive Einheit)
   1.) für den gesamten Beobachtungszeitraum,
   2.) für die ersten drei Tage,
   3.) für die mittleren drei Tage,
   4.) für die letzten drei Tage.
b) Vergleichen Sie die Ergebnisse und ziehen Sie eine Schlussfolgerung: Was sagen die unterschiedlichen mittleren Änderungsraten über die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze in den jeweiligen Zeitabschnitten aus?
c) Stellen Sie die Tabellenwerte in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

◒ **Aufgabe 5.52 (rueNrw)**

Eine Photovoltaikanlage speist im Laufe des Tages Energie ins Netz ein. Die kumulierte erzeugte Energie E(t) (in kWh) wird für t Stunden nach Sonnenaufgang modelliert durch:
$E(t) = 0{,}4t^3 - 3t^2 + 12t \quad (0 \le t \le 10)$

a) Bestimmen Sie die durchschnittliche Energiezunahme pro Stunde im Zeitraum [2; 6].
b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Zeitraum [6; 10].
c) Welche Aussage ist passend: "Am Vormittag steigt die Gesamtenergie schneller" oder "Am Nachmittag steigt sie schneller"? Begründen Sie mit den Ergebnissen aus a) und b).
d) Zeichnen Sie die gegebene Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.
e) Bestimmen Sie einen Zeitraum der Länge 2 Stunden, in dem die mittlere Änderungsrate möglichst groß ist (Schätzwert genügt).

◒ **Aufgabe 5.53 (ddswER)**

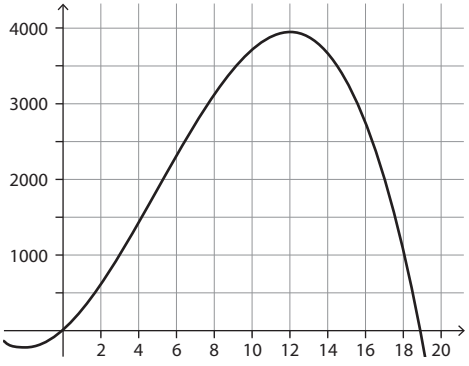
Beziehen Sie sich für die folgenden Teilaufgaben auf die Situationsbeschreibung.

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von P(t) in den Intervallen [08:00; 10:00], [10:00; 13:00] und [14:00; 17:00]. Geben Sie die Einheit an.
b) Formulieren Sie zu jedem Intervall einen kurzen Antwortsatz (z. B. "Im Zeitraum … wurden durchschnittlich … Pakete pro Stunde verarbeitet.").
c) In welchem der drei Intervalle war die durchschnittliche Verarbeitungsgeschwindigkeit am höchsten? Begründen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse.
d) Stellen Sie die Messwerte als Kurve in einem Koordinatensystem dar (x-Achse: Uhrzeit t, y-Achse: kumulierte Pakete P(t)).

◒ **Aufgabe 5.54 (TSndV6)**

Aus dem Graphen ist die kumulierte Besucherzahl B(t) eines Freizeitparks seit Öffnung ablesbar (t in Stunden).

a) Lesen Sie B(2), B(6) und B(10) so gut wie möglich ab.
b) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate in den Intervallen [2; 6] und [6; 10].
c) In welchem Intervall ist der durchschnittliche Zulauf größer? Formulieren Sie einen kurzen Antwortsatz im Sachzusammenhang.
d) Bestimmen Sie ein Intervall der Länge 2 Stunden, in dem die mittlere Änderungsrate besonders groß ist (Schätzwert genügt).



◒ **Aufgabe 5.55 (cL3CwW)**

Ein Lieferfahrer fährt zum Kunden. Die insgesamt zurückgelegte Strecke s(t) (in km) hängt von der Fahrzeit t (in min) ab: $s(t) = 0{,}02t^2 + 0{,}3t \quad (0 \le t \le 30)$

a) Ermitteln Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitraum [0; 10].
b) Bestimmen Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitraum [10; 25].
c) Ein Kollege behauptet: "Zwischen Minute 10 und 25 fährt er im Durchschnitt schneller als am Anfang." Überprüfen Sie diese Aussage mit Hilfe der Ergebnisse aus a) und b).
d) Für welchen Zeitpunkt t gilt: Die mittlere Änderungsrate im Intervall [t; t+5] beträgt 0,8 km/min?

○ **Aufgabe 5.56 (R9pmFJ)**

An einer E-Ladesäule wird die seit Beginn des Ladevorgangs geladene Energie E(t) (in kWh) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) modelliert durch: $E(t) = 0{,}04t^2 + 0{,}6t \quad (0 \le t \le 30)$

a) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Zeitraum [5; 20] und geben Sie die entsprechende Einheit an.
b) Zeichnen Sie die Funktion in ein geeignetes Koordinatensystem.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

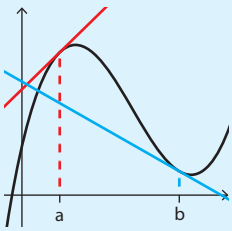


5.8 LOKALE ÄNDERUNGSRATE

Situationsbeschreibung – Bremsvorgang
In einem Auto wird beim Bremsen deutlich, dass sich die Geschwindigkeit nicht gleichmäßig verändert. Je nach Untergrund, Bremsdruck und Assistenzsystemen (z. B. ABS) kann die Verzögerung zu Beginn stärker sein und später etwas nachlassen – oder umgekehrt. Für viele Fragestellungen reicht es deshalb nicht aus zu wissen, wie stark die Geschwindigkeit im Durchschnitt innerhalb eines Zeitintervalls sinkt. Entscheidend ist häufig, wie stark sie in genau diesem Moment abnimmt.
Als Modell für eine Bremsung aus etwa 50 km/h (≈ 13,9 m/s) kann die Geschwindigkeit v(t) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) zum Beispiel durch folgende Funktion beschrieben werden: $v(t) = 13{,}9 - 5t - 0{,}5t^2 \quad (0 \le t \le 2{,}4)$

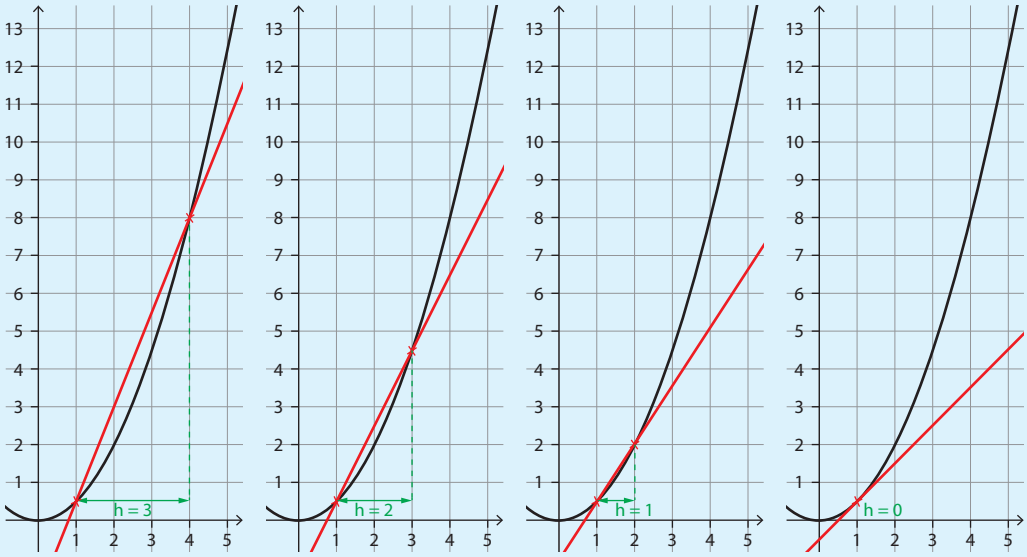
Dabei ist v(t) in m/s angegeben. Das Modell beschreibt eine Bremsung, bei der die Geschwindigkeit kontinuierlich abnimmt und das Fahrzeug nach rund 2,4 s zum Stillstand kommt. Für die Beurteilung der Bremswirkung ist nun besonders interessant, wie groß die Geschwindigkeitsänderung zu einem bestimmten Zeitpunkt ist (z. B. bei t = 1 oder t = 2). Genau diese Momentbetrachtung führt zur lokalen Änderungsrate.

Mittlere vs. lokale Änderungsrate
Im letzten Kapitel wurde die mittlere Änderungsrate eingeführt. Sie beschreibt stets einen durchschnittlichen Wert über ein Intervall, zum Beispiel das durchschnittliche Bevölkerungswachstum pro Jahr oder die durchschnittliche Temperaturabnahme eines Getränks. Mathematisch entspricht die mittlere Änderungsrate der Steigung zwischen zwei Punkten. Je nach Fragestellung ist jedoch nicht der Durchschnitt zwischen zwei Zeitpunkten entscheidend, sondern die Veränderung in einem bestimmten Moment. Dann geht es um die lokale Änderungsrate: Wie schnell steigt oder fällt eine Größe genau an einer Stelle? Anschaulich entspricht das der Steigung der Tangente in diesem Punkt.
Solche Momentbetrachtungen spielen in vielen Anwendungen eine Rolle: Eine Fließgeschwindigkeit kann an einer Messstelle einen Grenzwert nicht überschreiten, die Konzentration eines Medikaments im Blut wird zu bestimmten Zeitpunkten kontrolliert, oder bei einer Straße in den Bergen interessiert die Steigung an einer konkreten Stelle (z. B. wegen der maximal zulässigen Steigung oder zur Einschätzung der Belastung beim Aufstieg). Auch beim Bremsvorgang eines Autos ist nicht nur die durchschnittliche Verzögerung relevant, sondern auch, wie stark das Fahrzeug in einem bestimmten Augenblick langsamer wird.



lokale Änderungsrate
Die lokale Änderungsrate entspricht der Steigung einer Geraden, die den Funktionsgraph in nur **einem Punkt** berührt. Solch eine Gerade nennt man "Tangente". Daher spricht man auch von einer **Tangentensteigung**.

Lokale Änderungsrate durch Annäherung (hfJWdx)
In den folgenden Aufgaben wird die lokale Änderungsrate zunächst näherungsweise bestimmt. Dazu wird die mittlere Änderungsrate in immer kleineren Intervallen um einen Punkt herum berechnet. Je kleiner das Intervall wird, desto genauer nähert sich das Ergebnis der gesuchten Steigung an dieser Stelle an.



Um dieses Verkleinern des Intervalls genauer zu verstehen, wird die Funktion $f(x) = 0{,}5x^2$ in vier verschiedenen Koordinatensystemen betrachtet. In jeder Abbildung ist derselbe Ausgangspunkt fest gewählt (z. B. bei $x = 1$), und zusätzlich wird ein zweiter Punkt auf dem Graphen markiert, der anfangs noch deutlich entfernt liegt (Abstand h). Zwischen beiden Punkten wird jeweils eine Sekante eingezeichnet.

Von Abbildung zu Abbildung rückt der zweite (rechte) Punkt immer näher an den festen Punkt ($x = 1$) heran – das Intervall wird also Schritt für Schritt verkleinert. Dadurch verändert sich die Sekante: Anfangs beschreibt sie nur eine grobe "Durchschnittssteigung" über ein relativ großes Intervall. Je kleiner das Intervall wird, desto stärker passt sich die Sekante dem Verlauf des Graphen in der unmittelbaren Umgebung des Punktes an.

Im Grenzfall – wenn der zweite Punkt gedanklich "unendlich nahe" an den festen Punkt heranrückt – geht die Sekante in eine Tangente über. Diese Tangente berührt den Graphen in genau diesem Punkt und besitzt genau die Steigung, die die lokale Änderungsrate beschreibt. Damit wird sichtbar, warum die lokale Änderungsrate als **Steigung "im Punkt"** verstanden werden kann: Sie entsteht als Grenzwert der Sekantensteigungen bei immer kleiner werdenden Intervallen.

Aufgabe 5.57 (7hhkVy)

In den Koordinatensystemen des obigen Erklärungstextes ist die Funktion $f(x) = 0{,}5x^2$ dargestellt. Zusätzlich sind Sekanten für unterschiedliche Intervalle eingezeichnet, die jeweils die mittleren Änderungsraten repräsentieren.

a) Der Abstand zwischen unterer und oberer Intervallgrenze wird mit h bezeichnet. Notieren Sie zu jedem Intervall den zugehörigen Wert von h in der Tabelle.

b) Berechnen Sie für die in der Tabelle angegebenen Intervalle jeweils die Sekantensteigung (also die mittlere Änderungsrate) und tragen Sie die Ergebnisse in die Tabelle ein.

c) Welche Änderungsrate vermuten Sie aufgrund der anderen Werte für das Intervall [1; 1]?

Intervall	h (Abstand)	mittlere Änderungsrate
$I_1[1; 3]$	$h_1 = 2$	$m_1 = 2$
$I_2[1; 2]$	$h_2 =$	$m_2 =$
$I_3[1; 1{,}5]$		
$I_4[1; 1{,}1]$		
$I_5[1; 1{,}01]$		

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.58 (CN7rzZ) ○

Wird der Abstand h der mittleren Änderungsrate weiter verkleinert, rücken die beiden Punkte auf dem Graphen unendlich nah zusammen. In diesem Grenzfall beschreibt die Sekantensteigung nicht mehr nur eine durchschnittliche Änderung zwischen zwei Punkten, sondern führt zur lokalen Änderungsrate – also zur Steigung an einer bestimmten Stelle. Der Begriff "lokal" verdeutlicht, dass sich die Aussage auf einen einzelnen Punkt bezieht.

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate mit den selben Intervallen wie in Aufgabe 5.57 und berechnen Sie für die Funktion $f(x) = x^2$ die jeweiligen mittleren Änderungsraten (Sekantensteigungen).

b) Schätzen Sie anschließend auf dieser Grundlage die lokale Änderungsrate an der Stelle $x = 1$ ab.

Aufgabe 5.59 (sMBwyr) ◒

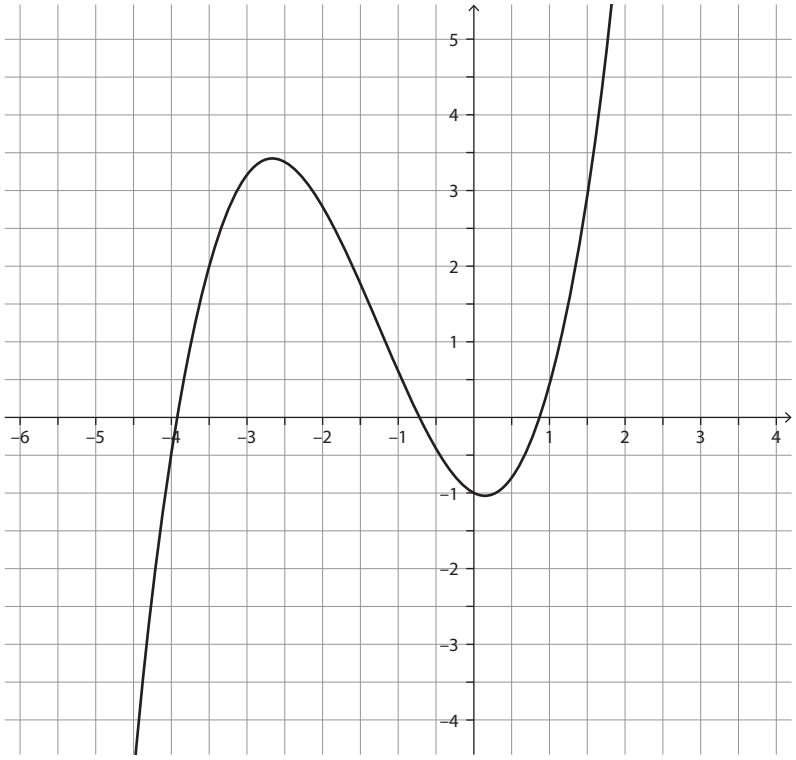
Wie lässt sich die lokale Änderungsrate (Tangentensteigung) der Funktion $f(x) = 2x^3$ an der Stelle $x = 3$ näherungsweise ermitteln?

Wählen Sie passende Intervalle um $x = 3$ herum, für die jeweils die Sekantensteigung berechnet werden kann. Nutzen Sie die Ergebnisse, um die Tangentensteigung in $x = 3$ abzuschätzen.

Aufgabe 5.60 (FnkhPw) ●

Im unten stehenden Koordinatensystem ist die Funktion $f(x) = 0{,}4x^3 + 1{,}5x^2 - 0{,}5x - 1$ abgebildet. Zeichnen Sie an den Stellen $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$ jeweils eine Tangente mit dem Geodreieck ein. Messen Sie anschließend den Winkel der Tangente zur x-Achse und rechnen Sie diesen Winkel in die Steigung m um. Auf diese Weise wird die lokale Änderungsrate (Tangentensteigung) an den genannten Stellen grafisch abgeschätzt.

Winkel
Schauen Sie sich die Berechnung des Winkels ggf. nochmals in Kapitel 3.1 "Einführung in lineare Funktionen" auf Seite 60 an.



Aufgabe 5.61 (XZy6F4) ◒

Für die Funktion $f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 3$ soll die lokale Änderungsrate an der Stelle $x = 1$ näherungsweise bestimmt werden. Berechnen Sie dazu zunächst die Sekantensteigungen in den Intervallen [1; 1,5], [1; 1,1] und [1; 1,01] und geben Sie einen Schätzwert für die Tangentensteigung in $x = 1$ an.

Wer hat's erfunden?
Die sogenannte h-Methode zur Bestimmung der lokalen Änderungsrate wurde unabhängig voneinander von **Isaac Newton** und **Gottfried Wilhelm Leibniz** entwickelt.

Ⓘ Lokale Änderungsrate mit der h-Methode (DYth2Q)

Bei der näherungsweisen Bestimmung der lokalen Änderungsrate entsteht ein grundsätzliches Problem: Zwar kann der Abstand h zwischen zwei Punkten sehr klein gewählt werden, dennoch bleibt die berechnete Steigung immer eine mittlere Änderungsrate, also eine Sekantensteigung zwischen zwei Punkten. Werden die beiden Punkte vollständig zusammengelegt, dass h = 0 ist, lässt sich die Steigung über den Differenzenquotienten nicht mehr berechnen. Das zeigt sich am Beispiel $f(x) = x^2$ mit den Punkten A(3|9) und B(3|9):

$$m = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$$

Auf den ersten Blick könnte der Eindruck entstehen, das Ergebnis sei 0. Tatsächlich ist der Ausdruck $\frac{0}{0}$ jedoch nicht definiert, da eine Division durch 0 **nicht erlaubt** ist!

Um dieses Problem zu umgehen, wurde ein Verfahren entwickelt, bei dem der Abstand h zwar gegen 0 "geschoben" wird, die Rechnung aber dennoch sinnvoll bleibt. Dadurch lässt sich die Tangentensteigung – also die lokale Änderungsrate an einem einzigen Punkt – bestimmen. Dieses Verfahren heißt **h-Methode**.

Ⓑ Beispiel

Die Steigung soll nun für die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle x = 2 bestimmt werden, also im Punkt P(2|4). Die bisherige Berechnung der Steigung zwischen zwei Punkten ist bekannt:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Aus dem vorherigen Kapitel ist auch klar: Dafür wird ein zweiter Punkt gebraucht, der einen bestimmten Abstand zu x = 2 hat. Der "Trick" ist jetzt, diesen Abstand nicht fest zu wählen, sondern ihn variabel zu lassen. Wie sieht das aus? Es wird $x_1 = 2$ und $x_2 = 2 + h$ gesetzt (x_2 entspricht also x_1 plus dem Abstand h). Damit lautet die Steigung:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(2+h) - f(2)}{2 + h - 2}$$

Da die Funktion $f(x) = x^2$ lautet, bedeutet f(x) schlicht: "x quadrieren". Wird nun f(2 + h) benötigt, wird anstelle von x einfach (2 + h) eingesetzt und ebenfalls quadriert. Deshalb gilt:

$$m = \frac{f(2+h) - f(2)}{2 + h - 2} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$

Die Kunst ist nun, diesen Term auszurechnen und vor allem das h wieder loszuwerden. h kann nämlich nicht einfach 0 gesetzt werden, weil sonst wieder der Fehler passieren würde, durch 0 zu teilen. Also Schritt für Schritt:

$$m = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$

Im Zähler steckt eine binomische Formel: $(2 + h)^2 = 4 + 4h + h^2$. Dies ergibt damit:

$$m = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h}$$

Das ist schon deutlich einfacher, aber h steht immer noch im Nenner. Deshalb kann h noch nicht 0 werden. Im Zähler lässt sich jedoch h faktorisieren:

$$m = \frac{4h + h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h}$$

Jetzt kann gekürzt werden:

$$m = \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4 + h$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Nun steht kein h mehr im Nenner. Damit darf h gegen 0 gehen: Das bedeutet, dass der Abstand h immer kleiner gedacht wird – der zweite Punkt rückt also immer näher an den ersten Punkt heran. Der Limes (Grenzwert) beschreibt dann, welchen Wert der Ausdruck annimmt, wenn h "gegen 0 läuft", ohne dass h tatsächlich 0 eingesetzt werden muss.

Der Grenzwert
Die Abkürzung "lim" steht für "limes" (lateinisch für "Grenzweg").
Das "lim" im Zusammenhang mit "h→0" bedeutet einfach nur, dass der Abstand h so klein gemacht wird, dass er irgendwann null ist. Man sagt dazu auch "**h geht gegen null**".

$$m = \lim_{h \to 0} (4 + h) = 4 + 0 = 4$$

Damit ist die Steigung in x = 2 (also die lokale Änderungsrate) bestimmt mit:

$$m = 4.$$

Die Steigung in jedem beliebigen Punkt mit der h-Methode bestimmen (DYth2Q) ⓘ

Das vorherige Beispiel zeigt, wie sich die Steigung an einer festen Stelle (z. B. x = 2) berechnen lässt. Noch hilfreicher ist es allerdings, eine Formel zu erhalten, mit der die Steigung an jeder Stelle direkt bestimmt werden kann. Die Rechnung läuft dabei genauso ab wie zuvor – nur dass diesmal nicht mit einer konkreten Zahl (wie 2), sondern allgemein mit x gerechnet wird. Für $f(x) = x^2$ wird deshalb $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$ gesetzt.

Damit ergibt sich für die Sekantensteigung:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x}$$

$$= \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}}$$

$$= 2x + h$$

Nun steht kein h mehr im Nenner. Deshalb kann h gegen 0 gehen, also der zweite Punkt gedanklich immer näher an den ersten rücken:

Merke
f′(x) *sprich*: "f Strich von x"

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x + 0$$

$$\mathbf{f'(x) = 2x}$$

Die Schreibweise f′(x) steht für die **Ableitung** und beschreibt die lokale Änderungsrate (Tangentensteigung) an der Stelle x. Mit f′(x) = 2x lässt sich die Steigung jetzt sofort für beliebige Stellen bestimmen, zum Beispiel:

Steigung
Statt "Tangentensteigung oder "lokale Änderungsrate" sagen wir ab nun nur noch "Steigung".
Die Ableitung gibt also die Steigung an jedem beliebigen Punkt an.

- Steigung bei x = 1: $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$
- Steigung bei x = 3: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$
- Steigung bei x = –2: $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Aufgabe 5.62 (4EDf2b) ○

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen mit der h-Methode und bestimmen Sie die Steigungen in x = 1, x = –2 und x = 3.

a) $f(x) = x^2 + 3$
b) $f(x) = -x^2$
c) $f(x) = x^2 + 2x$
d) $f(x) = x^2 - 3x + 4$
e) $f(x) = x^3$
f) $f(x) = x^3 + x$

ⓘ **Das Pascal'sche Dreieck (H6aaEA)**

In Aufgabe 5.62 e) und f) ist deutlich geworden, dass das Ausmultiplizieren von Klammern mit höheren Exponenten schnell sehr langwierig werden kann. Für genau dieses Problem gibt es jedoch ein hilfreiches Schema: das Pascal'sche Dreieck. Mit seiner Hilfe lassen sich die Koeffizienten in den Binomialentwicklungen von $(a + b)^n$ sofort ablesen.

Benannt ist es nach Blaise Pascal (1623–1662), einem französischen Mathematiker, Physiker und Philosophen. Pascal beschäftigte sich unter anderem intensiv mit Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitstheorie; viele Strukturen, die heute im Unterricht selbstverständlich sind, wurden durch seine Arbeiten systematisch beschrieben und verbreitet. Das nach ihm benannte Dreieck taucht in der Mathematik an vielen Stellen wieder auf – nicht nur bei Binomen, sondern auch bei Kombinationszahlen und Wahrscheinlichkeiten.

			1			
		1		1		
	1		2		1	$f(x) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1		3		3		1 $f(x) = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	1		4		6	4 1 $f(x) = (a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1		5		10		10 5 1 $f(x) = (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Der Zusammenhang zwischen dem Pascal'schen Dreieck links und den ausmultiplizierten Gleichungen rechts ist vielleicht nicht auf den ersten Blick erkennbar, doch eine Erläuterung erfolgt nun Schritt für Schritt. Dazu lohnt sich ein genauer Blick auf die letzte Zeile des Dreiecks, denn dort ist das Muster besonders gut zu erkennen (und es funktioniert genauso für alle anderen Zeilen).

Jede Zeile im Pascal'schen Dreieck gehört zu einer Potenz $(a + b)^n$. Dabei gilt: Die Zeilennummer minus 1 entspricht dem Exponenten n (z. B. Zeile 6 entspricht n = 5).

Die Anzahl der Zahlen in der Zeile passt dabei auch zur Anzahl der Summanden im Ergebnis: Bei $(a + b)^5$ entstehen zum Beispiel 6 Summanden.

Die Zahlen im Pascal'schen Dreieck entsprechen den Koeffizienten in der Gleichung, wobei die 1 nicht geschrieben wird, denn es gilt $1 \cdot a = a$. Außerdem gilt auch $1 \cdot b = b$, sodass die "äußeren" Einsen in der Binomialentwicklung meist "unsichtbar" bleiben.

1 5 10 10 5 1 $f(x) = (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Der höchste Exponent entspricht immer der zweiten Zahl in der Zeile:

1 5 10 10 5 1 $f(x) = (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Die Exponenten für das a werden von links nach rechts immer um einen kleiner:

1 5 10 10 5 1 $f(x) = (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Die Exponenten für das b werden von rechts nach links immer um einen kleiner:

1 5 10 10 5 1 $f(x) = (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Beispiel Ⓑ

Schauen wir uns jetzt genauer an, wie aus dem Pascal'schen Dreieck die ausmultiplizierte Form entsteht. Als Beispiel dient

$f(x) = (a + b)^4$.

Der Exponent ist 4, also wird die passende Zeile im Pascal'schen Dreieck verwendet – das ist die 5. Zeile mit der 4 als zweite Zahl:

1 4 6 4 1

Zuerst werden diese Zahlen als Koeffizienten übernommen. Dabei beginnt der erste Summand nur mit a, der letzte nur mit b, und dazwischen stehen Produkte aus a und b mit den jeweiligen Koeffizienten:

$f(x) = a + 4ab + 6ab + 4ab + b$

Die äußeren Einsen werden meist nicht mitgeschrieben. Nun kommen die Exponenten: Beim a startet links der höchste Exponent 4 und wird von Summand zu Summand um 1 kleiner:

$f(x) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b + 4ab + b$

Zum Schluss werden die Exponenten beim b ergänzt. Sie beginnen rechts bei 4 und werden nach links hin jeweils um 1 kleiner (bzw. von links nach rechts um 1 größer):

$f(x) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Damit ist $(a + b)^4$ ausmultipliziert, ohne dass die Klammer viermal ausgeschrieben und mühsam ausmultipliziert werden muss.

Als zweites Beispiel betrachten wir:

$g(x) = (a + b)^3$

Der Exponent ist 3, also wird die passende Zeile im Pascal'schen Dreieck verwendet – das ist die Zeile mit der 3:

1 3 3 1

Diese Zahlen werden als Koeffizienten übernommen. Dabei steht links nur a, rechts nur b und dazwischen stehen die Mischterme aus a und b:

$g(x) = a + 3ab + 3ab + b$

Nun werden die Exponenten ergänzt: Beim a beginnt der Exponent links bei 3 und wird von Summand zu Summand um 1 kleiner. Beim b ist es genau umgekehrt: Dort startet der Exponent links bei 0 und wird nach rechts hin um 1 größer. Daraus ergibt sich:

$g(x) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Aufgabe 5.63 (rdRnN3) ◒

Multiplizieren Sie die folgenden Funktionen aus.

a) $f(x) = (a + b)^6$ b) $f(x) = (a + b)^7$ c) $f(x) = (a + b)^8$

● **Aufgabe 5.64 (893eXV)**

Bilden Sie für folgende Funktionen die Ableitungen mit Hilfe der h-Methode. Nutzen Sie als Hilfe ggf. das Pascal'sche Dreieck, um sich unnötige Rechenarbeit zu ersparen. Geben Sie ebenfalls die Nullstellen der Funktionen an.

a) $f(x) = x^4$
b) $f(x) = x^3 + 2x^2$
c) $f(x) = 4x^2 + 3x$
d) $f(x) = x^2 - 2x + 4$
e) $f(x) = x^3 - 4x$
f) $f(x) = x^2 + 9$

◒ **Aufgabe 5.65 (TuNu2c)**

Gegeben ist $f(x) = 0{,}5x^3$.

a) Bestimmen Sie die lokale Änderungsrate an der Stelle $x = 3$ mit der h-Methode.
b) Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an und deuten Sie kurz: Steigt oder fällt der Graph an dieser Stelle?

◒ **Aufgabe 5.66 (p3YzZX)**

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 2x$.

a) Bestimmen Sie mit der h-Methode eine allgemeine Formel für $f'(x)$.
b) Berechnen Sie $f'(-1)$ und $f'(2)$.

◒ **Aufgabe 5.67 (t2C3uF)**

Gegeben ist $f(x) = x^2$.

a) Berechnen Sie die Sekantensteigungen für das Intervall $[1; 1 + h]$ mit $h = 1; 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01$.
b) Beschreiben Sie, welchem Wert sich die Steigungen annähern, und nennen Sie damit die lokale Änderungsrate bei $x = 1$.

◒ **Aufgabe 5.68 (CQNr71)**

Beziehen Sie sich auf den Bremsvorgang in der Situationsbeschreibung.

a) Bestimmen Sie mit der h-Methode die lokale Änderungsrate von $v(t)$ an der Stelle $t = 1$.
b) Deuten Sie das Ergebnis im Kontext.

◒ **Aufgabe 5.69 (RDRrk8)**

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2x + 1$.

a) Bestimmen Sie mit der h-Methode die lokale Änderungsrate von f an der Stelle $x = 2$.
b) Bestimmen Sie die lokale Änderungsrate von g an der Stelle $x = 2$ (hier genügt eine kurze Begründung ohne h-Methode).
c) Vergleichen Sie die beiden Werte: Welche Funktion ist bei $x = 2$ steiler?

◒ **Aufgabe 5.70 (smap6Y)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x$.

a) Bestimmen Sie mit der h-Methode eine allgemeine Formel für $f'(x)$.
b) Berechnen Sie die lokale Änderungsrate an den Stellen $x = -1$, $x = 0$ und $x = 2$.
c) Prüfen Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse, an welcher der drei Stellen der Graph am steilsten steigt bzw. fällt. Formulieren Sie dazu kurze Antwortsätze.

● **Aufgabe 5.71 (WSH6Hf)**

Gegeben ist eine Funktion dritten Grades ohne absolutes Glied: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.
Für drei Stellen sind die Tangentensteigungen (lokalen Änderungsraten) bekannt:

- an der Stelle $x = 0$ gilt: $f'(0) = 4$
- an der Stelle $x = 1$ gilt: $f'(1) = 1$
- an der Stelle $x = 2$ gilt: $f'(2) = 4$

a) Bestimmen Sie mit der h-Methode für $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ zunächst die Ableitung $f'(x)$ allgemein (also in Abhängigkeit von a, b und c).
b) Nutzen Sie anschließend die drei Angaben zu $f'(0)$, $f'(1)$ und $f'(2)$, um ein Gleichungssystem für a, b und c aufzustellen und zu lösen.
c) Notieren Sie die Funktionsgleichung $f(x)$.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.9 ABLEITUNG

Situationsbeschreibung – Laktatkonzentration beim Training
Beim Ausdauertraining wird häufig der Laktatwert im Blut beobachtet, um die Belastung besser steuern zu können. Dazu wird in bestimmten Abständen ein kleiner Blutstropfen am Ohrläppchen entnommen und der Laktatwert gemessen. Zu Beginn des Trainings bleibt der Wert meist relativ niedrig, doch mit zunehmender Intensität kann er zunächst langsam und später deutlich schneller ansteigen. Genau diese Veränderungsgeschwindigkeit ist für die Trainingssteuerung besonders wichtig: Ein schneller Anstieg kann darauf hindeuten, dass die Belastung zu hoch ist und der Körper vermehrt anaerob arbeitet.

Um den Verlauf mathematisch zu beschreiben, wird der Laktatwert als Funktion L(t) in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert. Dabei ist t die Trainingszeit in Minuten und L(t) der Laktatwert in mmol/L. Für eine Trainingseinheit kann der Verlauf näherungsweise durch folgende ganzrationale Funktion beschrieben werden:

$L(t) = 0{,}0002t^3 - 0{,}0072t^2 + 0{,}0864t + 1{,}2 \quad (0 \le t \le 45)$

Damit ergibt sich zu Beginn ein niedriger Ausgangswert und im weiteren Verlauf ein zunehmend stärkerer Anstieg. Entscheidend ist nun nicht nur, welcher Laktatwert zu einem Zeitpunkt vorliegt, sondern vor allem, wie stark sich L(t) genau in diesem Moment verändert. Diese momentane Änderungsrate wird im nächsten Schritt mit der Ableitung beschrieben.

Laktat
Laktat ist ein Stoffwechselprodukt, das vor allem bei hoher Belastung entsteht, wenn der Körper Energie teilweise ohne ausreichend Sauerstoff bereitstellt. Ein steigender Laktatwert im Blut zeigt, dass die Belastung zunehmend anstrengend wird.

Bedeutung der Einheit
mmol/L bedeutet Millimol pro Liter und ist eine Einheit für die Stoffmenge in einer Flüssigkeit. Sie gibt an, wie viele Tausendstel Mol eines Stoffes in 1 Liter Blut (oder Lösung) enthalten sind.

Ableitungsregel (mLHHvi) ⓘ
Die Ableitung f′(x) einer Funktion f(x) beschreibt die Steigung des Graphen von f an der Stelle x, also die lokale Änderungsrate in diesem Punkt.
Für eine Potenzfunktion der Form $f(x) = a \cdot x^n$ gilt die Ableitungsregel $f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$.

Beispiel Ⓑ
Eventuell ist beim Bilden der Ableitungen in den vorherigen Aufgaben bereits ein bestimmtes Schema aufgefallen. Dieses Schema ist oben in der Definition zu erkennen – doch was steckt konkret dahinter? Die folgenden Beispiele zeigen das Vorgehen:

1. Sind a = 1 und n = 3, ergibt sich die **Funktion** $f(x) = x^3$.
   Für die **Ableitung** ergibt sich somit: $f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

2. Sind a = 2 und n = 4, ergibt sich die **Funktion** $f(x) = 2x^4$.
   Für die **Ableitung** ergibt sich somit: $f'(x) = 4 \cdot 2x^{4-1} = 8x^3$

3. Sei folgende **Funktion** gegeben: $f(x) = 3x^3 - 4x^2$
   Für die **Ableitung** erhalten Sie: $f'(x) = 9x^2 - 8x$

4. Sei folgende **Funktion** gegeben: $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$
   Die **Ableitung** lautet: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 4$

5. Sei folgende **Funktion** gegeben: $f(x) = 3x$
   Die **Ableitung** lautet: $f'(x) = 3$

6. Sei folgende **Funktion** gegeben: $f(x) = 5$
   Die **Ableitung** lautet: $f'(x) = 0$

Merksatz
Exponent mal die "Zahl davor" und vom Exponent einen abziehen.

Die Ableitung entsteht also, indem der Exponent mit dem Koeffizienten multipliziert wird und der Exponent anschließend um 1 verringert wird. Konstante Zahlen verschwinden dabei, da ihre Steigung überall 0 ist. Damit ist es zukünftig nicht mehr nötig, die Ableitung jedes Mal mühsam über die h-Methode zu bestimmen. Stattdessen kann direkt mit der oben genannten Ableitungsregel gearbeitet werden.

○ **Aufgabe 5.72 (pRHxWK)**

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils die Ableitungsfunktion mithilfe der Ableitungsregel.

a) $f(x) = x^8$
b) $f(x) = x^6 - 4x^3$
c) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^2$
d) $f(x) = x^4 + 2{,}5x^3 + 4x^2$
e) $f(x) = 1{,}5x^3 + 6x^2 - 2x - 5$
f) $f(x) = 4x^4 + 3{,}2x^2 - 7x$

ⓘ **Zweite und dritte Ableitung (mLHHvi)**

Zweite Ableitung
$f''(x)$ *sprich*:
"f zwei Strich von x"

Dritte Ableitung
$f'''(x)$ *sprich*:
"f drei Strich von x"

Zusätzlich zur Ableitung (auch "erste Ableitung" genannt) kann eine zweite und eine dritte Ableitung – $f''(x)$ und $f'''(x)$ – gebildet werden. Die zweite Ableitung ist die Ableitung der ersten Ableitung. Rein technisch beschreibt diese die Steigung der ersten Ableitung. Ebenso ist die dritte Ableitung die Ableitung der zweiten Ableitung. Dazu später mehr.

Beispiel

Ⓑ Gegeben sei folgende **Funktion**: $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 5$
Die **erste Ableitung** ist damit gegeben durch: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x + 4$
Die **zweite Ableitung** ergibt damit nun: $f''(x) = 12x^2 - 12x + 4$
Die **dritte Ableitung** ergibt damit: $f'''(x) = 24x - 12$

Aufgabe 5.73 (9gV3Nj)

○ Ableitungsfunktion und Ausgangsfunktion hängen nicht nur rechnerisch, sondern auch grafisch eng zusammen. Dieser Zusammenhang soll hier sichtbar gemacht werden.

a) Tragen Sie neben der Funktion $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 15$ auch $f'(x)$ und $f''(x)$ mithilfe der Tabellenfunktion Ihres Taschenrechners in ein Koordinatensystem ein.
   (Koordinatensystem: x-Achse: $-1 \le x \le 8$ mit 1 cm = 1 Einheit; y-Achse: $-15 \le y \le 40$ mit 1 cm = 5 Einheiten)
b) Markieren Sie den höchsten und den tiefsten Punkt des Graphen von f(x) und zeichnen Sie durch beide Punkte jeweils eine gestrichelte, senkrechte Linie über die gesamte Höhe des Koordinatensystems.
c) Beschreiben Sie abschließend in wenigen Sätzen, welcher Zusammenhang zwischen den Extrempunkten von f(x) und dem Graphen der ersten Ableitung erkennbar wird.

○ **Aufgabe 5.74 (7Ddptf)**

Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung zum Laktatwert beim Ausdauertraining.

a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion $L'(t)$.
b) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Laktatwertes zu unterschiedlichen Zeitpunkten: $t = 10$, $t = 25$ und $t = 40$.
c) Deuten Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang: In welcher Phase steigt der Laktatwert am stärksten, und was kann das für die Trainingssteuerung bedeuten?
d) Bestimmen Sie einen Zeitpunkt, zu dem der Laktatwert kurzfristig nicht weiter ansteigt ($L'(t) = 0$), und erläutern Sie, wie dieser Moment im Training interpretiert werden kann.

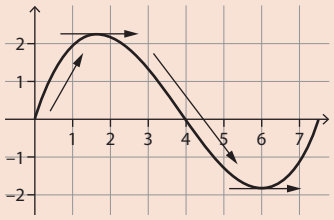
DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.10 EXTREMPUNKTE

Situationsbeschreibung – Befestigungsanlage des mittelalterlichen Dortmund
Viele Städte wurden im Mittelalter durch aufwendige Befestigungsanlagen geschützt, die Angreifern das Eindringen erheblich erschweren sollten. Typisch waren ein erhöhter Wall sowie ein davorliegender Wassergraben. Zusammen bildeten sie ein Hindernissystem, das nicht nur schwer zu überwinden war, sondern Angreifer auch verlangsamte.

Rechts ist eine schematische Darstellung einer solchen Befestigungsanlage zu sehen (Angaben in Metern). Der Höhenverlauf von Wall und Graben lässt sich dabei durch eine Funktion modellieren. Für die folgende Betrachtung beschreibt b(x) den Verlauf der Anlage in einem Querschnitt:
$b(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}15x^2 + 3x$.



Definition (7fNcMv)
Zunächst werden einige Begriffe definiert: Eine **Extremstelle** ist ein x-Wert, an dem der Graph ein Extrem erreicht. Der zugehörige y-Wert heißt **Extremwert**. Zusammen bilden Extremstelle und Extremwert den **Extrempunkt** (x|y).

Ein Extrempunkt, auch **lokales Extremum** genannt, ist ein Punkt auf dem Graphen, der in seiner unmittelbaren Umgebung (also in einem bestimmten Intervall) entweder der **höchste Punkt** ist (Maximum bzw. Hochpunkt) oder der **tiefste Punkt** (Minimum bzw. Tiefpunkt).

Für Extrempunkte gilt grundsätzlich: $f'(x) = 0$.

Erläuterung (7fNcMv)
Doch warum gilt in Extrempunkten $f'(x) = 0$? Zunächst ist in Erinnerung zu rufen, dass die Ableitung $f'(x)$ die Steigung des Funktionsgraphen angibt. Mit dieser Hintergrundinformation lässt sich der Graph aus der Situationsbeschreibung betrachten.

Dort ist zu erkennen, dass der Graph z. B. im Intervall [0; 1] nach oben verläuft. Er besitzt also eine positive Steigung. Im Intervall [2; 5] fällt der Graph nach unten ab und hat damit eine negative Steigung. Im Intervall [7; 8] steigt der Graph wieder und die Steigung ist erneut positiv.

Wird nun beispielsweise der Tiefpunkt an der Stelle $x = 6$ betrachtet, ist genau dort zu sehen, dass der Graph weder nach oben noch nach unten verläuft. Das wird in der Zeichnung durch eine waagerechte Tangente (Pfeil) symbolisiert. An dieser Stelle ist die Steigung also weder positiv noch negativ – sie muss folglich null sein. Da $f'(x)$ die Steigung beschreibt, gilt an dieser Extremstelle entsprechend: $f'(x) = 0$.

Ⓑ **Beispiel**

Die Extremstelle (also die x-Koordinate) des Tiefpunktes lässt sich in diesem Fall am Funktionsgraphen recht gut ablesen. Beim Hochpunkt ist das jedoch nicht so eindeutig möglich. Genau hier hilft die Rechnung weiter.

Aus der Definition ist bekannt, dass in einem Extrempunkt die Steigung 0 ist. Das bedeutet: Sowohl im Tiefpunkt als auch im Hochpunkt gilt $b'(x) = 0$. Allein mit dieser Bedingung lassen sich die Extremstellen rechnerisch bestimmen

Zunächst wird die Ableitung der Funktion $b(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}15x^2 + 3x$ gebildet:

$b'(x) = 0{,}3x^2 - 2{,}3x + 3$

Nullstellen der Ableitung
Die Nullstellen der Ableitung entsprechen den Extremstellen der Ausgangsfunktion. Dieser Zusammenhang wurde bereits in Aufgabe 5.72 sichtbar.

Nun wird die Ableitung gleich Null gesetzt:

$b'(x) = 0$
$0 = 0{,}3x^2 - 2{,}3x + 3$

Damit liegt eine quadratische Gleichung vor, die z. B. mit der pq-Formel gelöst werden kann:

$0 = 0{,}3x^2 - 2{,}3x + 3 \quad | :0{,}3$
$0 = x^2 - \frac{23}{3}x + 10 \quad | \text{pq-Formel}$
$x_{1/2} = \frac{23}{6} \pm \sqrt{(\frac{23}{6})^2 - 10}$
$\mathbf{x_1 = 6} \quad \vee \quad \mathbf{x_2 = \frac{5}{3}} \approx 1{,}667$

Damit sind die Extremstellen der Funktion b(x) bestimmt.

Der Wert $x_1 = 6$ war bereits aus dem Graphen bekannt. Der zweite Wert $x_2 = \frac{5}{3} \approx 1{,}667$ ist neu und beschreibt die x-Koordinate des Hochpunktes.

○ **Aufgabe 5.75 (QFU5Uz)**

Nutzen Sie die zuvor berechneten Ergebnisse, um die Höhe des Walles und die Tiefe des Grabens der in der Situationsbeschreibung beschriebenen Befestigungsanlage zu bestimmen.

○ **Aufgabe 5.76 (YuZMYF)**

Setzen Sie die Ableitungen der Funktionen gleich Null und lösen Sie die Gleichungen.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$
b) $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x - 8$
c) $f(x) = 12x^5 - 75x^4 - 40x^3 + 720x^2 + 10$
d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x - 3$
e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 5$
f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$

○ **Aufgabe 5.77 (UFyzBd)**

Bestimmen Sie die Extremstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}6x^2 - 1{,}8x + 2{,}1$
b) $f(x) = -0{,}2x^3 - 0{,}6x^2 + 4{,}8x - 1$
c) $f(x) = 0{,}3x^4 - 0{,}4x^3 - 3{,}6x^2 + 0{,}5$
d) $f(x) = -0{,}075x^4 + 0{,}4x^3 + 0{,}15x^2 - 1{,}2x$
e) $f(x) = 0{,}15x^4 - 0{,}6x^3 + 2{,}4x - 3$
f) $f(x) = -0{,}3x^3 + 2{,}25x^2 + 1{,}2$
g) $f(x) = 0{,}075x^4 - 0{,}6x^3 - 0{,}6x^2 + 7{,}2x$
h) $f(x) = 0{,}225x^4 - 0{,}6x^3 - 7{,}2x^2 + 28{,}8x$

◒ **Aufgabe 5.78 (WwK4hF)**

Bestimmen Sie die Extrempunkte der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{5}{18}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 1$
b) $f(x) = \frac{4}{27}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{8}{9}x$
c) $f(x) = \frac{2}{33}x^3 + \frac{2}{11}x^2 - \frac{6}{11}x + 3$
d) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{8}x - 2$
e) $f(x) = \frac{1}{28}x^4 - \frac{1}{21}x^3 - \frac{3}{7}x^2 + 1$
f) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - 6x^3 + 32x + 3$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.79 (wMte5Q)

Seien die beiden folgendenden Funktionen gegeben:

- $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1{,}1x^2 + 0{,}57x + 0{,}8$
- $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 0{,}4$

a) Ermitteln Sie die Extremstellen beider Funktionen.

b) Geben Sie eine begründete Vermutung ab, ob es sich an den Extremstellen jeweils um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.

c) Zeichnen Sie beide Funktionen in das folgende Koordinatensystem. Verwenden Sie dazu die Tabellenfunktion des Taschenrechners mit Startwert –0,2, Endwert 2,2 und Schrittweite 0,2.

d) Überprüfen Sie mithilfe der Zeichnung, welche der in a) gefundenen Extremstellen tatsächlich Hoch- bzw. Tiefpunkte sind.

e) Bestimmen Sie für die Funktion f(x) die erste Ableitung f′(x) und zeichnen Sie diese Ableitungsfunktionen ebenfalls in das Koordinatensystem ein.

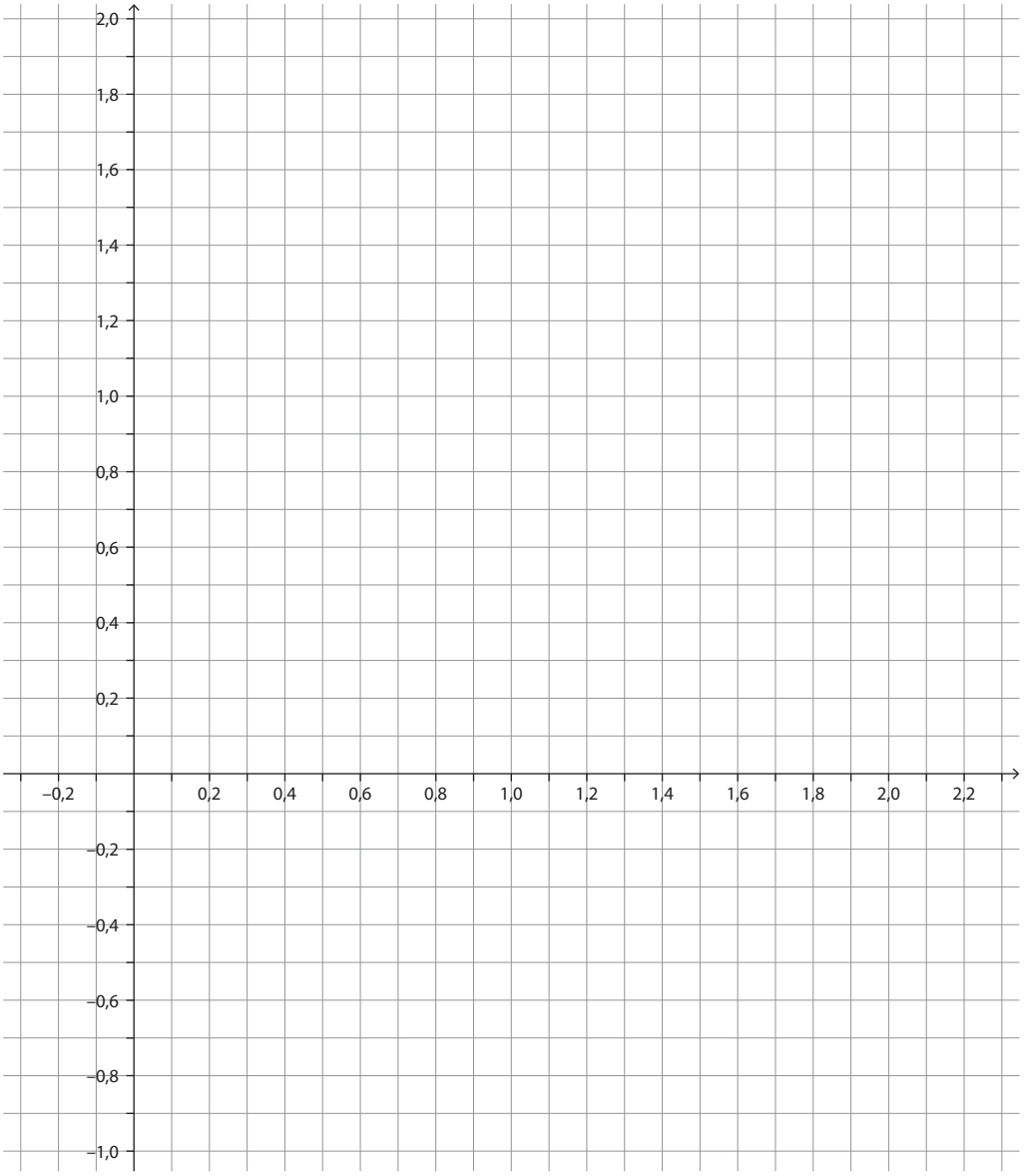
f) Zeichnen Sie bei f(x) jeweils eine senkrechte gestrichelte Linie vom Hoch- bzw. Tiefpunkt bis zur x-Achse. Was fällt Ihnen auf?

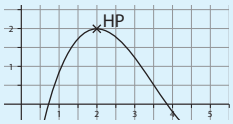
g) Geben Sie zunächst die zweite Ableitung f″(x) an und bestimmen Sie anschließend die Funktionswerte der zweiten Ableitung an den Extremstellen x = 0,3 und x = 1,9.
(Was aus den Funktionswerten der zweiten Ableitung hergeleitet werden kann, wird in den Erläuterungen auf den folgenden Seiten beschrieben.)

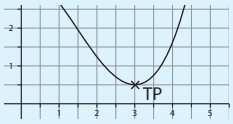
Merke

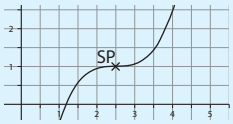
Anhand der Info aus g) können Sie entscheiden, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

Weitere Infos dazu gibt es auf den folgenden Seiten.







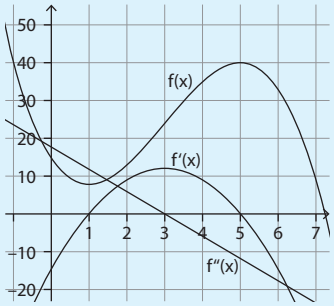


ⓘ **Hochpunkt oder Tiefpunkt? (7fNcMv)**

In der vorherigen Aufgabe wurden zunächst mögliche Extremstellen berechnet. Allein aus dieser Rechnung ließ sich jedoch nicht erkennen, ob dort tatsächlich ein Hochpunkt (HP) oder ein Tiefpunkt (TP) vorliegt. Erst durch die Zeichnung wurde sichtbar, welche Extremstelle ein Maximum oder Minimum beschreibt – und außerdem, dass eine der gefundenen Stellen gar kein Extrempunkt ist. Zwar ist die Steigung dort Null, dennoch liegt weder ein Hoch- noch ein Tiefpunkt vor. Ein solcher Punkt heißt Sattelpunkt (SP).

Es wird ein Verfahren benötigt, mit dem sich entscheiden lässt, ob eine gefundene Stelle überhaupt ein Extrempunkt ist – und falls ja, ob ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt. Dazu reicht die Bedingung $f'(x) = 0$ allein nicht aus, denn sie liefert zunächst nur mögliche Kandidaten. Erst eine zusätzliche Prüfung entscheidet, ob tatsächlich ein Extrempunkt vorliegt oder lediglich ein Punkt mit waagerechter Tangente. Genau diese zusätzliche Information liefert die zweite Ableitung.

ⓘ **Entscheidung mit der Steigung der Ableitung (7fNcMv)**



In Aufgabe 5.27 wurde bereits eine Funktion zusammen mit ihren Ableitungen gezeichnet (siehe rechts). Anhand dieser Abbildung lässt sich gut erkennen, wann ein Hoch- bzw. Tiefpunkt vorliegt: Entscheidend ist, ob der Graph der ersten Ableitung an der Extremstelle steigt oder fällt.

Ist die Steigung der ersten Ableitung an der Extremstelle positiv (der Graph von f′ steigt dort, z. B. bei $x = 1$), dann ist auch die **zweite Ableitung an der Extremstelle positiv** (denn f″ beschreibt genau diese Steigung). In diesem Fall besitzt die Ausgangsfunktion an der Extremstelle einen **Tiefpunkt**.

Ist die Steigung der ersten Ableitung an der Extremstelle negativ (der Graph von f′ fällt dort, z. B. bei $x = 5$), dann ist auch die **zweite Ableitung an der Extremstelle negativ**. In diesem Fall liegt an der Extremstelle ein **Hochpunkt** der Ausgangsfunktion vor.

Eine rein zeichnerische Kontrolle ist auf Dauer jedoch zu aufwendig. Rechnerisch lässt sich die Entscheidung deutlich einfacher treffen: Es wird die zweite Ableitung f″(x) gebildet und die Extremstelle eingesetzt. Je nachdem, ob f″(x) dort positiv oder negativ ist, kann der Extrempunkt eindeutig als Tief- oder Hochpunkt bestimmt werden.

ⓘ **Notwendige und hinreichende Bedingung (7fNcMv)**

- Die Prüfung, wo überhaupt mögliche Extremstellen liegen könnten, heißt **notwendige Bedingung**. Dafür wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt, also $f'(x) = 0$. Die so gefundenen x-Werte sind zunächst nur Kandidaten für Extremstellen.
- Ob an solchen Extremstellen dann tatsächlich Hoch- oder Tiefpunkte vorliegen, wird mit der **hinreichenden Bedingung** entschieden: Dafür muss $f'(x) = 0$ gelten (also die notwendige Bedingung) und zusätzlich $f''(x) \neq 0$.
  Ist $f''(x) > 0$, liegt ein Tiefpunkt vor; ist $f''(x) < 0$, liegt ein Hochpunkt vor.

Ⓑ **Beispiel**

Im folgenden Beispiel wird die Funktion $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2{,}25x + 0{,}2$ rechnerisch auf Extrempunkte untersucht.

1. **Ableitungen bilden**
   Im ersten Schritt werden immer die ersten beiden Ableitungen gebildet:
   $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2{,}25x + 0{,}2$
   $g'(x) = 3x^2 - 6x + 2{,}25$
   $g''(x) = 6x - 6$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

2. **notwendige Bedingung**
Nun wird mit der ersten Ableitung geprüft, an welchen Stellen die Steigung 0 ist, um mögliche Extremstellen zu finden. Dazu wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt und die entstandene Gleichung mit einem geeigneten Verfahren gelöst. Je nach Grad und Aussehen der ersten Ableitung kann dabei z. B. die pq-Formel, Polynomdivision/ Horner-Schema, Substitution oder Faktorisieren benötigt werden. Daher ist es wichtig, diese Lösungsverfahren zu beherrschen.

notwendige Bedingung: $g'(x) = 0$

$g'(x) = 0$
$0 = 3x^2 - 6x + 2{,}25 \quad | :3$
$0 = x^2 - 2x + 0{,}75 \quad | \text{ pq-Formel}$
$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 0{,}75}$
$x_{E_1} = 1{,}5 \ \wedge \ x_{E_2} = 0{,}5$

Da $g'(x)$ zwei Lösungen hat, gibt es zwei mögliche Extremstellen. Diese müssen nun noch mit der hinreichenden Bedingung überprüft werden.

Von der zeichnerischen Überprüfung ist bekannt:
– Ist die zweite Ableitung an der Extremstelle **positiv**, liegt ein **Tiefpunkt** vor.
– Ist die zweite Ableitung an der Extremstelle **negativ**, liegt ein **Hochpunkt** vor.
– Ist die zweite Ableitung an der Extremstelle **gleich Null**, liegt ein **Sattelpunkt** vor.

3. **hinreichende Bedingung**
Die mit der notwendigen Bedingung ermittelten Extremstellen $x_{E_1} = 1{,}5$ und $x_{E_2} = 0{,}5$ werden nun mit der hinreichenden Bedingung geprüft. So lässt sich entscheiden, ob wirklich ein Extrempunkt vorliegt ($g''(x_E) \neq 0$) und ob es ein Hoch- oder Tiefpunkt ist.

hinreichende Bedingung: $g'(x) = 0 \ \wedge \ g''(x_E) \neq 0$
$g''(1{,}5) = 6 \cdot 1{,}5 - 6 = 3 \quad > 0 \quad \Rightarrow$ TP
$g''(0{,}5) = 6 \cdot 0{,}5 - 6 = -3 \quad < 0 \quad \Rightarrow$ HP

Die hinreichende Bedingung ist in beiden Fällen erfüllt. Damit liegt bei $x_{E_1} = 1{,}5$ ein Tiefpunkt und bei $x_{E_2} = 0{,}5$ ein Hochpunkt vor.

4. **y-Werte bestimmen**
Da Extrempunkte gesucht sind, fehlen zuletzt noch die y-Werte. Dazu werden die Extremstellen in die Ausgangsfunktion eingesetzt.

y-Werte: $g(x) = y$
$g(1{,}5) = 1{,}5^3 - 3 \cdot 1{,}5^2 + 2{,}25 \cdot 1{,}5 + 0{,}2 = 0{,}2$
$g(0{,}5) = 0{,}5^3 - 3 \cdot 0{,}5^2 + 2{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7$

Damit ergibt sich der **Hochpunkt HP(0,5|0,7)** und der **Tiefpunkt TP(1,5|0,2)**.

Beispiel Ⓑ
Im folgenden zweiten Beispiel wird die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 0{,}4$ rechnerisch auf Extrempunkte untersucht.

1. **Ableitungen bilden**
Auch hier werden zunächst die ersten beiden Ableitungen gebildet:
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 0{,}4$
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$
$f''(x) = 6x - 6$

2. **notwendige Bedingung**: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$

$0 = 3x^2 - 6x + 3 \quad | :3$

$0 = x^2 - 2x + 1 \quad |$ pq-Formel

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1}$

$x_{E_1} = 1 \ \wedge \ x_{E_2} = 1$

Für f(x) gibt es demnach nur einen Kandidaten für eine Extremstelle, nämlich $x_E = 1$. Dieser wird nun mit der hinreichenden Bedingung überprüft.

3. **hinreichende Bedingung**: $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x_E) \neq 0$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow$ kein Extrempunkt

Die hinreichende Bedingung ist hier **nicht** erfüllt, weshalb kein Extrempunkt, sondern ein Sattelpunkt vorliegt.

4. **y-Wert bestimmen**

Auch wenn kein Extrempunkt vorliegt, könnte man dennoch die y-Koordinate des Sattelpunktes berechnen.

y-Werte: $f(x) = y$

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 0{,}4 = 1 - 3 + 3 + 0{,}4 = 1{,}4$

Damit ergibt sich der **Sattelpunkt SP(1|1,4)**.

ⓘ **Minimalschreibweise bei der Berechnung von Extrempunkten**

Achtung
Bei der nebenstehenden Rechnung handelt es sich um das **Mindeste**, was Sie bei der Bestimmung von Extrempunkten notieren müssen!

Lösungsverfahren
Bei diesem Beispiel müssen sogar mehrere Lösungsverfahren kombiniert werden.

$f(x) = 0{,}2x^5 + 0{,}5x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$

$f'(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x$

$f''(x) = 4x^3 + 6x^2 - 8x - 8$

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$0 = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x \quad |$ Faktorisieren

$0 = x(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) \quad |$ Satz vom Nullprodukt

$\mathbf{x_1 = 0} \ \vee \ 0 = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \quad |$ Polynomdivision mit $\mathbf{x_2 = 2}$ als Nullstelle

$(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) : (x - 2) = x^2 + 4x + 4 \quad |$ pq-Formel mit dem Quotientenpolynom

$0 = x^2 + 4x + 4$

$x_{3/4} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = -2 \pm 0$

$\mathbf{x_3 = -2}$

$\Rightarrow \ \mathbf{x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2}$

hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \ \wedge \ f''(x_E) \neq 0$

$f''(0) = 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 8 = -8 \quad < 0 \quad \Rightarrow$ HP

$f''(2) = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 8 = 32 + 24 - 16 - 8 = 32 \quad > 0 \quad \Rightarrow$ TP

$f''(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 8 = -32 + 24 + 16 - 8 = 0 \quad = 0 \quad \Rightarrow$ kein Extrempunkt

y-Werte: $f(x) = y$

$f(0) = 0{,}2 \cdot 0^5 + 0{,}5 \cdot 0^4 - \frac{4}{3} \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 = 0$

$f(2) = 0{,}2 \cdot 2^5 + 0{,}5 \cdot 2^4 - \frac{4}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 = -\frac{184}{15} = -12{,}267$

Die gegebene Funktion hat demnach zwei Extrempunkte. Einen Hochpunkt bei HP(0|0) und einen Tiefpunkt bei TP (2|–12,27).

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.80 (cuYZpt)

Bestimmen Sie die Extrempunkte der folgenden Funktionen:

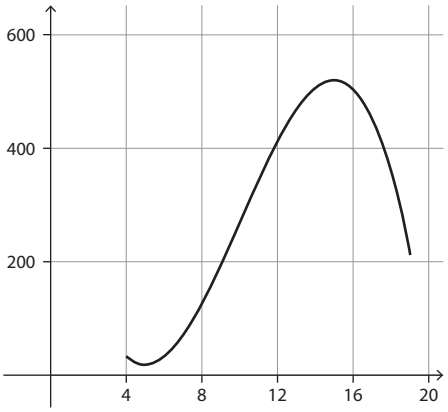
a) $f(x) = x^2 - 10x + 7$
b) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$
c) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$
d) $f(x) = x^4 - 16x^2 + 5$
e) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$
f) $f(x) = 3x^4 - 24x^2 + 9$
g) $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 10$
h) $f(x) = 2x^5 - 20x^3 + 18x$
i) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 6$
j) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

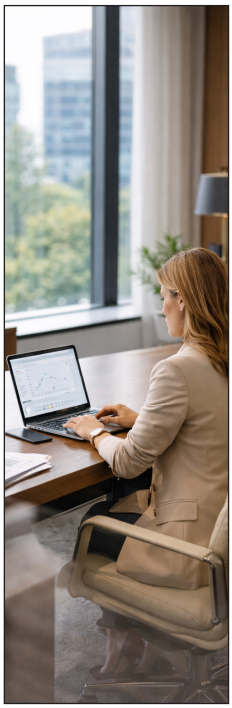
Aufgabe 5.81 (8MyUjV)

Nina wertet für einen Kunden die Besucherzahlen der Unternehmenswebsite mit Google Analytics aus. Die nebenstehende Kurve zeigt den Verlauf an einem typischen Arbeitstag der gleichzeitigen Besucher zwischen 04:00 Uhr und 19:00 Uhr. Die Anzahl der Nutzer kann in diesem Zeitraum näherungsweise durch die Funktion

$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 225x + 520$

beschrieben werden. Dabei steht x für die Uhrzeit (in Stunden), z. B. bedeutet f(8) die Besucherzahl um 08:00 Uhr.

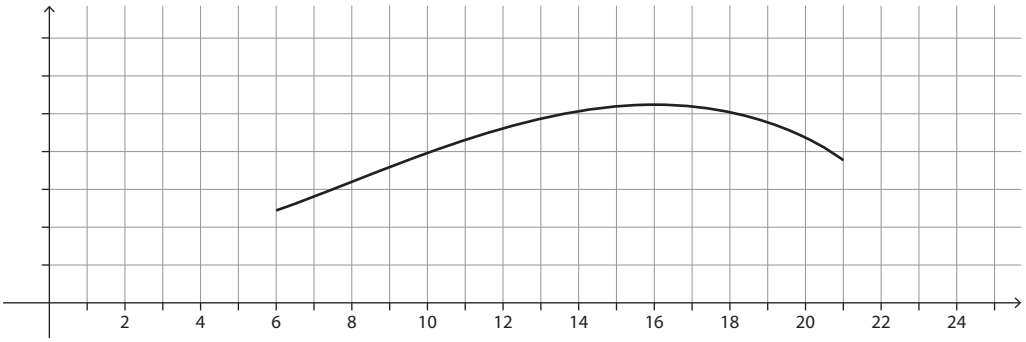




a) Da die Besucherzahlen eng mit den eingehenden Anrufen in dem Unternehmen zusammenhängen, sollen die Arbeitszeiten einer zusätzlichen Bürokraft passend zu den Stoßzeiten geplant werden. Die Bürokraft arbeitet täglich zwei Stunden und soll eine Stunde vor der Spitzenzeit beginnen und eine Stunde nach der Spitzenzeit aufhören.
Bestimmen Sie daher, um wie viel Uhr die Bürokraft mit der Arbeit beginnen muss.
b) Meistens rufen etwa 10 % der Websitebesucher in der Agentur an. Mit wie vielen Anrufen ist daher zu Beginn der Öffnungszeiten um 07:00 Uhr ungefähr zu rechnen?
c) Am 31. Mai wurde ein Spitzenwert von 805 Nutzern gemessen. Um wie viel Prozent liegt dieser Wert über dem in Teilaufgabe a) erwarteten Spitzenwert?

Aufgabe 5.82 (Pr9gDb)

In modernen Wetterstationen werden rund um die Uhr Temperaturdaten automatisch erfasst und gespeichert. Für den Zeitraum zwischen 06:00 Uhr morgens und 21:00 Uhr abends beschreibt der Funktionsgraph der Funktion f(t) modellhaft den Temperaturverlauf an einem bestimmten Tag. Auf diese Weise lassen sich typische Tagesverläufe vergleichen und Extremwerte zuverlässig bestimmen.

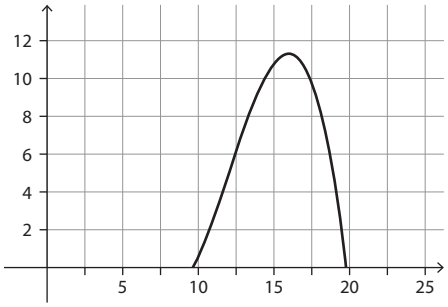


Es gilt: $f(t) = -0{,}01t^3 + 0{,}24t^2 + 6$ (t: Uhrzeit in Stunden, f(t): Temperatur in °C)

a) Berechnen Sie die Temperatur zu Beginn und am Ende des Messzeitraums.
b) Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der die Tageshöchsttemperatur erreicht wird, und berechnen Sie diesen Höchstwert. Entscheiden Sie anschließend, ob es sich um einen Sommertag handelt (Sommertag: Höchsttemperatur über 25 °C).

Aufgabe 5.83 (NHGG2L)

Die nebenstehende Grafik zeigt vereinfacht die Besucherzahl b der drupa im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 19:30 Uhr. Die drupa ist eine internationale Fachmesse in Düsseldorf, findet alle vier Jahre statt und gilt als eine der wichtigsten Leitmessen für Druck-, Packaging- und Medientechnologien. Dort treffen sich Aussteller und Fachbesucher aus aller Welt, um neue Maschinen, Verfahren und Trends kennenzulernen.



Die Besucherzahl b(t) wird in Tausend Personen angegeben und kann näherungsweise durch die Funktion $b(t) = -0{,}05t^3 + 1{,}8t^2 - 19{,}2t + 62{,}5$ beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie, wie viele Besucher sich eine Stunde nach Messebeginn auf dem Messegelände befinden.

b) Ermitteln Sie, zu welcher Uhrzeit die Besucherzahl ihr Maximum erreicht und wie groß dieser Höchstwert ist.

Aufgabe 5.84 (y9prCB)

Eine große Bäckerei stellt morgens Brötchen in mehreren Backläufen her. Zu bestimmten Uhrzeiten läuft die Produktion besonders effizient, zwischendurch können Umrüstungen oder Teigpausen dazu führen, dass die Produktionsrate deutlich sinkt. Die Anzahl der pro Stunde gebackenen Brötchen wird für einen bestimmten Morgen modellhaft durch die Funktion $p(t) = 0{,}2t^3 - 1{,}6t^2 + 3{,}2t$ beschrieben. Dabei steht t für die Uhrzeit (in Stunden) und p(x) für die Produktionsrate (in Hunderten Brötchen pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte der Funktion p(t) im Intervall [0; 5].

b) Deuten Sie die Extrempunkte im Sachzusammenhang: Was bedeutet ein Hochpunkt bzw. ein Tiefpunkt für die Produktionsrate?

c) Zu welchen Uhrzeiten ist die Produktionsrate p(t) gleich 0? Bestimmen Sie die Nullstellen und erläutern Sie kurz, was diese Zeitpunkte im Kontext bedeuten.

d) Berechnen Sie die Produktionsrate zu den Uhrzeiten $t = 1$, $t = 2$ und $t = 3$ und beschreiben Sie, wie sich die Produktion zwischen diesen Zeitpunkten entwickelt.

Aufgabe 5.85 (pQ3uUH)

Bei einem Open-Air-Konzert wird die Lautstärke am Mischpult im Laufe des Abends angepasst. Der Verlauf der gemessenen Lautstärke (in dB) kann näherungsweise durch eine Funktion $L(x) = 0{,}125x^4 - 1{,}5x^3 + 5{,}75x^2 - 7{,}5x + 70$ modelliert werden. Dabei beschreibt x die Zeit in Stunden nach Konzertbeginn ($0 \le x \le 6$).

a) Bestimmen Sie alle Extrempunkte der Funktion L(x).

b) Ist die Musik zu Beginn und am Ende des Abends lauter als im gesamten weiteren Verlauf des Abends?

c) Die Veranstalter geben vor, dass die Lautstärke möglichst im Bereich zwischen 65 dB und 70 dB liegt. Beurteilen Sie mit den Ergebnissen aus a), ob dies durchgängig zutrifft.

Aufgabe 5.86 (KWhp4s)

Eine Agentur testet eine Online-Anzeige über acht Wochen hinweg ($0 \le x \le 5$). Für die Auswertung wird die Klickrate in Abhängigkeit von der Zeit betrachtet. Die Klickrate (in %) wird näherungsweise durch die Funktion $k(x) = -0{,}5x^3 + 4{,}25x^2 - 10{,}25x + 7{,}5$ modelliert.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte und deuten Sie diese im Sachzusammenhang.

b) Prüfen Sie ohne Rechnung, ob es noch höhere Werte im Verlauf der Kampagen gibt. Welche Auswirkung hat dies auf Ihre Aussage von a)?

c) Bestimmen Sie die Nullstellen von k(x) und erläutern Sie, was diese Werte im Kontext aussagen könnten.

d) Für welche Werte von x ist die Klickrate größer als 1 %?
Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise für der Berechnung dieser Werte.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.11 WENDEPUNKTE

Situationsbeschreibung – Wasserrutsche "Blue Vortex"
In einem großen Freizeitbad sorgt die Wasserrutsche *Blue Vortex* für besonderen Nervenkitzel. Direkt nach dem Start geht es zunächst sehr steil bergab, bevor sie den tiefsten Punkt erreicht, um danach noch einmal leicht anzusteigen und kurz darauf wieder in ein Gefälle überzugehen. Für die Konstruktion sind dabei nicht nur die tiefsten und höchsten Stellen wichtig, sondern vor allem die Übergänge im Verlauf, an denen sich das Fahrgefühl deutlich verändert: Nach dem Tiefpunkt nimmt die Steigung zunächst zu, um dann wieder abzuflachen. Genau dort ändert sich die Krümmung der Bahn. Diese Krümmungswechsel sind für die Planung entscheidend, weil sie beeinflussen, wie plötzlich Belastungen entstehen oder abklingen. Damit die Rutsche sicher und angenehm befahrbar bleibt, müssen diese Übergangsbereiche möglichst gleichmäßig gestaltet werden.

Der Verlauf der Rutschbahn wird näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben:
$r(x) = 0{,}001x^5 - 0{,}029x^4 + 0{,}2688x^3 - 0{,}7344x^2 - 1{,}02x + 5{,}1$
Dabei geben x und r(x) die Werte jeweils in 10 m an (d. h. eine Einheit entspricht 10 Metern).

Definition (aUWPzL) ⓘ
Zunächst werden einige Begriffe definiert: Ein **Wendepunkt** ist ein Punkt auf dem Funktionsgraphen, an dem der Graph seine Krümmung wechselt. Der zugehörige x-Wert heißt **Wendestelle**. Der Wendepunkt wird als Punkt (x|y) angegeben, wobei x die Wendestelle und $y = f(x)$ der zugehörige Funktionswert ist.

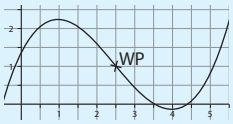
Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Funktionsgraphen, an dem der Graph vom "nach unten gekrümmt" zum "nach oben gekrümmt" wechselt – oder umgekehrt. Oft wirkt es so, als würde der Graph an dieser Stelle "von links nach rechts umklappen".

Für Wendepunkte gilt grundsätzlich: $f''(x) = 0$.

Erläuterung ⓘ
Doch warum spielt bei Wendepunkten gerade $f''(x)$ die entscheidende Rolle? Dazu hilft die Erinnerung: $f'(x)$ beschreibt die Steigung des Graphen. Die zweite Ableitung $f''(x)$ beschreibt wiederum, wie sich diese Steigung verändert.

Ein Wendepunkt liegt genau dort, wo sich dieses "Steigungsverhalten" ändert. An der Wendestelle ist die Steigungsänderung für einen Moment Null – deshalb gilt dort als notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$.

Oft wird ein Wendepunkt auch als "steilste Stelle" des Graphen bezeichnet. Das ist als anschauliche Beschreibung hilfreich, gilt aber immer nur bezogen auf einen betrachteten Be-



reich. Häufig bietet sich der Abschnitt zwischen Hoch- und Tiefpunkt an: In diesem Intervall verläuft der Graph von einem Extrempunkt zum anderen und erreicht dabei typischerweise an der Wendestelle die größte (bzw. kleinste) Steigung. In anderen Intervallen kann die "steilste Stelle" jedoch auch am Rand liegen oder – bei komplizierteren Funktionen – nicht eindeutig sein.

ⓘ **Wendepunkt oder nicht?**

Bei Wendepunkten gilt zunächst als notwendige Bedingung, dass die zweite Ableitung an dieser Stelle Null ist. Damit werden mögliche Wendestellen gefunden. Aus $f''(x) = 0$ folgt jedoch noch nicht automatisch ein Wendepunkt, denn diese Bedingung liefert zunächst nur Kandidaten.

Es wird also ein Verfahren benötigt, mit dem sich entscheiden lässt, ob an einer gefundenen Stelle tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt. Dazu reicht $f''(x) = 0$ allein nicht aus. Erst eine zusätzliche Prüfung entscheidet, ob wirklich ein Wendepunkt vorliegt oder lediglich eine Stelle, an der $f'''(x) = 0$ ist.

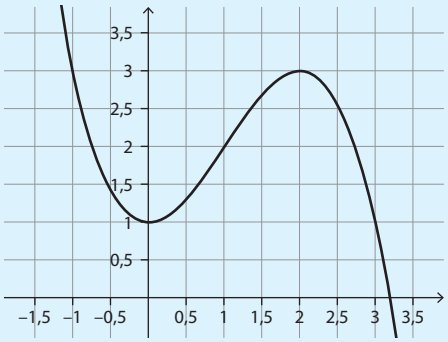
Eine rein zeichnerische Kontrolle ist auf Dauer zu aufwendig. Rechnerisch lässt sich die Entscheidung einfacher treffen: Es wird zusätzlich die dritte Ableitung betrachtet. Ist die dritte Ableitung an der Wendestelle ungleich Null, liegt tatsächlich ein Wendepunkt vor.

ⓘ **Notwendige und hinreichende Bedingung**

- Die Prüfung, wo überhaupt mögliche Wendestellen liegen könnten, heißt **notwendige Bedingung**. Dafür wird die zweite Ableitung gleich Null gesetzt, also $f''(x) = 0$. Die so gefundenen x-Werte sind zunächst nur Kandidaten für Wendestellen.
- Ob an solchen Wendestellen dann tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt, wird mit der **hinreichenden Bedingung** entschieden: Dafür muss $f''(x) = 0$ gelten (also die notwendige Bedingung) und zusätzlich $f'''(x) \neq 0$.

Ⓑ **Beispiel**

Der nebenstehende Funktionsgraph hat die Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 1$. Im gegebenen Koordinatensystem lässt sich die Wendestelle gut erkennen. Überlegen Sie daher zunächst, welche Koordinaten der Wendepunkt hat. Doch wie kann dieser Punkt rechnerisch ermittelt werden? Dazu werden nun die notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkte benötigt.



1. **Ableitungen bilden**

   Im ersten Schritt werden die ersten drei Ableitungen gebildet:

   $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 1$

   $f'(x) = -1{,}5x^2 + 3x$

   $f''(x) = -3x + 3$

   $f'''(x) = -3$

2. **notwendige Bedingung**

   Nun wird mit der zweiten Ableitung geprüft, an welchen Stellen die "Steigungsänderung" Null ist, um mögliche Wendestellen zu finden. Dazu wird die zweite Ableitung gleich Null gesetzt und die entstandene Gleichung mit einem geeigneten Verfahren gelöst. Je nach Grad und Aussehen der zweiten Ableitung kann dabei z. B. die pq-Formel, Polynomdivision/Horner-Schema, Substitution oder Faktorisieren benötigt werden. Daher ist es wichtig, diese Lösungsverfahren zu beherrschen.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 0$

$0 = -3x + 3 \quad | +3x$

$3x = 3 \quad | :3$

$x_W = 1$

Da $f''(x)$ eine Lösungen hat, gibt es eine mögliche Wendestelle. Diese muss nun noch mit der hinreichenden Bedingung überprüft werden.

3. **hinreichende Bedingung**
   Die mit der notwendigen Bedingung ermittelte Wendestelle $x_W = 1$ wird nun mit der hinreichenden Bedingung geprüft.

   hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \ \wedge \ f'''(x_W) \neq 0$

   $f'''(1) = -3 \quad \neq 0$

   Die dritte Ableitung ist hier sogar konstant –3 und damit unabhängig von x. Die hinreichende Bedingung ist somit erfüllt. Damit liegt bei $x_W = 1$ ein Wendepunkt vor.

4. **y-Wert bestimmen**
   Da der Wendepunkte gesucht ist, fehlt zuletzt noch der y-Wert. Dazu wird die Wendestelle in die Ausgangsfunktion eingesetzt.

   y-Wert: $f(x) = y$

   $f(1) = -0{,}5 \cdot 1^3 + 1{,}5 \cdot 1^2 + 1 = -0{,}5 + 1{,}5 + 1 = 2$

Damit ergibt sich der **Wendepunkt WP(1|2)**.

Minimalschreibweise bei der Berechnung von Wendepunkten

$f(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 2$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x$

$f''(x) = 2x^2 + 2x - 12$

$f'''(x) = 4x + 2$

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$0 = 2x^2 + 2x - 12 \quad | :2$

$0 = x^2 + x - 6 \quad | \text{pq-Formel}$

$x_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}5^2 + 6}$

$x_1 = 2 \ \vee \ x_2 = -3$

hinreichende Bedingung: $f'''(x) \neq 0$

$f'''(2) = 4 \cdot 2 + 2 = 8 + 2 = 10 \quad \neq 0$

$f'''(-3) = 4 \cdot (-3) + 2 = -12 + 2 = -10 \quad \neq 0$

y-Werte: $f(x) = y$

$f(2) = \frac{1}{6} \cdot 2^4 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 = -\frac{50}{3} = -16{,}667$

$f(-3) = \frac{1}{6} \cdot (-3)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 2 = -\frac{95}{2} = -47{,}5$

Die gegebene Funktion hat demnach zwei Wendepunkte: $WP_1(2|-16{,}67)$ und $WP_2(-3|-47{,}5)$

Achtung
Bei der nebenstehenden Rechnung handelt es sich um das **Mindeste**, was Sie bei der Bestimmung von Wendepunkten notieren müssen!

Aufgabe 5.87 **(DuWQJU)**

Bestimmen Sie die Wendepunkte folgender Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

b) $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - x + 4$

c) $h(x) = 3x^3 + 3x^2 - 12x + 5$

d) $k(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 2$

Finden Sie eine Erklärung?
Vergleichen Sie Funktion und Lösung von 5.88 a) mit Funktion und Lösung von 5.87 a). Wie erklären Sie sich die Gemeinsamkeiten trotz der Unterschiede?

Aufgabe 5.88 (mJxUb3)

Bestimmen Sie die Wendepunkte folgender Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
b) $f(x) = x^4 - 4x^3$
c) $f(x) = 3x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 90x^2$
d) $f(x) = 2x^6 - 15x^5 + 10x^4 + 80x^3$
e) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 1$
f) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2$
g) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 4x$
h) $f(x) = 3x^6 - 6x^5 - 3x^4$
i) $f(x) = x^6 - 12x^4 + 9x^2$
j) $f(x) = 2x^2 + 4x + 8$

Aufgabe 5.89 (pbjkps)

Bestimmen Sie die Wendepunkte der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$
b) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 2x - 1$
c) $f(x) = 0{,}05x^5 - 0{,}5x^4 + \frac{11}{6}x^3 - 3x^2 + 3$
d) $f(x) = 0{,}05x^5 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x$
e) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{5}{6}x^4 + 4{,}5x^2 + x$
f) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{29}{12}x^4 + 50x^2 - 5$
g) $f(x) = \frac{1}{42}x^7 - \frac{1}{15}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{3}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 9x^2 + 3x + 2$
h) $f(x) = \frac{1}{56}x^8 - \frac{7}{15}x^6 + \frac{49}{12}x^4$

Aufgabe 5.90 (kCaRKZ)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$

a) Bestimmen Sie die Wendestelle rechnerisch. Nutzen Sie dazu die notwendige und hinreichende Bedingung.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
c) Bestimmen Sie die Tangente im Wendepunkt.
d) Überprüfen Sie, ob der Wendepunkt zwischen den Extrempunkten liegt.

Aufgabe 5.91 (JrfApn)

Gegeben sind die Funktionen

- $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x$
- $h(x) = 0{,}5x^3 - 3x + 4$

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass beide Funktionen dieselbe Wendestelle besitzen.
b) Bestimmen Sie die Wendepunkte beider Funktionen.
c) Skizzieren Sie beide Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem und markieren Sie die Wendepunkte.
d) Beschreiben Sie kurz, was die +4 im Term geometrisch bewirkt.

Aufgabe 5.92 (xEgCbw)

Gegeben ist die Funktion $k(x) = x^4 - 4x^3$

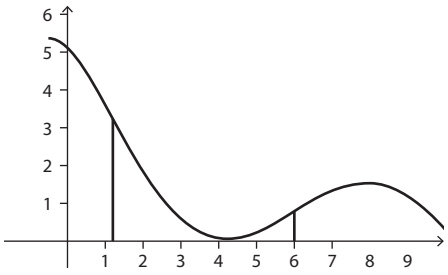
a) Bestimmen Sie alle Nullstellen.
b) Bestimmen Sie die Extrempunkte und Wendepunkte.
c) Zeichnen Sie k(x) und k'(x) in ein Koordinatensystem (zwei verschiedene Farben) und erläutern Sie anhand der Zeichnung den Zusammenhang zwischen Extremstellen und Nullstellen der Ableitung.
(Koordinatensystem: x-Achse: $-1 \le x \le 4$ mit 1 cm = 1 Einheit; y-Achse: $-30 \le y \le 5$ mit 1 cm = 5 Einheiten)

Aufgabe 5.93 (BpFpqc)

Hinweis
Achten Sie bei der Berechnung der Wendestellen auf Hinweise in der Zeichnung.

Schauen Sie sich noch mal die Situationsbeschreibung mit der Wasserrutsche an.

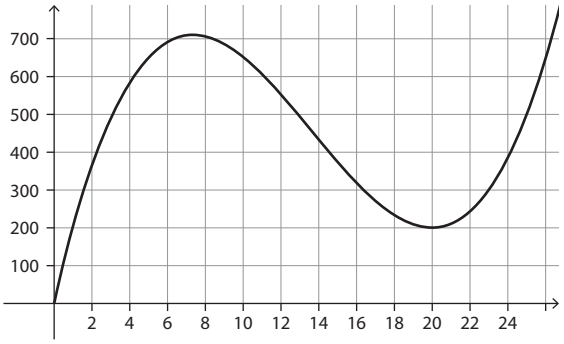
a) Bestimmen Sie die beiden relevanten Wendepunkte dieser Funktion.
b) Unter anderem befinden Sich an den Wendepunkten Stützpfeiler (siehe Zeichnung). Welche Länge haben diese jeweils?



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.94 (bgBdg6)

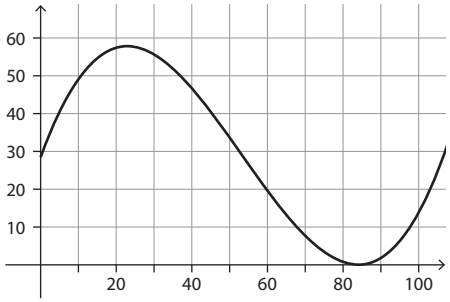
In einen Stausee strömt Wasser aus einem kleinen Fluss. Die Zuflussrate kann geregelt werden und lässt sich im Zeitraum von 0 bis 24 Stunden durch die Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 - 20{,}5x^2 + 220x$ modellieren (x in h, f(x) in m^3/h).



a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Zuflussrate ihren größten Wert annimmt.
b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die Zuflussrate am stärksten abnimmt.

Aufgabe 5.95 (1ftemf)

Die momentane Geschwindigkeit eines Autos wird im Zeitraum von 0 bis 100 Sekunden durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{2000}x^3 - \frac{2}{25}x^2 + \frac{357}{125}x + \frac{3528}{125}$ modelliert (x in s, f(x) in km/h).



a) Wie schnell ist das Auto zu Beginn?
b) Wann erreicht das Auto die maximale Geschwindigkeit und wie groß ist diese?
c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt.
d) Wann steht das Auto kurzfristig? Hinweis: Eine Nullstelle ist bei $x = -8$.
e) Wodurch könnte die Schwankung der Geschwindigkeit verursacht werden?

Aufgabe 5.96 (9ugQqu)

Um den Ertrag einer angebauten Weizensorte zu steigern, wird Dünger eingesetzt. Eine zu hohe Düngermenge kann jedoch dazu führen, dass der Ertrag wieder sinkt. Der Zusammenhang wird modellhaft beschrieben durch $f(x) = -90x^3 + 12x^2 + 12x + 6$, wobei x die Düngermenge in Tonnen pro Hektar und f(x) den Ertrag in Tonnen pro Hektar angibt.

a) Bestimmen Sie den Ertrag bei einer Düngermenge von $x = 0{,}2$ t/ha.
b) Welche Düngermenge würden Sie dem Landwirt empfehlen?
c) Bestimmen Sie die Wendestelle und berechnen Sie die dortige Steigung.
d) Deuten Sie das Ergebnis aus c) im Sachzusammenhang: Was sagt die Wendestelle über die Veränderung des Ertrags bei weiter steigender Düngermenge aus?

Aufgabe 5.97 (LJuAZA)

Die elektrische Leistungsaufnahme eines Schulgebäudes wird an einem Vormittag modelliert durch $L(t) = -0{,}2t^3 + 3t^2 + 10t + 40 \quad (0 \le t \le 6)$ t in Stunden seit 07:00 Uhr, L(t) in kW.

a) Bestimmen Sie den Wendepunkt.
b) Beschreiben Sie, was der Wendepunkt für den Verlauf bedeutet.
c) Bestimmen Sie die Steigung im Wendepunkt und deuten Sie sie.

Aufgabe 5.98 (ejHtwg)

Drei Messkurven (A, B, C) haben jeweils genau einen Wendepunkt. Zu jeder Kurve ist bekannt, wo die Wendestelle liegt:

- Kurve A: Wendestelle bei $x = 0$
- Kurve B: Wendestelle bei $x = 1$
- Kurve C: Wendestelle bei $x = -2$

Ordnen Sie zu den Kurven die passende Funktion zu und begründen Sie rechnerisch:

- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
- $g(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$
- $h(x) = -x^3 + 5x + 2$

◒ **Aufgabe 5.99 (mSmQux)**

Ein Schüler behauptet zur Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$:
"Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$. Dann $f(1) = 3$. Also WP(1|3)."
Prüfen Sie den Rechenweg: Was ist korrekt, was nicht? Korrigieren Sie das Ergebnis vollständig und geben Sie den Wendepunkt an. Wo würden Sie Teilpunkte geben und wo nicht?

◒ **Aufgabe 5.100 (tgXxC9)**

Gesucht ist eine Funktion dritten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten, die …

- bei $x = 2$ einen Wendepunkt hat,
- und zusätzlich $f(0) = 1$ erfüllt.

a) Stellen Sie eine passende Funktion auf (es gibt viele mögliche Lösungen).
b) Berechnen Sie zur Kontrolle die Wendestelle.
c) Prüfen Sie die hinreichende Bedingung und geben Sie den Wendepunkt an.

○ **Aufgabe 5.101 (J3i2sy)**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$.

a) Bestimmen Sie den Wendepunkt rechnerisch.
b) Kreuzen Sie die passenden Aussagen an (mehrere können richtig sein) und begründen Sie kurz mit der Ableitungen (also der Steigung der Funktion):
   □ Vor der Wendestelle nimmt die Steigung zu.
   □ Vor der Wendestelle nimmt die Steigung ab.
   □ Nach der Wendestelle nimmt die Steigung zu.
   □ Nach der Wendestelle nimmt die Steigung ab.

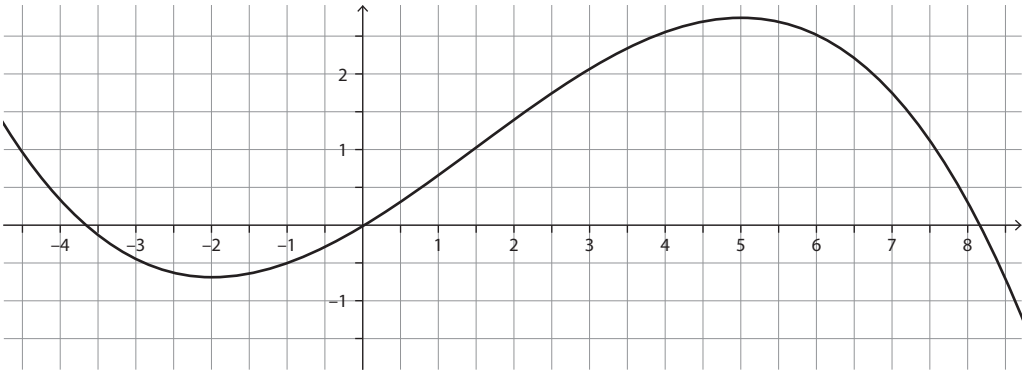
● **Aufgabe 5.102 (q1RiGr)**

Von der Ableitung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades liegen drei Punkte vor:
$P_1(0|5)$, $P_2(1|-4)$, $P_3(2|-7)$.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c, indem Sie aus den drei Punkten ein lineares Gleichungssystem aufstellen und lösen. Geben Sie anschließend $f'(x)$ an.
b) Bestimmen Sie $f''(x)$ und $f'''(x)$.
c) Berechnen Sie die Wendestelle x_W der Ausgangsfunktion $f(x)$ mithilfe der Bedingungen $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$.
   Der zugehörige Wendepunkt lautet zur weiteren Rechnung: WP(2|8).
d) Bestimmen Sie die Tangente im Wendepunkt, indem Sie die Steigung $m = f'(2)$ berechnen und anschließend die Tangentengleichung aufstellen.

◒ **Aufgabe 5.103 (XaevjS)**

Im Koordinatensystem ist der Graph einer Funktion f dargestellt.



Skizzieren Sie ggf. auch das Ausgangs-Koordinatensystem mit der Funktion f in Ihr Heft.

Die in das obige Koordinatensystem zu zeichnenden Ableitungen müssen nur grob dem Verlauf folgen. Sie müssen nicht maßstabsgetreu sein!

a) Zeichnen Sie durch die Extrem- und Wendepunkte senkrechte, gestrichelte Linien.
b) Skizzieren Sie die Graphen aller drei Ableitungen.
c) Markieren Sie im Graphen von f alle Extrempunkte und Wendepunkte von f.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.12 FUNKTIONSBESTIMMUNG (STECKBRIEFAUFGABEN)

Situationsbeschreibung – Grippewelle
In Dortmund wird der Verlauf einer winterlichen Grippewelle über mehrere Wochen hinweg beobachtet. Als Beginn der Auswertung gilt der Zeitpunkt, an dem die gemeldeten wöchentlichen Fallzahlen erstmals eine relevante Größenordnung erreichen.

Die Messreihe startet in Kalenderwoche 47. Zu diesem Zeitpunkt werden 45 Grippefälle erfasst. In den folgenden Wochen steigt die Zahl der Erkrankungen zunächst deutlich an, da sich Infektionen in der kalten Jahreszeit leichter verbreiten (mehr Zeit in Innenräumen, mehr Kontakte, weniger Lüften). Den Höchststand erreicht die Welle nach 9 Wochen mit 1290 Fällen; nach 18 Wochen werden keine Grippeinfektionen mehr gemeldet. Gegen Ende flacht der Verlauf typischerweise spürbar ab, weil sich das Infektionsgeschehen "ausläuft" und weniger Neuinfektionen auftreten.

Für diese modellhafte Betrachtung wird angenommen, dass der wöchentliche Krankheitsverlauf durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben werden kann. Dabei steht x für die Anzahl der Wochen seit KW 47 (also x = 0 entspricht KW 47) und f(x) für die Anzahl der Grippefälle in der jeweiligen Woche.

Das wird benötigt (DpA5ij) ⓘ
Um sogenannte Steckbriefaufgaben lösen zu können, müssen zwei Inhalte wieder präsent sein: Zum einen die Themen aus Kapitel 5.10 "Extrempunkte" und 5.11 "Wendepunkte". Zum anderen das Lösen linearer Gleichungssysteme (LGS), insbesondere mit dem Gauß-Verfahren aus Kapitel 4.9 "Quadratische Funktionen mit LGS bestimmen". Wer diese drei Bausteine sicher beherrscht, kann das aktuelle Kapitel deutlich leichter nachvollziehen.

Im Detail wichtig ist, …
… dass der y-Wert eines Punktes mit f(x) = y bestimmt wird.
… dass die Steigung einer Funktion mit der ersten Ableitung bestimmt wird.
… dass bei Extrempunkten $f'(x) = 0$ gilt.
… dass bei Wendepunkten $f''(x) = 0$ gilt.
… wie lineare Gleichungssysteme aufgestellt werden.
… wie lineare Gleichungssysteme mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren gelöst werden.

Falls die linearen Gleichungssysteme nicht mehr sicher sitzen, lohnt sich ein kurzer Blick zurück in das genannte Kapitel, um die Grundlagen selbstständig aufzufrischen. Hier kann auch Kapitel 4.8 "Lineare Gleichungssysteme (drei Unbekannte)" noch einmal helfen.

In der folgenden Aufgabe gibt es anschließend mehrere Möglichkeiten, das Wissen zu linearen Gleichungssystemen zu überprüfen.

Ⓑ **Beispiel**

Das Grundprinzip von Steckbriefaufgaben ist immer gleich: Aus den gegebenen Eigenschaften (z. B. Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte) werden Gleichungen aufgestellt. Diese Gleichungen werden anschließend als lineares Gleichungssystem gelöst.

Eine typische Steckbriefaufgabe könnte so lauten:
Gesucht ist eine ganzrationale Funktion zweiten Grades, deren Graph bei $x = -1$ eine Nullstelle besitzt und im Punkt $TP(0{,}5|-2{,}25)$ einen Tiefpunkt hat.

Ziel ist es, eine Funktionsgleichung zu finden, die beide Bedingungen erfüllt. Das Vorgehen läuft in drei Schritten ab.

1. **Allgemeine Funktionsgleichung und Ableitungen notieren**
   Da eine Funktion zweiten Grades gesucht ist, wird mit der allgemeinen quadratischen Funktion gestartet:
   $f(x) = ax^2 + bx + c$
   $f'(x) = 2ax + b$
   $f''(x) = 2a$

2. **Bedingungen auswerten und Gleichungen aufstellen**
   Für ein lineares Gleichungssystem werden genauso viele unabhängige Gleichungen benötigt, wie Unbekannte vorhanden sind. Hier sind das drei Unbekannte: a, b und c.
   In der Aufgabenstellung steht "Nullstelle" und "Tiefpunkt". Das sind zwar zwei Angaben, aber daraus entstehen drei Gleichungen:

   Bedingung 1: Nullstelle bei $x = -1$
   Eine Nullstelle bedeutet: $f(-1) = 0$

   $f(-1) = 0 \;\Rightarrow\; a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \;\Rightarrow\; a - b + c = 0$

   Bedingung 2: Der Punkt $TP(0{,}5|-2{,}25)$ liegt auf dem Graphen
   Also gilt: $f(0{,}5) = -2{,}25$

   $f(0{,}5) = -2{,}25 \;\Rightarrow\; a \cdot 0{,}5^2 + b \cdot 0{,}5 + c = -2{,}25 \;\Rightarrow\; 0{,}25a + 0{,}5b + c = -2{,}25$

   Bedingung 3: Tiefpunkt bedeutet Extrempunkt
   In Extrempunkten gilt: $f'(x) = 0$. Also muss bei $x = 0{,}5$ gelten:

   $f'(0{,}5) = 0 \;\Rightarrow\; 2a \cdot 0{,}5 + b = 0 \;\Rightarrow\; a + b = 0$

3. **Lineares Gleichungssystem lösen**
   Daraus ergibt sich also das folgende Gleichungssystem:
   $a - b + c = 0$
   $0{,}25a + 0{,}5b + c = -2{,}25$
   $a + b = 0$

   und daraus die Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & -2{,}25 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Löst man das Gleichungssystem, erhält man die Koeffizienten $a = 1$, $b = -1$ und $c = -2$.
Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f(x) = x^2 - x - 2$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.104 (eHSbDb)

Als Einstieg in die Steckbriefaufgaben folgen zunächst ein paar Übungen zum Aufstellen und Lösen linearer Gleichungssysteme. Bestimmt werden soll eine quadratische Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, deren Graph durch die drei angegebenen Punkte verläuft. Aus den Punktbedingungen ist ein lineares Gleichungssystem für a, b und c aufzustellen und zu lösen. Anschließend ist die zugehörige Funktionsgleichung anzugeben.

a) A(–2|7), B(2|–1), C(4|1)
b) A(–2|–7), B(1|2), C(3|2)
c) A(–4|28), B(0|4), C(2|0)
d) A(–1|2,5), B(1|–7,5), C(3|–5,5)
e) A(–2|–14), B(1|–2), C(3|–14)
f) A(–6|8), B(–2|2), C(4|8)

Hinweis
Arbeiten Sie hier mit den genauen Ergebnissen, notfalls auch mit Brüchen.

Aufgabe 5.105 (eYatmb)

Als Zusatz- und Ergänzungsaufgabe werden die in der vorherigen Aufgabe bestimmten Funktionsgleichungen nun mithilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktform umgeformt. Falls nötig, kann dazu Kapitel 4.3 "Scheitelpunktform vs. Normalform" noch einmal wiederholt werden.

Lösungen zu 5.104
a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$
b) $f(x) = -0{,}6x^2 + 2{,}4x + 0{,}2$
c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{10}{3}x + 4$
d) $f(x) = 1{,}5x^2 - 5x - 4$
e) $f(x) = -2x^2 + 2x - 2$
f) $f(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2$

Aufgabe 5.106 (eLt55T)

Ordnen Sie den Textbeschreibungen die passenden Bedingungen für die Funktionsgleichungen zu. Dabei sind auch Mehrfachzuordnungen möglich und zum Teil erforderlich.

1	Der Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.		A	$f(0) = 3$
2	Die Tangente an den Graphen von f bei $x = 1$ ist parallel zur Geraden $y = -3x + 2$.		B	$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$
3	Der Graph von f geht durch den Punkt P(–2|5).		C	$f''(-1) = 0$
4	Der Graph von f schneidet die x-Achse bei $x = 4$.		D	$f'(4) = 0$
5	Der Graph von f berührt die x-Achse bei $x = 4$.		E	$f'(1) = -3$
6	Der Graph von f hat bei $x = -1$ einen Wendepunkt.		F	$f(4) = 0$
7	Der Graph von f hat bei $x = -1$ eine waagerechte Wendetangente.		G	$f'(0) = 2$
8	Der Graph von f schneidet die y-Achse bei $y = 3$.		H	$f(-2) = 5$
9	Der Graph von f hat an der Stelle $x = 0$ die Steigung 2.		I	$f'(-1) = 0 \wedge f''(-1) = 0$
10	Der Graph von f hat bei $x = 0$ einen lokalen Extrempunkt.		J	$f'(0) = 0$

Aufgabe 5.107 (8wUgQp)

Übersetzen Sie die folgende Graphenbeschreibung – wie in den vorherigen Beispielen – in passende Bedingungen an die Funktionsgleichung:
Der Graph einer ganzrationalen Funktion fünften Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Er besitzt einen Tiefpunkt in TP(3|–4) und hat an der Stelle $x = 0{,}8$ die Steigung –1,2.

Aufgabe 5.108 (Qss29W)

Welche der folgenden drei Gleichungen entspricht der Bedingung $f'(-4) = -2$, wenn die Funktion die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat?

1) $-8a + 4b - 2c + d = -4$
2) $48a - 8b + c = -2$
3) $64a + 16b + 4c + d = -2$

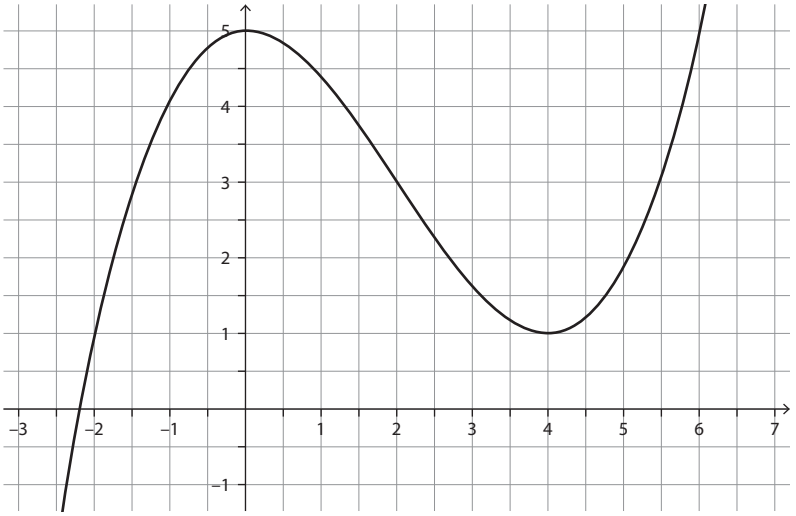
◒ **Aufgabe 5.109 (QJbXHa)**
Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist im Ursprung tangential zur x-Achse (berührt dort also die x-Achse) und besitzt im Punkt P(–3|0) die Steigung 9.

◒ **Aufgabe 5.110 (hTt7Lu)**
Gesucht ist eine achsensymmetrische Funktion vierten Grades, die bei x = 2 eine Nullstelle besitzt. Außerdem hat der Graph im Punkt P(1|–6) eine Tangente mit der Steigung m = –2.

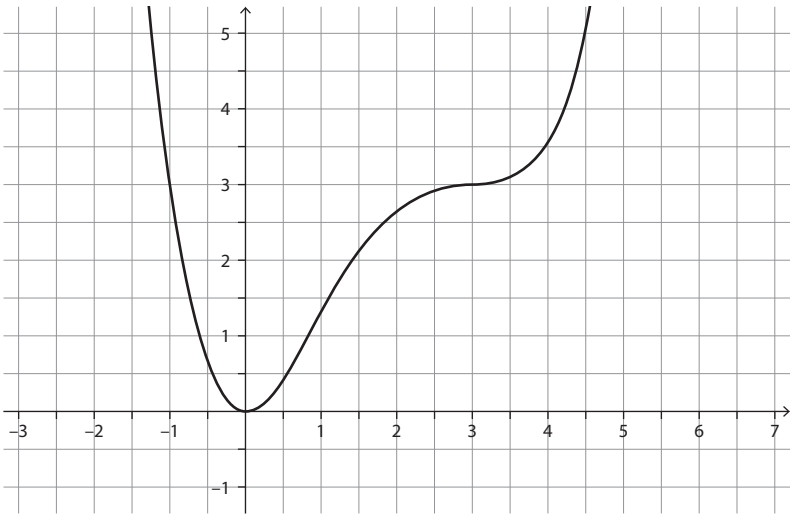
◒ **Aufgabe 5.111 (4P7yng)**
Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph bei x = 0 eine Wendestelle besitzt und die x-Achse bei x = –2 schneidet. Die zugehörige Wendetangente hat die Gleichung $h(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

● **Aufgabe 5.112 (F5w4fD)**
Die Skizze zeigt zwei Graphen ganzrationaler Funktionen: Eine der Funktionen ist dritten, die andere vierten Grades.
Ordnen Sie zunächst jedem Graphen den passenden Grad zu. Notieren Sie anschließend geeignete Punkte bzw. charakteristische Eigenschaften, stellen Sie daraus Bedingungen auf und bestimmen Sie für beide Graphen jeweils eine Funktionsgleichung.

a)



b)



● **Aufgabe 5.113 (6ePAE7)**
Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung und bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion dritten Grades f(x), die den Verlauf modelliert. Stellen Sie passende Bedingungen auf und berechnen Sie anschließend den Funktionsterm.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.13 VOLLSTÄNDIGE FUNKTIONSUNTERSUCHUNG

Situationsbeschreibung – Besucherplattform im Industriepark
In einem Industriepark wird für eine Besucherplattform ein geschwungener Aussichtssteg geplant, der über ein begrüntes Regenrückhaltebecken führt. Die Konstruktion soll ohne zusätzliche Stützen auskommen und an beiden Enden barrierefrei an bestehende Wege anschließen. Damit die Statik, die Entwässerung und die Sicherheit (z. B. Rutschgefahr) geprüft werden können, wird das Höhenprofil des Stegs entlang der Laufrichtung modelliert.

Dazu beschreibt die Funktion h(x) die Höhe des Stegs über dem Boden in Metern. Dabei ist x die horizontale Entfernung vom Startpunkt in Metern. Der betrachtete Abschnitt reicht vom Beginn des Stegs bis zum Ende der Plattform. Für die weitere Planung sind insbesondere die Nullstellen (Anschlusshöhen an den Wegen), Extrempunkte (höchste und tiefste Stellen) sowie Wendepunkte (Übergänge, an denen sich die Krümmung des Profils verändert und das Gefälle "anders wirkt") relevant.

Als Modellfunktion wird verwendet:
$h(x) = 0{,}0001x^4 - 0{,}0288x^2 + 2{,}0736 \quad (-15 \le x \le 15)$

Funktionsuntersuchung
In den vorherigen Kapiteln wurden die wichtigsten Bausteine der Funktionsuntersuchung schrittweise erarbeitet: verschiedene Verfahren zur Nullstellenberechnung, das Bestimmen von Steigungen über die Ableitung sowie das Ermitteln von Extrempunkten und Wendepunkten über die erste und zweite (bzw. dritte) Ableitung. Dabei stand jeweils ein Teilaspekt im Mittelpunkt, sodass die Methoden zunächst einzeln geübt werden konnten.

In den Aufgaben der letzten Kapitel – besonders in den kompetenzorientierten Beispielen – kamen diese Werkzeuge bereits teilweise gemeinsam vor. Oft musste nebenbei eine Nullstelle bestimmt, eine Steigung interpretiert oder ein Extrempunkt im Kontext gedeutet werden. Dennoch lag der Fokus dort meist auf einem konkreten Hauptthema (z. B. Extrempunkte, Nullstellen oder Wendepunkte), während die Funktionsanalyse eher als Zwischenschritt genutzt wurde.

Dieses Kapitel bündelt nun die gesamte Funktionsuntersuchung ausdrücklich als zusammenhängenden Prozess. Ziel ist es, alle bekannten Rechenschritte systematisch an einer Funktion anzuwenden und die Ergebnisse sinnvoll zu verknüpfen: Nullstellen geben die Schnittpunkte mit der x-Achse und wichtige Intervallgrenzen, Extrempunkte beschreiben die höchsten und tiefsten Stellen des Graphen, Wendepunkte markieren Krümmungswechsel, und die Ableitungen liefern die Begründungen dafür. So entsteht aus einzelnen Techniken ein vollständiges Gesamtbild des Funktionsverlaufs – rechnerisch sauber bestimmt und inhaltlich interpretierbar.

○ **Aufgabe 5.114 (7DvcC7)**

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$

○ **Aufgabe 5.115 (dWvtSM)**

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

b) $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$

c) $g(x) = 2x^3 - 8x^2 - 14x + 20$

d) $g(x) = 0{,}5x^3 - 4{,}5x$

○ **Aufgabe 5.116 (GS4MFF)**

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $h(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $h(x) = x^4 - 8x^2$

c) $h(x) = -x^4 + 4x^3$

d) $h(x) = x^4 - 4x^2 - 5$

◒ **Aufgabe 5.117 (zwhD5K)**

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $p(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $p(x) = x^3 - 6x$

c) $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

d) $p(x) = x^3 - 10{,}5x^2 + 36{,}5x - 42$

◒ **Aufgabe 5.118 (TJH4W6)**

Bestimmen Sie zu jeder Funktion die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

b) $g(x) = 0{,}5x^3 - 3{,}1x^2 - 4x + 8{,}4$

c) $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

d) $i(x) = 2x^4 - 5x^2 - 12$

e) $j(x) = -0{,}25x^4 + x^3 + 2x^2$

f) $k(x) = 1{,}2x^5 - 5{,}25x^4 + 6x^3$

○ **Aufgabe 5.119 (2XU2g7)**

Gegeben ist $h(x) = 0{,}5x^3 - 2x^2 - 2x + 8$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von h.

b) Bestimmen Sie $h'(x)$ und ermitteln Sie daraus alle Extremstellen.

c) Berechnen Sie die Steigung an der Stelle $x = 4$.

d) Bestimmen Sie $h''(x)$ und berechnen Sie den/die Wendestelle/n.

e) Geben Sie den Verlauf des Graphen am linken und rechten Rand (z. B. von oben nach oben) an.

○ **Aufgabe 5.120 (6VqLpe)**

Gegeben ist $q(x) = -0{,}2x^3 + 1{,}5x^2 - 1{,}6x - 1{,}2$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von q.

b) Geben Sie alle drei Ableitungen an.

c) Ermitteln Sie alle Extremstellen und Extrempunkte.

d) Berechnen Sie die Steigung an der Stelle $x = 2$.

e) Berechnen Sie die Wendestelle(n) sowie den/die Wendepunkt(e).

f) Beschreiben Sie den Verlauf in Worten: Start-/Endverhalten, Anzahl der Hoch-, Tief- und Wendepunkt.

g) Skizzieren Sie den Graphen.

○ **Aufgabe 5.121 (58V5yL)**

Gegeben ist $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f.

b) Ermitteln Sie alle Extrempunkte.

c) Berechnen Sie die lokale Änderungsrate in $x = 1$.

d) Berechnen Sie den/die Wendepunkt(e).

e) Geben Sie anhand von Grad und Leitkoeffizient an, wie der Graph "links" und "rechts" verläuft.

f) Zeichnen Sie den Graphen mithilfe der vorherigen Ergebnisse und einer Wertetabelle.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.122 (4GZsZ1) ○

Gegeben ist $g(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{21}{8}x^2 + \frac{37}{4}x + 5$.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von g.
b) Bestimmen Sie g′(x) und ermitteln Sie daraus alle Extremstellen.
c) Berechnen Sie die lokale Änderungsrate an der Stelle x = 2.
d) Bestimmen Sie g″(x) und berechnen Sie die Wendestelle(n).

Aufgabe 5.123 (WKchnL) ●

Beziehen Sie sich auf die Aussichtsplattform in der Situationsbeschreibung.

a) Bestimmen Sie die Gesamtbreite der Plattform.
b) Beurteilen Sie, ob ein durchschnittlich großer Mensch an der höchsten Stelle unter der Plattform hindurchlaufen kann.
c) Bestimmen Sie die maximale Steigung in Grad, die beim Begehen bzw. Verlassen der Plattform überwunden werden muss.

Aufgabe 5.124 (SeccRW) Ⓚ

Bei Hochwasser setzt das THW (Technisches Hilfswerk) mobile Wasseraufbereitung ein. Vor dem Einsatz läuft ein kurzer Funktionstest: Leitungen werden entlüftet, Ventile öffnen schrittweise, die Pumpe regelt sich ein. Die Förderrate wird dabei erfasst, um zu prüfen, ob die Pumpe zuverlässig anläuft, wann sie stabil arbeitet und ob es kritische Phasen mit starkem Anstieg oder Abfall gibt (Lastwechsel/Belastung von Schläuchen und Filtern).
Im Modell beschreibt $w(t) = -0{,}08t^3 + 0{,}96t^2 + 0{,}6t$ die Förderrate in Liter pro Sekunde. Dabei ist t die Zeit in Sekunden ($0 \le t \le 13$).



a) Bestimmen Sie, wann die Pumpe überhaupt fördert und wann nicht. Diese Zeiten markieren Beginn/Ende sinnvoller Förderung.
b) Ermitteln, wann die Förderrate am größten ist, damit der aussagekräftigste Abschnitt des Testlaufs dokumentiert werden kann.
c) Bestimmen, wann sich das Verhalten sichtbar "ändert": Es gibt einen Zeitpunkt, ab dem die Zunahme der Förderrate nicht mehr stärker wird, sondern wieder "abflacht". Dieser Moment ist relevant, weil ab dort ein anderes Regelverhalten vorliegt.
d) Für die Einsatzleitung wird ein Referenzwert benötigt: Wie stark ändert sich die Förderrate genau bei t = 6? Ab einer Änderung der Förderrate von 4 L/s² gilt diese als "stark".
e) Skizzieren Sie den Verlauf so, dass Start-/Endzeiten der Förderung, stärkste Förderung und der "Übergang" im Verlauf erkennbar sind.

Aufgabe 5.125 (sEpPQU) Ⓚ

Nach einem Starkregenereignis überwacht ein Sensor die Wasserhöhe eines Flusses relativ zu einer Referenzmarke (f(t) = 0). Für Einsatzleitung und Anwohner ist wichtig, wie sich der Pegel im Verlauf entwickelt: Wann steigt er besonders schnell, wann wird ein Höchststand erreicht und ab wann entspannt sich die Lage wieder.
Im Modell gilt $f(t) = -0{,}01t^3 + 0{,}12t^2$ mit f(t) in Metern und t in Stunden nach Beginn des Starkregenereignisses ($0 \le t \le 12$).



a) Bestimmen Sie, wann die Warnmarke mit f(t) = 2 erreicht wird, damit bedrohte Stadtteile umgehend evaktuiert werden können.
b) Klären Sie, ob und wann der höchste Pegelstand im betrachteten Zeitraum auftritt, damit entschieden werden kann, wann die Brücke ggf. gesperrt werden muss.
c) Geben Sie die Zeitabschnitte an, in denen der Pegel steigt bzw. fällt, da die Einsatzleitung daraus ableitet, ob weitere Maßnahmen vorbereitet werden müssen oder Entwarnung möglich ist.
d) Für die Planung des Sandsack-Einsatzes ist wichtig, wie schnell der Pegel bei t = 3 steigt. Ermitteln Sie diese Änderungsrate und deuten Sie sie als "m pro Stunde".
e) Es wird ein Zeitpunkt gesucht, an dem sich der Charakter des Anstiegs ändert (von "immer stärker" zu "nicht mehr stärker"). Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt und erläutern Sie kurz, warum er für Prognosen hilfreich ist.

Ⓚ



Aufgabe 5.126 (dHGLpg)

Ein autonomer Shuttlebus reduziert vor einer Haltestelle seine Geschwindigkeit automatisch. Für den Komfort ist wichtig, wann die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt und ob der Bus innerhalb des Bereichs sicher zum Stillstand kommt. Die Geschwindigkeit (in km/h) wird modellhaft beschrieben durch $v(t) = -\frac{1}{90}t^3 + \frac{2}{15}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{5}{2}$ $(0 \le t \le 11.1)$ t in Sekunden.

a) Prüfen Sie zeichnerisch, ob der Shuttle im gesamten Zeitraum [0; 11.1] vorwärts rollt oder ob das Modell zeitweise eine unplausible Rückwärtsfahrt liefert (negatives Vorzeichen von v(t)), um die Modellgüte zu bewerten.

b) Im Betrieb ist festgelegt, dass der Shuttlebus während der Testfahrt nicht schneller als 2,8 m/s fahren darf. In welchem Zeitraum (innerhalb des betrachteten Intervalls) wird diese Vorgabe nicht eingehalten?

c) Im Betrieb gilt eine Toleranzregel: Kurzzeitige Überschreitungen der zulässigen 2,8 m/s sind nur bis höchstens 0,6 m/s erlaubt. Ermitteln Sie rechnerisch, ob und um wie viel die Shuttlebus-Geschwindigkeit diese Toleranzgrenze von 3,3 m/s im betrachteten Zeitraum überschreitet.

d) Lesen Sie aus der Zeichnung ab, nach welcher Zeit der Bus zum Stehen kommt.

e) Der Abbremsvorgang (ab der Höchstgeschwindigkeit) darf nicht länger als 5 Sekunden dauern. Prüfen Sie mit Hilfe vorheriger Ergebnisse, ob diese Vorgabe eingehalten wird.

Ⓚ



Aufgabe 5.127 (buZR9L)

Ein Getränkehersteller kühlt eine Charge in einer Schnellkühlkammer. Entscheidend ist, wann die Zieltemperatur unterschritten wird und wann die Abkühlung besonders "heftig" oder wieder "sanft" wird (Produktqualität/Glasbruchrisiko). Die Temperatur (in °C) wird beschrieben durch $T(t) = 0{,}015t^3 - 0{,}375t^2 + 0{,}75t + 22$ $(0 \le t \le 12)$ t in Minuten.

a) Ermitteln Sie den frühesten Zeitpunkt, zu dem die Zieltemperatur von 7 °C erreicht wird, damit festgelegt werden kann, ab wann die Flaschen ausgeliefert bzw. serviert werden dürfen.

b) Prüfen Sie am Modell, ob die Temperatur am Ende der vorgesehenen Kühlzeit die empfohlene Tiefsttemperatur von 4 °C unterschritten wurde. Formulieren Sie daraus eine kurze Empfehlung für den Hersteller (z. B. Kühlzeit beibehalten/verkürzen).

c) Prüfen, ob die Vorgabe der Qualitätssicherung eingehalten wird: Die Temperatur darf im Kühlprozess zu keinem Zeitpunkt schneller als 3 °C pro Minute abfallen.

d) Eine Charge bleibt versehentlich länger in der Kühlung. Zeichnen Sie den Funktionsverlauf und schätzen Sie ab, ab wann die Temperatur in den kritischen Bereich fällt, in dem Gefrieren wahrscheinlich wird, sodass Flaschen platzen könnten.

Ⓚ



Aufgabe 5.128 (ST5fRa)

In einem Hochregallager fährt ein Regalbediengerät eine Palette auf eine Zielhöhe. Für die Steuerung ist wichtig, wann der Hub am schnellsten läuft, wo die Bewegung umschaltet (sanfter Übergang), und ob die maximale zulässige Höhe sicher eingehalten wird. Die Hubhöhe (in m) ist modelliert durch $h(x) = -0{,}03x^3 + 0{,}12x^2 + 1{,}8x$ $(0 \le t \le 10)$ t in Sekunden.

a) Ermitteln, zu welchen Zeitpunkten im gegebene Intervall die Greifeinheit die Bodenhöhe erreicht, damit Start- und Endpunkte eines Fahrzyklus eindeutig festgelegt werden können.

b) Prüfen Sie, ob im gesamten betrachteten Zeitraum die zulässige Maximalhöhe $h_{max} = 10$ eingehalten wird, um Kollisionen mit Querträgern/Sicherheitszonen auszuschließen.

c) Beurteilen Sie anhand des Funktionsverlaufs und/oder den Ergebnissen aus b), ob die Programmierung der Greifeinheit im Zeitraum zwischen 0 und 6 Sekunden erfolgreich war und die Einheit ausschließlich nach oben fährt oder ob zwischendurch auch Absenkphasen auftreten.

d) Ermitteln Sie den Zeitbereich, in denen die Greifeinheit am schnellsten angehoben wird (größte positive Änderungsrate), um die kritischsten Bewegungsphasen im Hinblick auf Lastpendeln und Verschleiß zu identifizieren. Die Hubbewegung darf dabei die Geschwindigkeit von 2 m/s nicht überschreiten.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.14 VERMISCHTE ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 5.129 (nnhpLq) ○

Bestimmen Sie alle Nullstellen. Nutzen Sie das Horner-Schema oder die Polynomdivision.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
b) $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 4$
c) $h(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$
d) $i(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$
e) $j(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$
f) $k(x) = x^4 - 5x^3 - 3{,}25x^2 + 29{,}75x - 22{,}5$
g) $l(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$
h) $m(x) = 2x^4 - 12x^3 - 10x^2 + 84x + 80$
i) $n(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$
j) $o(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Aufgabe 5.130 (6JxDXB) ○

Lösen Sie jeweils durch Substitution und geben Sie alle reellen Nullstellen an.

a) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
b) $g(x) = x^6 - 5x^3 + 4$
c) $h(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
d) $i(x) = x^6 - 10x^3 + 9$
e) $j(x) = 2x^4 - 18x^2 + 40$
f) $k(x) = x^4 + 2x^2 - 15$
g) $l(x) = x^6 - 13x^3 + 36$
h) $m(x) = 3x^4 - 12x^2 + 12$
i) $n(x) = x^4 - 2x^2 - 8$
j) $o(x) = x^6 - 4x^3 - 12$

Aufgabe 5.131 (uDpaF2) ○

Lösen Sie jeweils durch Faktorisieren und geben Sie alle reellen Nullstellen an.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$
b) $g(x) = 2x^3 + 10x^2 - 12x$
c) $h(x) = -3x^4 + 12x^3 - 12x^2$
d) $i(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2$
e) $j(x) = 4x^3 - 9x$
f) $k(x) = x^5 - 4x^3$
g) $l(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^3$
h) $m(x) = -x^4 - 2x^3 + 15x^2$
i) $n(x) = 3x^6 - 12x^4 + 12x^2$
j) $o(x) = x^6 - 13x^4 + 36x^2$

Aufgabe 5.132 (Ju21b2) ◒

Bestimmen Sie alle Nullstellen.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 - x$
b) $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x$
c) $h(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
d) $i(x) = 3x^3 - 12x$
e) $j(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
f) $k(x) = x^4 - 9x^2$
g) $l(x) = x^3 - 9x$
h) $m(x) = 2x^4 - 8x^2 + 6$
i) $n(x) = x^2 - 6x + 9$
j) $o(x) = x^4 - 16$

Aufgabe 5.133 (cEgiEd) ◒

Bestimmen Sie alle Nullstellen der folgenden Funktionen. Starten Sie mit einem geeigneten Verfahren. Gegebenenfalls müssen Sie Lösungsverfahren kombinieren.

a) $f(x) = 2x^5 - 6x^4 - 8x^3$
b) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 15$
c) $h(x) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$
d) $i(x) = x^5 + 3x^4 - 13x^3 - 15x^2$
e) $j(x) = x^4 + 2x^3 - 15x^2$
f) $k(x) = x^6 - 35x^3 + 216$
g) $l(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$
h) $m(x) = x^5 - 2x^4 - 13x^3 + 26x^2 + 12x - 24$

● **Aufgabe 5.134 (ncdCr6)**

Ein Karton hat ein variables Innenmaß x (in cm). Das Innenvolumen (in cm^3) wird modelliert durch $V(x) = x^3 - 9x^2 + 20x$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von V(x).
b) Interpretieren Sie die Nullstellen im Kontext "Volumen".
c) Für welchen Wert von x ist das Innenvolumen am größten?
d) Bestimmen Sie das maximale Innenvolumen in cm^3.

◒ **Aufgabe 5.135 (7Lh7tQ)**

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:

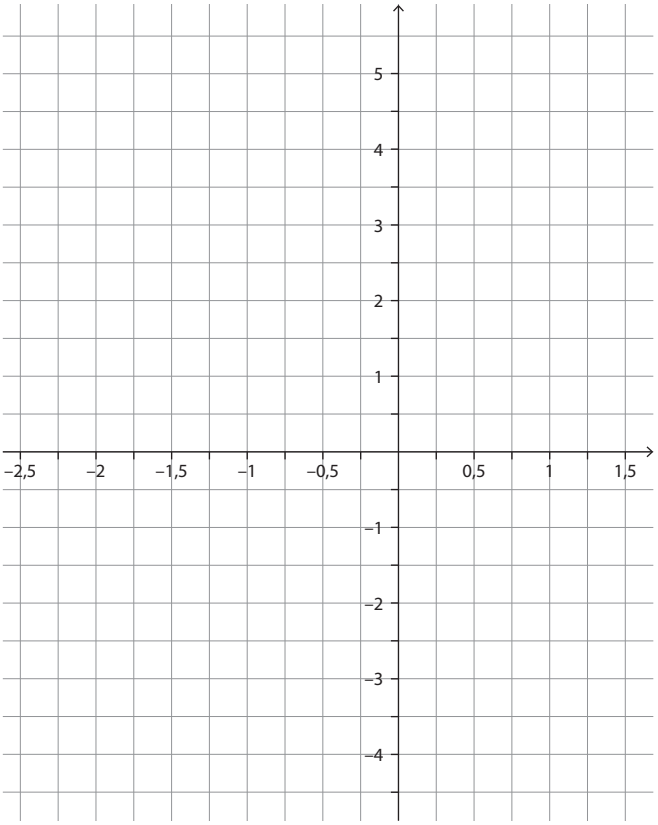
- Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 2$ ($x = 2$ ist doppelte Nullstelle)
- $f(0) = 4$

a) Was bedeutet "doppelte Nullstelle" grafisch gesehen?
b) Stellen Sie f(x) in Faktorschreibweise auf.
c) Wandeln Sie f(x) in die Normalform um.
d) Prüfen Sie mit f(x) aus c) rechnerisch die Nullstellen mit geeigneten Lösungsverfahren.

○ **Aufgabe 5.136 (9U3UtK)**

Gegeben ist $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1)$.

a) Bestimmen Sie die reellen Nullstellen.
b) Begründen Sie, warum nicht alle Faktoren zu reellen Nullstellen führen.
c) Wandeln Sie f(x) in die Normalform um.
d) Zeichnen Sie die Funktion in das Koordinatensystem.



◒ **Aufgabe 5.137 (nFiwDs)**

Gegeben ist $g(x) = 2x^5 - 6x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

a) Begründen Sie ohne Rechnung, warum $x = 0$ sicher eine Nullstelle ist.
b) Bestimmen Sie anschließend alle Nullstellen.
c) Erläutern Sie anhand Ihrer Ergebnisse, an welchen Nullstellen der Graph die x-Achse schneidet und an welchen er sie nur berührt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.138 (y76x2i) ○

Gegeben ist $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$. Es ist bekannt, dass $x = -3$ eine Nullstelle ist.

a) Führen Sie das Horner-Schema mit $x = -3$ durch und bestimmen Sie den Restpolynom-Term.
b) Bestimmen Sie daraus alle Nullstellen von $f(x)$.
c) Entscheiden Sie: Kann $f(x)$ mehr als vier Nullstellen haben? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 5.139 (6ULZpy) ○

Es wird behauptet, dass $x = -2$ eine Nullstelle von $q(x) = x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 24x$ sei.

a) Prüfen Sie die Behauptung durch Einsetzen.
b) Falls sie stimmt: Bestimmen Sie alle Nullstellen.
c) Falls sie nicht stimmt: Finden Sie eine Nullstelle und berechnen Sie damit die übrigen Nullstellen der Funktion.

Aufgabe 5.140 (DqNCuc) Ⓚ

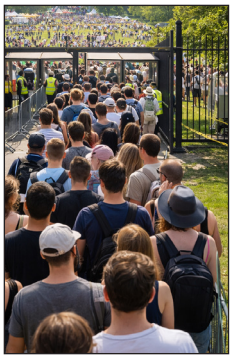


In einer Produktionslinie wird eine Kennzahl N(x) verwendet, die den Nettoausstoß beschreibt: Positive Werte bedeuten verwertbare Produktion, negative Werte deuten auf mehr Ausschuss als Gutteile hin. x ist eine Stellgröße (z. B. Pressdruckstufe). Sofern der Nettoausstoß den Funktionswert null erreicht, ist die Produktion gerade "neutral" – ab hier muss die Linie nachjustiert werden, damit kein Verlust entsteht.

Die Funktion ist gegeben mit: $N(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ (für $x > 0$)

a) Bestimmen, bei welchen Einstellungen der Nettoausstoß genau neutral ist.
b) Kennzeichnen Sie, in welchen Bereichen (zwischen den Null-Werten) die Produktion eher "lohnend" wirkt ($N(x) > 0$) und in welchen eher "kritisch" ($N(x) < 0$).

Aufgabe 5.141 (biHr7K) Ⓚ



Bei einem Sommerfestival wird der Einlass über Scanner geregelt. Zu Beginn der Öffnung entsteht eine Warteschlange. Das Organisationsteam modelliert die Anzahl der wartenden Personen $W(t) = 0{,}002t^3 - 0{,}23t^2 + 6t + 36$ $(0 \le t \le 80)$ (t in Minuten nach Öffnung). Sobald die Schlange vollständig abgebaut ist kann ein Teil des Personals zu anderen Stationen wechseln (Bändchen, Info, Security).

a) Die Leitung will "auf Nummer sicher" gehen: Der Personalwechsel soll 10 Minuten nachdem ersten vollständigen Abbau der Schlange erfolgen. Bestimmen Sie den Zeitpunkt.
b) Aus Sicherheitsgründen dürfen in der Schlange nicht mehr als 90 Personen gleichzeitig anstehen. Muss das Sicherheitskonzept überarbeitet werden oder passt die Vorgabe?
c) Ein Mitarbeiter wettet: „Zu Beginn des Beobachtungszeitraums stehen mehr Personen in der Schlange als am Ende." Hat er die Wette gewonnen?

Aufgabe 5.142 (WpWtRD) Ⓚ



In einem großen Schauaquarium wird nachts automatisch nachgeheizt. Entscheidend ist nicht die Temperatur selbst, sondern die Differenz D(x) zwischen Wasser- und Solltemperatur (in °C).

- $D(x) > 0$: Wasser ist zu warm
- $D(x) < 0$: Wasser ist zu kalt
- $D(x) = 0$: Solltemperatur erreicht

Für die Nacht gilt: $D(t) = \frac{1}{80}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{37}{80}x - \frac{51}{160}$ (x in Stunden nach 22:00 Uhr, $0 \le t \le 9$)

a) Geben Sie die Uhrzeit an, zu denen die Solltemperatur das erste mal erreicht wird.
b) Gibt es im betrachteten Zeitraum weitere Zeitpunkte mit $D(x) = 0$? Was beduetet das für die Funktionsweise der Heizungsanlage?
c) Für das Überleben der Fische ist es wichtig, dass die Temperatur nicht mehr als 0,5 °C von der Solltemperatur abweicht. Falls dies nicht eingehalten wird, muss in ein Techniker bestellt und die Anlage neu justiert werden. Braucht es einen Techniker?

◒ **Aufgabe 5.143 (wrD6Sf)**

Für die folgenden Funktionen sollen die Werte von x ermittelt werden, bei denen der Funktionsterm den Wert 0 annimmt. Je nach Funktion ist dafür ein passendes Lösungsverfahren auszuwählen; in einzelnen Fällen kann es nötig sein, mehrere Verfahren nacheinander einzusetzen.

a) $f(x) = x^6 - 5x^5 - 6x^4$
b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 15x^2$
c) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
d) $f(x) = x^6 - 2x^4 - 15x^2$
e) $f(x) = 2x^3 - 10x^2 - 48x$
f) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 24x - 48$

○ **Aufgabe 5.144 (QUAuaB)**

Leiten Sie die Funktionen ab.

a) $f(x) = 4x^5$
b) $f(x) = -3x^4 + 2x^2$
c) $f(x) = 0{,}5x^6 - 7x^3 + 9$
d) $f(x) = 6x^3 - 1{,}2x^2 + 8x$
e) $f(x) = -x^7 + 5x$
f) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 1$
g) $f(x) = 9x^2 - 4x + 6$
h) $f(x) = -0{,}25x^8 + 2x^2$
i) $f(x) = 3x^5 - 15x^2 + 12$
j) $f(x) = 7x^3 + 0{,}8x - 10$
k) $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 0{,}5x$
l) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{5}{7}x^3 - \frac{2}{9}x + \frac{5}{13}$

◒ **Aufgabe 5.145 (QsbfN3)**

Gegeben ist f′(x). Bestimmen Sie durch ausprobieren und geschickte Überlegungen eine mögliche Funktion f(x). Prüfen Sie, indem Sie f(x) ableiten und das Ergebnis mit der gegebenen Ableitung übereinstimmt.

a) $f'(x) = 6x$
b) $f'(x) = 12x^3$
c) $f'(x) = 15x^4 - 6x$
d) $f'(x) = -8x^3 + 10$
e) $f'(x) = 9x^2 - 4x$
f) $f'(x) = 5x + 2$

○ **Aufgabe 5.146 (MVRw6A)**

Bestimmen Sie zunächst die Ableitungen folgender Funktionen und geben Sie jeweils die Steigung an den Stellen $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ und $x_3 = 4$ an:

a) $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 6x + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 5x - 4$
c) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 6$
d) $f(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}2x^2 + 0{,}6x + 1$

◒ **Aufgabe 5.147 (h4bkzR)**

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Bestimmen Sie f′(x).
b) Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an der Stelle x = 1.
c) Stellen Sie die Tangentengleichung an der Stelle x = 1 auf.

◒ **Aufgabe 5.148 (QfUVXe)**

Die Höhe eines Fahrstuhls (in m) wird modelliert durch $h(t) = -0{,}2t^3 + 2{,}4t^2$ (t in s, $0 \le t \le 8$).

a) Bestimmen Sie h′(t) und deuten Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang.
b) Bestimmen Sie h′(2) und h′(6). Deuten Sie die Ergebnisse.
c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Fahrstuhl kurzzeitig nicht in Bewegung ist.

○ **Aufgabe 5.149 (JpRtrV)**

Hier wurden Ableitungen notiert – einige stimmen, andere nicht. Entscheiden Sie, welche richtig sind, und korrigieren Sie die falschen.

a) $f(x) = 3x^4 \Rightarrow f'(x) = 12x^3$
b) $f(x) = -2x^3 + 5x \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 5$
c) $f(x) = 7x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 14x$
d) $f(x) = 0{,}5x^5 \Rightarrow f'(x) = 2{,}5x^4$
e) $f(x) = 9 \Rightarrow f'(x) = 9$
f) $f(x) = x^{0,5} \Rightarrow f'(x) = 0{,}5x^{-0,5}$

○ **Aufgabe 5.150 (HJ2LyY)**

Ordnen Sie jeder Funktion (1–4) die passende Ableitung (A–D) zu.

1. $f(x) = 2x^4$
2. $f(x) = -x^3 + 6x$
3. $f(x) = 5x^2 - 3x$
4. $f(x) = 0{,}25x^8$

A) $f'(x) = 10x - 3$
B) $f'(x) = 2x^7$
C) $f'(x) = 8x^3$
D) $f'(x) = -3x^2 + 6$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.151 (9ejqDi)

Bestimmen Sie die lokale Änderungsrate an der Stelle x = 2 mit der h-Methode für $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Aufgabe 5.152 (BgVqcT)

Bestimmen Sie jeweils f′(x) und berechnen Sie die Steigung an der angegebenen Stelle.

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2$, Stelle x = 1
b) $f(x) = -x^4 + 4x$, Stelle x = –1
c) $f(x) = 0{,}2x^5 - x^2$, Stelle x = 0
d) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$, Stelle x = 3
e) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 7$, Stelle x = 2
f) $f(x) = -0{,}5x^4 + 3x^2 - 2$, Stelle x = –2

Aufgabe 5.153 (4Rxkgi)

Gegeben ist $g(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$.

a) Bestimmen Sie die Stellen mit g′(x) = 0.
b) Prüfen Sie mit g″(x), ob dort Extrempunkte vorliegen.
c) Beschreiben Sie kurz, warum eine Stelle mit Steigung 0 nicht automatisch ein Hoch-/Tiefpunkt sein muss.

Aufgabe 5.154 (K7a1KF)

Bestimmen Sie die Extremstellen. Eine Einordnung als Hoch-/Tiefpunkt ist nicht verlangt.

a) $f(x) = x^3 - 9x$
b) $f(x) = -x^3 + 6x$
c) $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2$
d) $f(x) = x^4 - 4x^3$
e) $f(x) = x^5 - 10x^3$
f) $f(x) = -2x^4 + 8x^2$
g) $f(x) = x^3 + 6x^2$
h) $f(x) = -x^3 + 9x^2$
i) $f(x) = x^4 + 2x^2$
j) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2$

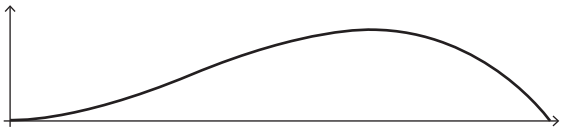
Aufgabe 5.155 (nreUqD)

Bestimmen Sie bei jeder Funktion die Extrempunkte vollständig.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
b) $g(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$
c) $h(x) = 2x^4 - 8x^2 + 3$
d) $k(x) = -0{,}25x^4 + 2x^2 - 1$
e) $m(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$
f) $n(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

Aufgabe 5.156 (bDKKqJ)

Die Funktion f(x) beschreibt näherungsweise die Flugbahn eines Balls bei einem Freistoß:
$f(x) = -\frac{1}{300}x^3 + \frac{9}{150}x^2$



a) Bestimmen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn und geben Sie die maximale Höhe des Balls an.
b) In 9,15 m Entfernung steht eine 2 m hohe Abwehrmauer. Prüfen Sie mithilfe der Funktion, ob der Ball die Mauer überquert.
c) Ermitteln Sie die Entfernung vom Abschusspunkt, bei der der Ball den Boden erreicht.
d) Der Ball trifft bei der Landung nicht senkrecht auf, sondern unter einem bestimmten Winkel zur Horizontalen. Bestimmen Sie den Auftreffwinkel α des Balls mit dem Boden (Achtung: Hier wird das Ergebnis aus Teilaufgabe c) benötigt).

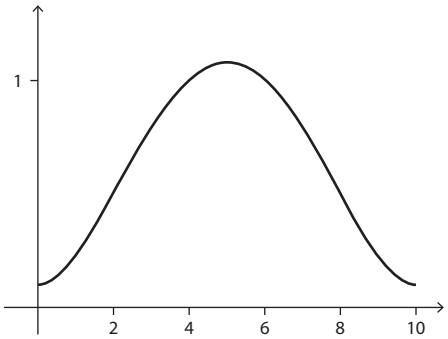
Aufgabe 5.157 (iSjN5j)

In der Medizin wird modellhaft beschrieben, wie stark ein Körper auf ein Medikament reagiert. Für die Dosis x (z. B. in mg) gilt die Reaktionsfunktion $R(x) = 0{,}1x^2(4 - x)$. Die momentane Empfindlichkeit gegenüber einer Dosisänderung wird durch R′(x) beschrieben.

a) Bestimmen Sie die Dosiswerte, bei denen keine Reaktion auftritt.
b) Bei welcher Dosis ist die Reaktion des Körpers maximal?
c) Für welche Dosis ist die Empfindlichkeit am größten?
d) Skizzieren Sie den Graphen im Intervall [0; 4].
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 4$ mit 2 cm = 1 Einheit; y-Achse: $0 \le y \le 1$ mit 1 cm = 0,2 Einheiten)

Aufgabe 5.158 (cNm9u4)

Während eines Hochwassers wurde in einer Stadt der Wasserstand h eines Flusses über mehrere Tage hinweg beobachtet. Die Messwerte sind in der nebenstehenden Abbildung als Graph dargestellt.



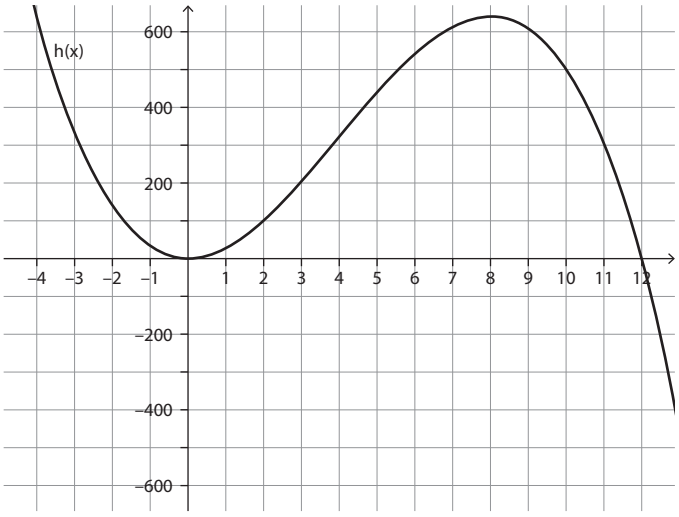
Der Verlauf der Hochwasserwelle lässt sich im betrachteten Zeitraum durch die Funktion
$h(t) = \frac{1}{720}t^4 - \frac{1}{36}t^3 + \frac{5}{36}t^2 + \frac{1}{5}$
modellieren ($0 \le t \le 10$; t in Tagen, h in Metern).

a) Beschreiben Sie mithilfe des Graphen in eigenen Worten, wie sich der Wasserstand im Verlauf der Hochwasserwelle verändert.
b) Bestimmen Sie den normalen Wasserstand zu Beginn der Messung ($t = 0$).
c) Ermitteln Sie, wie stark der Wasserstand am Ende des ersten Tages zunimmt (momentane Änderungsrate bei $t = 1$). Geben Sie das Ergebnis mit Einheit an.
d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Wasserstand am schnellsten ansteigt. Berechnen Sie außerdem, wie groß diese maximale Anstiegsrate ist.
e) Die Hochwasserschutzmauer ist 1 m hoch. Ermitteln Sie, in welchen Zeitabschnitten der Wasserstand diese Marke überschreitet und somit Teile der Stadt überflutet sind.
(Tipp: Die Lösung kann direkt über die Tabellenfunktion des Taschenrechners angegeben werden; Startwert 0, Endwert 6, Schrittweite 1.)
f) Bestimmen Sie Zeitpunkt und Höhe des höchsten Wasserstands.
g) Ermitteln Sie, ab welchem Tag das Hochwasser endgültig vorbei ist (Wasserstand wieder auf Normalniveau).

Aufgabe 5.159 (mJMm36)

Das abgebildete Koordinatensystem zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion h(x).

a) Skizzieren Sie – ausgehend vom Verlauf von h(x) – einen möglichen Graphen der Ableitung h′(x). Nutzen Sie dafür das unten abgebildete Koordinatensystem, in dem h(x) bereits eingezeichnet ist.
b) Die Funktion $f(x) = -2x^3 + 24x^2$ hat einen ähnlichen Verlauf wie h(x). Im Modell beschreibt f(x) (zwischen den Nullstellen) die Wassermenge in einem Pumpspeicherwerk. Dabei gilt: $t \ge 0$ Zeit in Stunden, f(t) Wassermenge in m^3.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem dieses Modell sinnvoll ist.
c) Zu welchem Zeitpunkt (nach $t = 0$) ist die Wassermenge am größten? Bestimmen Sie außerdem den maximalen Wasserbestand.
d) Erklären Sie im Kontext des Pumpspeicherwerks, was mit "mittlerer Änderungsrate" und "lokaler Änderungsrate" der Funktion f gemeint ist.
e) Bestimmen Sie die Steigung im Wendepunkt des Graphen von f.
f) Deuten Sie das Ergebnis aus e) im Sachzusammenhang: Was sagt es über den Ablauf im Pumpspeicherwerk aus?



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

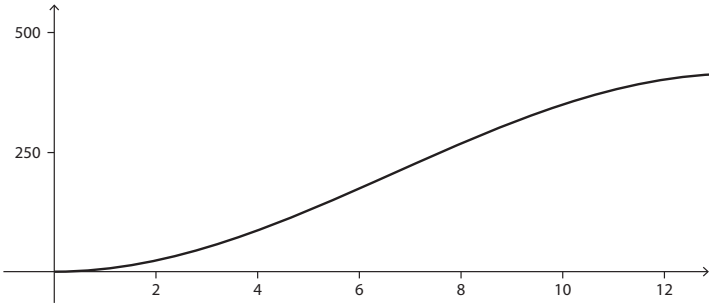
Aufgabe 5.160 (mE3LRN)

Bei einem Baum wird an einem klaren Sommertag die Sauerstoffproduktion im Tagesverlauf beobachtet. Da Licht und Temperatur die Photosynthese stark beeinflussen, verändert sich die Produktion über den Tag deutlich: Morgens steigt sie an, erreicht um die Mittagszeit häufig ihr Maximum und nimmt am Nachmittag wieder ab.
Für den Zeitraum zwischen 06:00 Uhr (Sonnenaufgang) und 18:00 Uhr (Sonnenuntergang) liegt ein Messprotokoll vor, das im unten stehenden Graphen dargestellt ist.

Dabei gilt:

- t beschreibt die Anzahl der Stunden seit 06:00 Uhr (also t = 0 entspricht 06:00 Uhr).
- v(t) gibt die bis zum Zeitpunkt t insgesamt produzierte Sauerstoffmenge in Litern an (kumulierte Gesamtmenge).

Der Verlauf lässt sich näherungsweise modellieren durch $v(t) = -0{,}35t^3 + 7t^2$.



a) Zeigen Sie, dass der Baum bis 13:00 Uhr insgesamt 223 Liter Sauerstoff produziert hat.
b) Bestimmen Sie, wie viel Sauerstoff der Baum zwischen 13:00 Uhr und 17:00 Uhr durchschnittlich pro Stunde abgibt.
c) Vergleichen Sie die Produktion am Nachmittag: Um wie viel Prozent ist die durchschnittliche Sauerstoffproduktion zwischen 15:00 Uhr und 17:00 Uhr niedriger als zwischen 13:00 Uhr und 15:00 Uhr? (Runden Sie auf eine Nachkommastelle.)
d) Bestimmen Sie die Steigung von v an der Stelle t = 5 und erläutern Sie kurz die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.
e) Vermuten Sie zunächst begründet, wann der Baum am meisten Sauerstoff produziert. Ermitteln Sie den Zeitpunkt anschließend rechnerisch.

Aufgabe 5.161 (1vLyWq)

Bestimmen Sie jeweils die Wendepunkte.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
b) $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 5$
c) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 2$
d) $f(x) = 3x^3 - 9x + 4$
e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$
f) $f(x) = 2x^4 + 8x^3 - 1$
g) $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 3$
h) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 2$
i) $f(x) = 2x^5 + 10x^4 - 6$
j) $f(x) = -x^5 + 15x^3 + 1$
k) $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 7$
l) $f(x) = -3x^5 + 30x^4 + 2$

Aufgabe 5.162 (ZqW8nw)

Bestimmen Sie jeweils die Wendepunkte.

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2$
b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$
c) $f(x) = 2x^4 + 4x^2 - 3$
d) $f(x) = -x^4 + 10x^2 + 1$
e) $f(x) = 0{,}075x^5 - 0{,}1875x^4 + 0{,}375x^2$
f) $f(x) = \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2$
g) $f(x) = -\frac{3}{40}x^5 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + 2x - 1$
h) $f(x) = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 6$

Aufgabe 5.163 (xbiuGj)

Bestimmen Sie jeweils die Wendepunkte.

a) $f(x) = -\frac{1}{30}x^6 + \frac{2}{3}x^4 - 8x^2 + 3x + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{15}x^6 - \frac{1}{3}x^4 + x^2$
c) $f(x) = -\frac{3}{20}x^5 - 0{,}25x^4 + 1{,}125x^3 + 3{,}375x^2$
d) $f(x) = 0{,}3x^5 - 9x^3 + 121{,}5x$
e) $f(x) = 0{,}1x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 8x - 1$
f) $f(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{32}{3}x^3 - 256x + 2$

◒ **Aufgabe 5.164 (jf3dty)**

Bestimmen Sie jeweils die Wendepunkte.

a) $f(x) = 0{,}05x^5 - 0{,}25x^4 + 2x^2$

b) $f(x) = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = -0{,}1x^5 - \frac{1}{6}x^4 + 3x^3 + 9x^2$

d) $f(x) = 0{,}15x^5 - 0{,}75x^4 - 0{,}125x^3 + 5{,}625x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3$

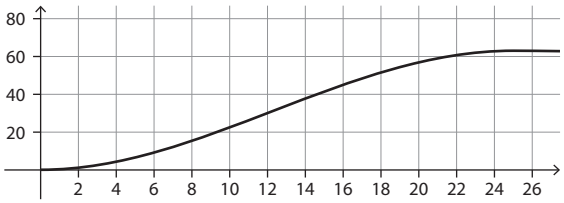
f) $f(x) = 0{,}05x^5 - \frac{1}{6}x^3$

g) $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + 3x^2$

h) $f(x) = 0{,}25x^4 - 0{,}5x^3 - 9x^2$

● **Aufgabe 5.165 (uiEWW7)**

Eine Bakterienkultur in einer Petrischale wird über mehrere Stunden hinweg untersucht. Dabei wird alle zwei Stunden die von den Bakterien bedeckte Fläche gemessen; die Messwerte sind im nebenstehenden Koordinatensystem dargestellt. Zur Beschreibung des Wachstums wird folgende Funktion verwendet:



$A(t) = -0{,}0084x^3 + 0{,}31x^2$

Dabei ist A(t) die bedeckte Fläche in cm^2 und t die Zeit in Stunden seit Beginn der Beobachtung um 08:00 Uhr (t = 0 entspricht 08:00 Uhr, t = 1 entspricht 09:00 Uhr usw.).

a) Berechnen Sie die von Bakterien bedeckte Fläche um 05:00 Uhr in der folgenden Nacht.

b) Bestimmen Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der Bakterienkultur vom Beobachtungsbeginn bis 05:00 Uhr.

c) Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit wieder genauso groß ist wie zu Beginn der Beobachtung.

d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Bakterienkultur am schnellsten wächst.

e) Zu welchem Zeitpunkt erreicht die bedeckte Fläche ihren größten Wert?

● **Aufgabe 5.166 (y9fsyM)**

Gegeben sind vier Punkte eines Funktionsgraphen: $P_1(0|-4)$, $P_2(1|0)$, $P_3(2|-2)$, $P_4(5|16)$

Es wird angenommen, dass der Graph zu einer ganzrationalen Funktion 3. Grades gehört.

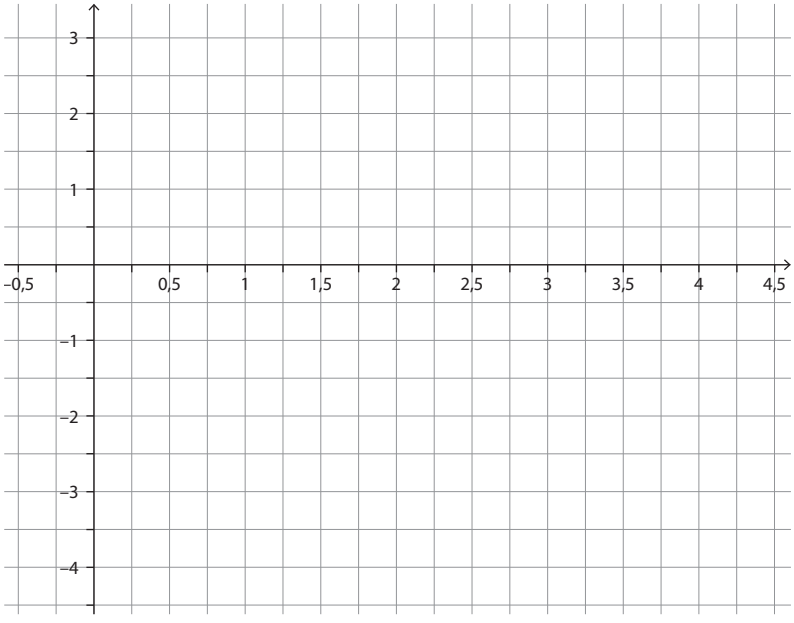
a) Stellen Sie mit Hilfe der vier Punkte ein lineares Gleichungssystem für a, b, c, d auf und lösen Sie es. Geben Sie anschließend die Funktionsgleichung f(x) an.

b) Berechnen Sie die Extrempunkte. Entscheiden Sie, ob Hoch- oder Tiefpunkte vorliegen.

c) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion.

d) Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion und geben Sie diese (falls möglich) auch mit Vielfachheit an.

e) Zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.167 (zdWarv)

Untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$
b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
c) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x$
d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$
e) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$
f) $f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$

Hinweis
Für manche Lösungsverfahren liegen Nullstellen im Dezimalbereich. Nutzen Sie für die Tabellenfunktion die Schrittweite 0,5.

Aufgabe 5.168 (z5skXQ)

Untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $g(x) = x^3 - 3x + 2$
b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$
c) $g(x) = x^4 - 4x^2 + 3$
d) $g(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$
e) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
f) $g(x) = x^3 + 3x^2 - 6x$
g) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 7$
h) $g(x) = -x^4 + 10x^2 - 9$

Aufgabe 5.169 (DYaeDu)

Untersuchen Sie die Funktionen auf Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

a) $h(x) = 0{,}5x^3 - 2{,}0x^2 + 0{,}5x + 3$
b) $h(x) = -0{,}4x^3 + 1{,}2x^2 + 2{,}4x - 3{,}2$
c) $h(x) = 0{,}5x^4 - 5{,}0x^2 + 4{,}5$
d) $h(x) = -0{,}2x^4 + 4{,}0x^2 - 12{,}8$
e) $h(x) = 0{,}3x^4 - 7{,}5x^2$
f) $h(x) = 0{,}5x^4 - 0{,}5x^3 - 3{,}5x^2 + 0{,}5x + 3$
g) $h(x) = -0{,}7x^2 + 0{,}7x + 1{,}4$
h) $h(x) = 0{,}4x^3 - 1{,}6x^2 - 2{,}8x + 11{,}2$

Aufgabe 5.170 (LmFvx2)

In einem Skigebiet wird eine Schneekanone eingesetzt, um eine Piste morgens schnell befahrbar zu machen. Die Netto-Schneemenge (Produktion minus Schmelz-/Verwehungsverluste) wird für einen bestimmten Tag vereinfacht durch eine Funktion S(t) beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit 06:00 Uhr (also t = 0 entspricht 06:00 Uhr) und S(t) die Netto-Schneemenge in beliebigen Einheiten.



Für den Zeitraum $0 \le t \le 5$ gilt näherungsweise:
$S(t) = -0{,}5t^4 + 5{,}5t^3 - 19{,}5t^2 + 22{,}5t$

a) Bestimmen Sie die Uhrzeiten, zu denen die Schneekanone netto keinen Beitrag liefert. Beschreiben Sie kurz, was diese Zeitpunkte im Ablauf bedeuten könnten.
b) Ermitteln Sie die Uhrzeiten, an denen sich der Netto-Verlauf von "zunehmend" zu "abnehmend" (oder umgekehrt) ändert. Deuten Sie diese Stellen als "kritische Phasen" für die Einsatzplanung, indem Sie Ihre Erkenntnisse aus a) ergänzen.
c) Finden Sie die Uhrzeiten, an denen sich der Verlauf spürbar im Charakter verändert (Übergang von "immer steiler" zu "immer flacher" oder umgekehrt).
d) Skizzieren Sie den Verlauf im Intervall [0; 5] und markieren Sie die in a)–c) gefundenen Stellen des Graphen, indem Sie diese einkreisen.

Aufgabe 5.171 (acUHYW)

Beim Entwickeln eines kompakten Lautsprechergehäuses wird untersucht, wie stark das Gehäuse bei bestimmten Frequenzen mitschwingt. Die modellhafte Schwingungsamplitude A(f) hängt von der Frequenz f ab (in kHz). Für $0 \le f \le 5$ gilt: $A(f) = f^4 - 10f^3 + 29f^2 - 20f$

a) Bestimmen Sie die Frequenzen, bei denen das Gehäuse nicht mitschwingt.
b) Ermitteln Sie die Frequenzen, bei denen die Amplitude lokal maximal bzw. lokal minimal ist. Interpretieren Sie diese Punkte als "kritische Resonanzbereiche" bzw. "ruhige Bereiche".
c) Finden Sie die Frequenzen, an denen der Verlauf seine Krümmung wechselt. Beschreiben Sie kurz, was das über das "Umschalten" zwischen stärker werdender und schwächer werdender Resonanz aussagt.
d) Zeichnen Sie A(f).

Aufgabe 5.172 (varQdk)

Eine kleine Firma fertigt Mountainbikes. Unabhängig von der Stückzahl fallen monatlich Fixkosten von 5.000 Euro an. Zusätzlich entstehen variable Kosten V(x) (in Euro), die von der produzierten Anzahl x abhängen. Für einige Produktionsmengen liegen folgende Werte vor:

x	0	2	6	10
V(x)	0	306	954	1650

a) Bestimmen Sie mithilfe der Tabelle eine ganzrationale Funktion zweiten Grades V(x), die die variablen Kosten beschreibt. Stellen Sie anschließend die monatlichen Herstellungskosten K(x) (Fixkosten plus variable Kosten) in Abhängigkeit von x auf. Skizzieren Sie den Graphen von K für $0 \le x \le 200$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Ermitteln Sie außerdem die Produktionsmenge, bei der die variablen Kosten fünfmal so hoch sind wie die Fixkosten.

b) Alle im Monat produzierten Mountainbikes werden für 450 Euro pro Stück an einen Händler verkauft. Stellen Sie die Gewinnfunktion G(x) in Abhängigkeit von x auf und zeichnen Sie den Graphen von G in das vorhandene Koordinatensystem. Bestimmen Sie, für welche Produktionsmengen Gewinn entsteht, und berechnen Sie den maximalen Monatsgewinn.

c) Aufgrund starker Konkurrenz muss der Verkaufspreis pro Mountainbike gesenkt werden. Um wie viel Prozent darf der ursprüngliche Preis höchstens reduziert werden, wenn monatlich 90 Mountainbikes produziert werden und der Gewinn dabei mindestens 2.000 Euro betragen soll?

Aufgabe 5.173 (5fTxR9)

Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist, die y-Achse bei $y = 2$ schneidet und im Punkt M(2|4) ein Maximum besitzt.

Aufgabe 5.174 (HwEK3X)

Eine ganzrationale Funktion 3. Grades verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung. An der Stelle $x = -1$ hat die Tangente die Steigung 6, und der Punkt P(2|10) liegt auf dem Funktionsgraphen.

Aufgabe 5.175 (e9VQLy)

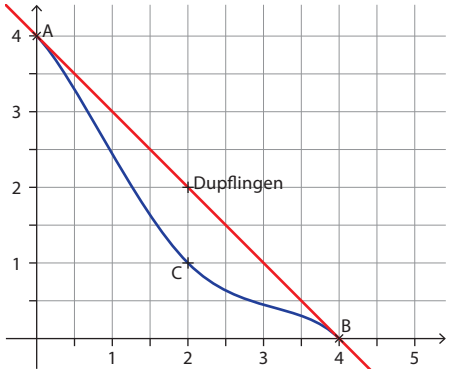
Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion kleinstmöglichen Grades, deren Graph punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist und im Punkt S(1|1) einen Sattelpunkt besitzt.

Aufgabe 5.176 (hRyynR)

Bei der Vermessung des Bogens einer Holzbrücke wurden drei Punkte aufgenommen:
$P_1(-8|0{,}4)$; $P_2(0|1{,}2)$; $P_3(2|1{,}2)$
Ermitteln Sie daraus die Spannweite des Brückenbogens sowie die maximale Höhe des Bogens.

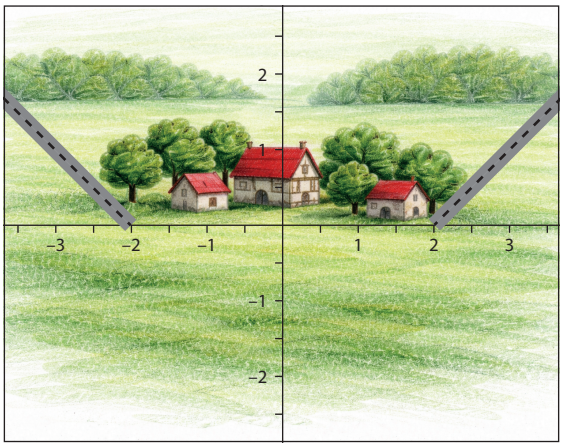
Aufgabe 5.177 (wHnCNH)

Um den Verkehrslärm in der Ortschaft Dupflingen zu reduzieren, wird eine Umgehungsstraße geplant. Die bisherige Landstraße verläuft geradlinig durch die Punkte A(0|4) und B(4|0) (Einheit: 1 km). Die neue Trasse soll durch den Punkt C(2|1) führen und in A sowie B tangential in die bestehende Straße übergehen, also dort jeweils dieselbe Steigung wie die Landstraße besitzen (siehe Abbildung).
Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph diese Bedingungen erfüllt.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.178 (Zv9UXT)



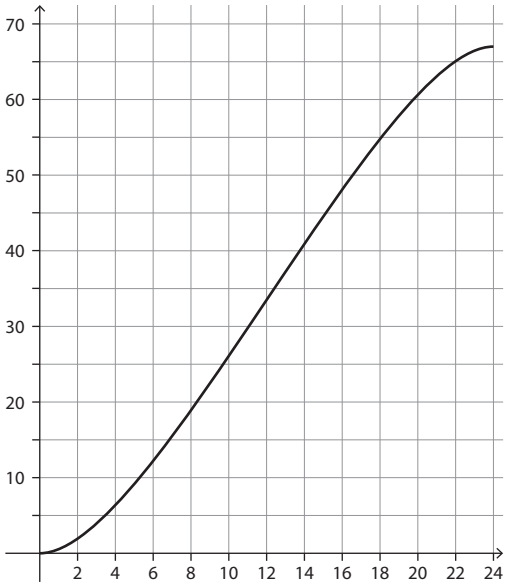
Bei der Erschließung eines neuen Baugebiets soll eine vorhandene Sackgasse mit der Zufahrtsstraße zum Neubaugebiet verbunden werden. Damit der Übergang möglichst "sauber" und ohne abrupte Richtungswechsel gelingt, soll die neue Verbindungsstraße gut an die bestehenden Straßenstücke anschließen.
Dazu wurde eine Planungsskizze in ein Koordinatensystem übertragen. Die Planer von Straßen.NRW legen fest, dass die Verbindungsstraße parabelförmig verlaufen und durch den Punkt P(0|–1) führen soll.

a) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Verbindungsstraße in die Planungsskizze.
b) Geben Sie anschließend eine mögliche Funktionsgleichung an, die diesen Verlauf beschreibt.

Aufgabe 5.179 (2YbuyJ)

Ein ICE fährt die etwa 67 km lange Strecke von Hamm (Westf.) nach Bielefeld Hbf. in ungefähr 24 Minuten. Der dabei zurückgelegte Weg lässt sich näherungsweise durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion dritten Grades beschreiben.





a) Geben Sie an, wofür die x-Achse und die y-Achse im Diagramm stehen.
b) Bestimmen Sie eine passende ganzrationale Funktionsgleichung dritten Grades, mit der sich die ICE-Fahrt modellieren lässt.
c) Ermitteln Sie, nach wie vielen Minuten der ICE seine Höchstgeschwindigkeit erreicht.

Aufgabe 5.180 (HAkW8W)

Bestimmen Sie die Variablen mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

a)
$$\begin{aligned} x+y+z&=13\\ -x+y+z&=9\\ y+2z&=19 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x+y+z&=10\\ -x+y+z&=0\\ x-y+z&=2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=19\\ x_1+2x_3&=26\\ x_1+x_2&=10 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x+3y+2z&=10\\ -5x+y&=12\\ 2x+9y+4z&=26 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} k+2g+4t&=-13\\ 2k+6g+8t&=-44\\ 3k+5g+t&=-30 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} a+b+c&=2{,}6\\ a-b+c&=4\\ -a+b+c&=2 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.181 (7azAAR)

Bestimmen Sie die Variablen mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

a) $\begin{aligned} 9a + 3b + c &= 35 \\ 4a + 2b + c &= 16 \\ a - b + c &= 7 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 25x_1 + 5x_2 + x_3 &= 27{,}04 \\ 64x_1 + 8x_2 + x_3 &= 39{,}52 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= -0{,}68 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \tfrac{1}{25}a + \tfrac{1}{5}b + c &= -0{,}057 \\ 361a - 19b + c &= -676{,}857 \\ \tfrac{324}{25}a + \tfrac{18}{5}b + c &= -24{,}282 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 9a + 3b + c &= 32{,}45 \\ 16a - 4b + c &= -38{,}6 \\ 49a - 7b + c &= -91{,}55 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4r - 2s + t &= \tfrac{344}{33} \\ r + s + t &= -\tfrac{415}{132} \\ 121r + 11s + t &= -\tfrac{155}{12} \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 100u + 10v + w &= -138 \\ 256u - 16v + w &= -720{,}4 \\ \tfrac{5329}{25}u + \tfrac{73}{5}v + w &= -464{,}278 \end{aligned}$

Aufgabe 5.182 (ZCcdyc)

Bestimmen Sie die Variablen mit Hilfe des Gauß-Verfahrens.

a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 7 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -6 \\ -6x_1 + 8x_2 - 8x_3 &= -34 \\ -7x_1 - x_2 + 9x_3 &= 50 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 7x_1 + x_3 &= -35 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 &= 58 \\ 7x_1 + 4x_2 &= -16 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -46 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= -44 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 &= -79 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -6 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -4 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 &= -5 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -38 \\ -4x_1 + 9x_3 &= -49 \\ 5x_1 + x_2 &= -31 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5x_1 - 8x_3 &= 50 \\ 6x_1 + 6x_2 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -6 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} -3x_1 + 7x_2 &= -34 \\ 7x_2 + 8x_3 &= -52 \\ 7x_1 - 5x_2 - 6x_3 &= 52 \end{aligned}$

i) $\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 &= -48 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= -26 \\ -8x_1 + 2x_3 &= -56 \end{aligned}$

Aufgabe 5.183 (kGnavZ)

Bestimmen Sie die Variablen mit Hilfe des Gauß-Verfahrens. Auch wenn hier nun mehr als drei Unbekannte bestimmt werden müssen, ist das Verfahren, die Variablen nacheinander zu eliminieren, das gleiche. Lassen Sie sich nicht irritieren!

a) $\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= -76 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 8x_4 &= -22 \\ 9x_1 + 4x_2 + 9x_3 - 2x_4 &= -108 \\ 6x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= -56 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 7x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= -22 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 + 4x_4 &= 40 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 61 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 8x_4 &= -7 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 73 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 79 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 18 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 &= 120 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 34 \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 + x_4 &= -67 \\ 3x_1 - 6x_2 - 8x_3 - 4x_4 &= -14 \end{aligned}$

Aufgabe 5.184 (8MRfVQ)

Auf einem Stadtfest in Dortmund betreibt ein Foodtruck einen Pop-up-Stand. Beobachtet wird, wie viele Portionen pro Minute verkauft werden. Zu Beginn ist der Andrang noch gering, dann bildet sich eine Schlange, später flacht das Interesse wieder ab, bis der Stand schließt. Die Verkaufsrate (Portionen pro Minute) wird im Zeitraum von 0 bis 11 Stunden nach Öffnung durch die Funktion $v(t) = \frac{5}{864}t^4 - \frac{5}{72}t^3 - \frac{25}{72}t^2 + \frac{125}{27}t \quad (0 \le t \le 11)$ modelliert.
Dabei gilt:

- t = Zeit in Stunden seit Öffnung
- v(t) = Verkaufsrate in Portionen pro Minute

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von v(t) im Intervall [0; 11]. Deuten Sie jede Nullstelle im Kontext.

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte von v(t) im Intervall [0; 11] rechnerisch. Geben Sie zu jeder Extremstelle an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt. Interpretieren Sie die Extrempunkte im Hinblick auf den Sachkontext.

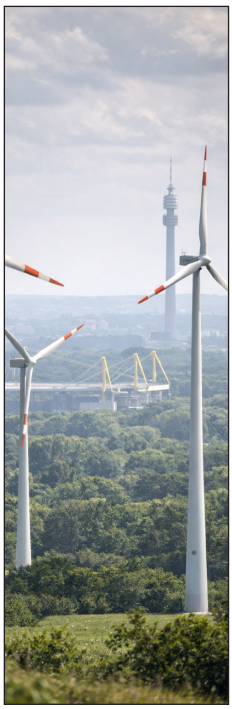
c) Der Foodtruck öffnet um 09:30 Uhr. Bestimmen Sie mithilfe der Ergebnisse aus b), um wie viel Uhr die Verkaufsrate am größten ist. Ist diese Uhrzeit plausibel?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

d) Bestimmen Sie die Wendepunkte von v(t) im Intervall [0; 11]. Beschreiben Sie kurz, was ein Wendepunkt hier bedeutet.
e) Berechnen Sie v'(t) zum Zeitpunkt t = 2. Deuten Sie das Ergebnis im Kontext.
f) Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem und schätzen Sie die gesamt verkauften Portionen im Zeitraum von t = 0 bis t = 11, indem Sie den Flächeninhalt unter dem Graphen näherungsweise bestimmen (z. B. durch Zählen der Kästchen).
g) Beziehen Sie sich auf den in Teilaufgabe b) ermittelten Hochpunkt. Beurteilen Sie, ob der dortige Funktionswert im Sachzusammenhang plausibel ist (z. B. hinsichtlich typischer Maximalwerte) und begründen Sie Ihre Einschätzung kurz.

Aufgabe 5.185 (8miqUc) Ⓚ

In einem Windpark in der Nähe von Dortmund wird die elektrische Leistung einer Anlage über einen windigen Vormittag hinweg ausgewertet. Die Betreiber möchten verstehen, wann die Anlage tatsächlich Strom liefert, wann sie wieder "ausläuft", und zu welchen Zeitpunkten die Leistung besonders stark steigt oder wieder abflacht. Das ist wichtig, weil Wartungsteams nur dann an der Anlage arbeiten dürfen, wenn die Leistung sehr niedrig ist und keine gefährlichen Lastwechsel auftreten.



Zur Modellierung wird die Leistung P(t) (in MW) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden seit Beginn der Messung) für einen bestimmten Tag durch folgende Funktion beschrieben:
$P(t) = 0{,}01t^4 - 0{,}24t^3 + 1{,}64t^2 - 2{,}4t$

a) Untersuchen Sie rechnerisch, zu welchen Zeitpunkten die Anlage laut Modell genau 0 MW liefert. Interpretieren Sie diese Zeitpunkte im Sachzusammenhang.
b) Bestimmen Sie die Zeitpunkte und die Höhe des maximalen Leistungswertes. Formulieren Sie anschließend einen Satz, was dieser Zeitpunkt für die Einsatzplanung bedeutet.
c) Die Betreiber möchten einen Zeitpunkt finden, an dem die Leistung zwar noch steigt, aber der Anstieg nicht mehr schneller wird, weil dann häufig das Schwingungsverhalten der Anlage ruhiger wird. Untersuchen Sie dafür den Graphen auf solche Zeitpunkte und deuten Sie die Ergebnisse.
d) Prüfen Sie, ob das Modell im betrachteten Zeitraum negative Leistungswerte liefern könnte. Falls ja: Erklären Sie kurz, wie man das Modell in der Praxis interpretieren müsste und wieso solche Werte theoretisch realistisch sind.

Aufgabe 5.186 (HnhYnk) Ⓚ

In einer Werkstatt wird Acrylglas mit einem Lasercutter geschnitten. Dabei hängt die Qualität der Schnittkante von mehreren Einstellungen (Leistung, Fokus, Vorschub) ab. Aus Messungen wird eine Größe Q(x) gebildet, die die Abweichung zur idealen Kante beschreibt:

- Q(x) = 0: Schnittkante ist genau im Idealbereich
- Q(x) > 0: Kante ist zu stark belastet (z. B. Schmauchspuren)
- Q(x) < 0: Kante ist zu schwach bearbeitet (z. B. Gratbildung)



Für einen Testlauf wird Q(x) (in willkürlichen Einheiten) in Abhängigkeit von x (in dm) mit $0 \le x \le 6$ modelliert durch: $Q(x) = 0{,}2x^3 - 1{,}7x^2 + 3{,}7x - 1{,}2$

a) Bestimmen Sie die Punkte, zu denen Q(x) = 0 gilt. Erklären Sie, was diese Maße konkret für den Schneidprozess bedeuten.
b) Untersuchen Sie (auch an den Randpunkten des betrachteten Intervalls), bei welchen Maßen die Abweichung besonders groß (zu stark / zu schwach) ist und beschreiben Sie, welche Art von Problem dort jeweils vorliegt.
c) Der Werkstattleiter interessiert sich besonders für Abschnitte, an denen sich das Verhalten "spürbar ändert", weil dort häufig nachjustiert werden muss. Bestimmen Sie die Änderungsraten im Wendepunkt und an den Randpunkten des Intervalls und deuten Sie die Bedeutung dieser Stelle(n).
d) Ein Werkstück gilt als nicht mehr brauchbar, sobald die Abweichung mindestens 1 beträgt, also sobald $Q(x) \ge 1$ gilt. Bestimmen Sie alle Maßabschnitte im Bereich $0 \le x \le 6$, in denen das Werkstück nicht mehr brauchbar ist.

Ⓚ



Aufgabe 5.187 (CX9f1Y)

Bei einer Fachmesse wird am Eingang nicht nur gezählt, wie viele Personen ankommen, sondern auch, wie viele Personen pro Stunde zusätzlich abgefertigt werden müssten, damit keine Schlange entsteht. Dazu wird eine Bilanzfunktion B(t) genutzt, die für jeden Zeitpunkt t beschreibt, um wie viele Personen (B(t) = 1 sind 100) pro Stunde die Abfertigungskapazität erhöht werden müsste, damit die Schlange konstant bleibt oder wieder abgebaut wird.

- B(t) > 0: Es kommen mehr Menschen an, als im gleichen Zeitraum abgefertigt werden
- B(t) < 0: Es werden mehr Menschen abgefertigt, als neu ankommen
- B(t) = 0: Ankunft und Abfertigung sind im Gleichgewicht

Die Zeit t wird in Stunden seit Öffnung gemessen (mit $0 \le t \le 9$, wobei t = 0 ist Öffnung der Messe). Das Modell lautet: $B(t) = \frac{1}{10}t^4 - \frac{9}{5}t^3 + \frac{1619}{160}t^2 - \frac{2907}{160}t + \frac{63}{16}$

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Zeitpunkte, an denen Gleichgewicht herrscht. Deuten Sie, was an diesen Zeiten am Eingang passiert.

b) Finden Sie heraus, wann der Andrang am stärksten "drückt" (größter positiver Wert) und wann der Abbau am stärksten ist (kleinster Wert). Beschreiben Sie beide Situationen in eigenen Worten.

c) Entscheiden Sie: In welchen Zeitabschnitten ist es sinnvoller, Personal hinzuzuziehen, und in welchen Abschnitten könnte man Personal abziehen, ohne dass sich die Lage verschlechtert? Begründen Sie mit den Eigenschaften des Graphen.

Ⓚ



Aufgabe 5.188 (gLwCzb)

Eine Drohne soll eine Ausgrabungsstelle über mehrere Monate hinweg täglich fotografieren, um den Fortschritt der Arbeiten lückenlos zu dokumentieren. Damit die Aufnahmen von Tag zu Tag möglichst identisch sind, wird eine feste Flugroute samt Höhenprofil geplant und in die Drohne einprogrammiert. Zur rechnerischen Untersuchung wird die Flughöhe durch eine Funktion beschrieben: h(x) gibt die Höhe der Drohne in Metern an, x die Entfernung vom Startpunkt (in Metern). Es wird angenommen, dass die Drohne ihre Höhe entlang der Strecke so anpasst, dass zu jedem x genau eine Flughöhe gehört.

Es gilt: $h(x) = -0{,}005x^3 + 0{,}125x^2 + 0{,}75x$

a) Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Drohne laut Modell Bodenkontakt hat. Wie weit ist die Drohne geflogen? (Tipp: Wählen Sie nur die dafür sinnvollen Nullstellen aus.)

b) Wird eine vorgeschriebene maximale Flughöhe von 25 m eingehalten?

c) Ab einer Flughöhe von mehr als 15 m soll automatisch eine Videoaufnahme gestartet werden. Bestimmen Sie rechnerisch, in welchen Entfernungsabschnitten gefilmt wird.

d) Bestimmen Sie die Wendestelle(n) und erklären Sie, was diese beim Flugprofil bedeutet.

Ⓚ



Aufgabe 5.189 (ak868S)

Ein Freibad wird zweimal täglich stoßgechlort. Zwischen den Chlorungen wird der aktuelle Chlorwert laufend überwacht. Für das Beckenwasser soll der Gehalt an freiem Chlor im Bereich von 0,35 mg/L bis 0,55 mg/L liegen. Als Zielwert wird 0,45 mg/L festgelegt. Die Funktion c(x) beschreibt die Abweichung vom Zielwert (in mg/L):

- c(x) = 0: Zielwert 0,45 mg/L erreicht
- c(x) > 0: Chlorwert über 0,45 mg/L
- c(x) < 0: Chlorwert unter 0,45 mg/L

Dabei ist x die Zeit in Stunden seit der letzten Stoßchlorung ($0 \le x \le 9$). Die Abweichung wird modelliert durch $c(x) = -0{,}0003x^4 + 0{,}0036x^3 - 0{,}0081x^2 - 0{,}0324x + 0{,}0972$.

a) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen der Zielwert exakt erreicht wird, und geben Sie an, in welchen Zeitabschnitten das Becken überdosiert bzw. unterdosiert ist.

b) Für die Freigabe ist besonders wichtig, wann die Abweichung am größten (in beide Richtungen) ausfällt. Bestimmen Sie diese Zeitpunkte und beurteilen Sie im Kontext, ob die zulässigen Grenzwerte eingehalten werden. Prüfen Sie dazu auch die Grenzwerte.

c) Formulieren Sie ein kurzes begründetes Schließungskriterium: Ab wann müsste das Becken geschlossen (oder neu gechlort) werden, da die Grenzwerte unterschritten werden? Eine kompetenzte Abschätzung der Zeitwerte ist vollkommen ausreichend!

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



5.15 EIN BLICK IN DIE FINANZMATHEMATIK - TEIL III

Nun kommt der dritte und letzte Teil der Finanzmathematik. Glücklicherweise kommen keinerlei neue Begriffe hinzu. Die Vorgehensweisen, beispielsweise den Break-Even-Point, die Gewinngrenze und Gewinnschwelle zu bestimmen, ändert sich hier nicht. Was sich jedoch ändert ist das Aussehen der Kostenfunktion. Bisher war diese immer linear.
Im Folgenden, und das ist durchaus realistischer, wird die Kostenfunktion als Funktion zweiten oder dritten Gerades angegeben.

Situationsbeschreibung – Produktion von DAS MATHEBUCH
Für das digitale Lehrwerk "DAS MATHEBUCH" soll zusätzlich eine gedruckte Sonderauflage produziert werden, um sie an Schulen und Bildungseinrichtungen zu verkaufen. Damit die Entscheidung wirtschaftlich begründet werden kann, werden die Herstellungskosten modellhaft mit einer Funktion beschrieben.

Hinweis
Alle hier verwendeten Werte sind frei gewählt und entsprechen nicht realen Daten.

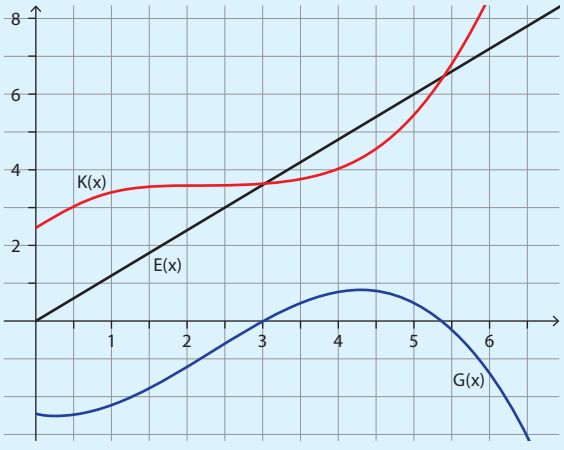
Als Variable wird die Auflage x verwendet, wobei x die Anzahl der gedruckten Bücher in Tausend Stück angibt (also x = 1 entspricht 1000 Büchern).

Der Stückpreis wird als konstant angenommen und beträgt 20 Euro pro Buch.

Die Kosten setzen sich aus Fixkosten (z. B. Layout, Druckvorbereitung, Einrichtungskosten) und variablen Kosten (z. B. Papier, Druck, Bindung, Verpackung) zusammen. Da bei größeren Auflagen Effekte wie Mengenrabatte, Auslastung und zusätzliche Logistik auftreten können, wird die Kostenfunktion in diesem Modell als ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben: $K(x) = 0{,}6x^3 - 4{,}8x^2 + 18{,}65x + 10{,}8$.
Dabei gibt K(x) die Kosten in Tausend Euro (T€) an – das ist die Einheit der y-Achse.

Beispiel Ⓑ

Die Sweet-Schoki-GmbH plant die Produktion einer neuen Pralinenpackung. Für die Herstellung entstehen Fixkosten (z. B. Maschinenstart, Personal) und variable Kosten (z. B. Zutaten, Verpackung). Modellhaft lässt sich die Gesamtkostenfunktion durch
$K(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}69x^2 + 1{,}56x + 2{,}43$
beschreiben.
Dabei steht x für die produzierte Menge (in ME), und K(x) gibt die Kosten in GE an. Der Verkaufspreis pro Packung liegt konstant bei 1,20 GE.



1. **Erlös- und Gewinnfunktion aufstellen**
   Da der Preis pro Packung konstant ist, ergibt sich die Erlösfunktion direkt zu
   $E(x) = 1{,}2x$

   Der Gewinn ist Erlös minus Kosten:
   $G(x) = E(x) - K(x)$
   $= 1{,}2x - (0{,}1x^3 - 0{,}69x^2 + 1{,}56x + 2{,}43)$
   $= 1{,}2x - 0{,}1x^3 + 0{,}69x^2 - 1{,}56x - 2{,}43$
   $= -0{,}1x^3 + 0{,}69x^2 - 0{,}36x - 2{,}43$

2. **Gewinnschwelle und Gewinngrenze**
   Gewinnschwelle und Gewinngrenze sind die Stellen, an denen der Gewinn gerade Null ist, also die Nullstellen von G(x). Hier bietet sich die Polynomdivision an. Eine Nullstelle kann man z. B. aus dem Graphen oder mit der Tabellenfunktion ermitteln: $x_1 = 3$.

   Die Polynomdivision ergibt:
   $(-0{,}1x^3 + 0{,}69x^2 - 0{,}36x - 2{,}43) : (x - 3) = -0{,}1x^2 + 0{,}39x + 0{,}81$

   Nun werden die Nullstellen des Quotientenpolynoms bestimmt:
   Aus $0 = -0{,}1x^2 + 0{,}39x + 0{,}81$ folgen die Nullstellen $x_2 = -1{,}5$ und $x_3 = 5{,}4$.

   Ökonomisch sinnvoll sind nur die positiven Lösungen. Damit gilt:
   – Gewinnschwelle: $x_S = 3$
   – Gewinngrenze: $x_G = 5{,}4$

   Für den Break-Even-Point wird der Funktionswert bei $x = 3$ bestimmt (z. B. mit E(x)):
   $E(3) = 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6$

   => BEP(3|3,6)

3. **Gewinnmaximum (gewinnmaximale Ausbringungsmenge)**
   Das Gewinnmaximum liegt bei einem Extrempunkt der Gewinnfunktion.
   $G(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}69x^2 - 0{,}36x - 2{,}43$
   $G'(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}38x - 0{,}36$
   $G''(x) = -0{,}6x + 1{,}38$

   notwendige Bedingung: $G'(x) = 0$
   $0 = -0{,}3x^2 + 1{,}38x - 0{,}36 \quad | :(-0{,}3)$
   $0 = x^2 - 4{,}6x + 1{,}2$
   $x_{1/2} = 2{,}3 \pm \sqrt{2{,}3^2 - 1{,}2}$
   $x_1 = 4{,}322 \quad \vee \quad x_2 = 0{,}278$

   hinreichende Bedingung: $G''(x) \neq 0$
   $G''(4{,}322) = -0{,}6 \cdot 4{,}322 + 1{,}38 = -1{,}21$
   $G''(0{,}278) = -0{,}6 \cdot 0{,}278 + 1{,}38 = 1{,}21$

   y-Wert: $f(x) = y$
   Hier reicht der y-Wert des Hochpunktes (Gewinnmaximum), da ja auch nur danach gefragt wird.
   $G(4{,}322) = -0{,}1 \cdot 4{,}322^3 + 0{,}69 \cdot 4{,}322^2 - 0{,}36 \cdot 4{,}322 - 2{,}43 = 0{,}83$ => HP(4,32|0,83)

Somit liegt die gewinnmaximale Ausbringungsmenge bei 4,32 ME und der maximale Gewinn bei 0,83 GE.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 5.190 (VJysW4) ○

Ein Unternehmen produziert ein bestimmtes Produkt. Es fallen Fixkosten von 3 GE an. Die variablen Kosten hängen von der Produktionsmenge x (in ME) ab und werden beschrieben durch $K_V(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}6x$. Für jede produzierte Mengeneinheit erzielt das Unternehmen einen Erlös von 3,9 GE.

a) Stellen Sie die Kostenfunktion K(x), die Erlösfunktion E(x) und die Gewinnfunktion G(x) auf und zeichnen Sie alle drei Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 11$ mit 1 cm = 1 Einheit; y-Achse: $-5 \le y \le 50$ mit 1 cm = 5 Einheiten)

b) Ermitteln Sie die Produktionsmengen, bei denen das Unternehmen weder Gewinn noch Verlust macht, und deuten Sie diese Werte als Gewinnschwelle/Gewinngrenze.

c) Bestimmen Sie, bei welcher Produktionsmenge der Gewinn am größten ist, und berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Aufgabe 5.191 (3YKuVi) ◒

Ein Unternehmen ist Monopolist. Der Preis p hängt von der nachgefragten Menge x (in ME) ab: $p(x) = -5x + 60$ $(0 \le x \le 9)$. Die Gesamtkosten betragen $K(x) = 0{,}5x^3 - 6x^2 + 30x + 48$ (in GE).

a) Zeichnen Sie die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E in ein Koordinatensystem.

b) Die Gewinngrenze liegt bei x = 8. Geben Sie den zugehörigen Break-Even-Point an.

c) Bestimmen Sie die Sättigungsmenge.

d) Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn am größten?

Aufgabe 5.192 (GHe43e) ◒

Gegeben ist die Kostenfunktion K im Intervall [0; 8]: $K(x) = \frac{1}{64}x^3 + \frac{7}{32}x^2 + \frac{1}{8}x + 1$

a) Geben Sie die variablen Kosten an.

b) Erstellen Sie für alle ganzzahligen x von 0 bis 8 eine Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen von K(x).

c) Pro Produktionseinheit werden 3 GE erlöst. Stellen Sie die Erlösfunktion auf und zeichnen Sie sie in dasselbe Koordinatensystem.

d) Zeichnen Sie die Gewinnfunktion in ein neues Koordinatensystem und lesen Sie den maximalen Gewinn ab. Geben Sie diesen an.

Aufgabe 5.193 (ygLd4S) Ⓚ



Beziehen Sie sich in dieser Aufgabe auf die Situationsbeschreibung zur Sonderauflage von "DAS MATHEBUCH". Dabei bezeichnet x die Auflage in Tausend Stück (z. B. x = 1 bedeutet 1.000 gedruckte Bücher). Die y-Werte der Funktionen geben die jeweiligen Beträge in Tausend Euro an. Beispiel: Ein Funktionswert von 20 entspricht 20.000 Euro.

a) Ermitteln Sie aus der Kostenfunktion K(x) die Fixkosten K(0). Beschreiben Sie kurz, was dieser Wert im Kontext der Druckerei bedeutet.

b) Stellen Sie aus dem gegebenen Stückpreis eine passende Erlösfunktion E(x) auf.

c) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion und berechnen Sie, ab welcher Auflage die Produktion zum ersten Mal Gewinn abwirft (Gewinnschwelle) und bis zu welcher Auflage sie noch Gewinn abwirft (Gewinngrenze).

d) Ermitteln Sie die Auflage, bei der der Gewinn am größten ist, und geben Sie den maximalen Gewinn an. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

e) Untersuchen Sie, wie stark die Kosten bei x = 1,5 momentan ansteigen. Interpretieren Sie das Ergebnis als "zusätzliche Kosten pro 1.000 Bücher" und übertragen Sie es anschließend auf "zusätzliche Kosten pro Buch".

f) Berechnen Sie bei x = 1,5 die durchschnittlichen Kosten pro Buch (Stückkosten). Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Stückpreis und formulieren Sie daraus eine kurze wirtschaftliche Einschätzung, ob die Auflage von 1.500 Büchern sinnvoll erscheint.

g) Skizzieren Sie K(x), E(x) und G(x) in ein gemeinsames Koordinatensystem (nutzen Sie die Tabellenfunktion). Markieren Sie Gewinnschwelle, Gewinngrenze und das Gewinnmaximum am Graphen.
(Koordinatensystem: x-Achse: $0 \le x \le 8$ mit 1 cm = 1 Einheit; y-Achse: $-20 \le y \le 160$ mit 1 cm = 20 Einheiten)

5.16 CHECKLISTE – FUNKTIONSUNTERSUCHUNG

Mit der Checkliste können Sie als Vorbereitung auf die Klausur überprüfen, welche grundlegenden Themenbereiche der Unterrichtsreihe Sie gut können bzw. wo Sie noch unsicher sind. Wenn Sie die Checkliste erfolgreich bearbeitet haben, sollten Sie in der Klassenarbeit auf jeden Fall eine ausreichende Leistung erzielen.

	Meine Kompetenzen (bitte kreuzen Sie entsprechend an):	Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
1	Ich kann eine Linearfaktorzerlegung sowohl für quadratische, als auch für Funktionen höheren Grades durchführen.				
2	Ich kann anhand des Grades einer Funktion grundlegende Aussagen über den Verlauf von Fkt. höheren Grades machen.				
3	Ich kann Nullstellen mit Hilfe der Polynomdivision bestimmen.				
4	Ich kann Nullstellen mit Hilfe der Substitution bestimmen.				
5	Ich kann Nullstellen mit Hilfe der Faktorisierung bestimmen.				
6	Ich kann Lösungsverfahren kombinieren, um Nullstellen bestimmen zu können.				
7	Ich kenne den Begriff des Differenzenquotienten und kann diesen im Sachkontext rechnerisch ermitteln.				
8	Ich kann die lokale Änderungsrate mit Hilfe der h-Methode berechnen.				
9	Ich kann die Ableitung ganzrationaler Funktionen bilden.				
10	Ich kann Extrempunkte mit Hilfe der notwendigen und hinreichenden Bedingung ermitteln.				
11	Ich kann Wendepunkte mit Hilfe der notwendigen und hinreichenden Bedingung ermitteln.				
12	Ich kann einen Funktionsgraphen mit Hilfe von ermittelten Extrempunkten, Wendepunkten und Nullstellen in ein geeignetes Koordinatensystem einzeichnen.				
13	Ich kann Extrem- und Wendepunkte sowie Nullstellen in einem Sachkontext bestimmen.				
14	Ich kenne die beiden (die drei) Arten von Symmetrien.				

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

		Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
15	Ich kann die Symmetrie einer Funktion anhand der Funktionsgleichung ablesen.				
16	Für Steckbriefaufgaben kann ich die allgemeinen Funktionsgleichungen ableiten.				
17	Ich kann bei Steckbriefaufgaben anhand einer allgemeinen Funktionsgleichung erkennen, wie viele Bedingungen bzw. Gleichungen ich zum Lösen benötige.				
18	Ich kann aus einer Steckbriefaufgabe alle Bedingungen herauslesen und diese in Gleichungen umwandeln.				
19	Ich kann lineare Gleichungssysteme in die Matrixschreibweise umformen, diese Lösen und die Funktionsgleichung angeben.				
20	Ich kann bei allgemein gestellten Textaufgaben den entsprechenden Lösungsansatz erkennen.				

Hilfestellung

Beim Durchgehen der Checkliste sind noch folgende Fragen aufgetaucht:

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

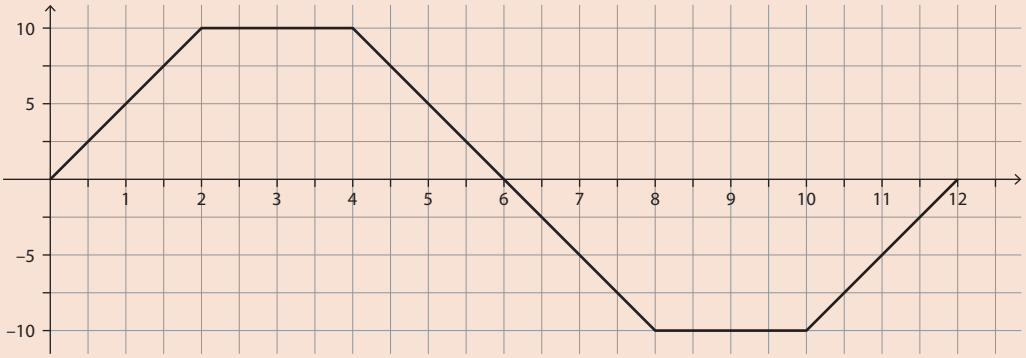


6.1 EINFÜHRUNG IN DIE INTEGRALRECHNUNG

Situationsbeschreibung – Gezeitenkraftwerk La Rance

Am 26.11.1966 wurde an der Mündung des Flusses Rance bei Saint-Malo in Frankreich ein technisches Pionierprojekt eröffnet: das erste Gezeitenkraftwerk der Welt. Es nutzt den regelmäßigen Wechsel von Ebbe und Flut. Bei Flut strömt Meerwasser in ein großes Speicherbecken, bei Ebbe fließt es wieder zurück ins Meer. Dabei wird das Wasser jeweils durch Turbinen geleitet, die die Strömungsenergie in elektrische Energie umwandeln.

Das Schaubild stellt diesen Vorgang vereinfacht dar und zeigt die Zuflussrate d des Meerwassers in den Speicher in Abhängigkeit von der Zeit (x-Achse: Zeit in Stunden; y-Achse: Zufluss in Mio. m^3/h).



Damit das Modell rechnerisch gut bearbeitet werden kann, wird der reale Verlauf hier bewusst vereinfacht dargestellt: In Wirklichkeit würde die Zuflussrate während Ebbe und Flut nicht "zackig" wechseln, sondern eher gleichmäßig an- und absteigen. Anschaulich erinnert dieser natürliche Verlauf an eine wellenförmige Kurve, etwa wie bei einer Sinusfunktion (der Begriff ist aus dem Mathematikunterricht meist schon bekannt).
Um dennoch einen praktikablen Kompromiss zwischen Realität und Lösbarkeit zu erhalten, kann die Zuflussrate des obigen Sachkontextes modellhaft durch die folgende Funktion beschrieben werden: $f(x) = 0{,}135x^3 - 2{,}43x^2 + 9{,}72x$.

Aufgabe 6.1 (WN7Y1e)

Beziehen Sie sich in dieser Aufgabe auf den oben abgebildeten eckigen Graphen.

a) Ermitteln Sie, um wie viele Millionen Kubikmeter sich die Wassermenge im Speicher nach 6 Stunden gegenüber dem Beginn verändert hat.

b) Zeigen Sie mit einer Begründung, dass nach 12 Stunden wieder genau dieselbe Wassermenge im Speicher vorliegt wie zu Beginn der Betrachtung.

c) Untersuchen Sie, in welchem Zeitabschnitt die gespeicherte Wassermenge am stärksten ansteigt.

d) Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Speicher den größten Füllstand erreicht.

ⓘ **Ober- und Untersumme (T8mXQh)**

Gerade in Sachzusammenhängen soll oft eine Fläche unter einer Funktion bestimmt werden, die sich nicht einfach aus bekannten geometrischen Formen (Rechtecke, Dreiecke usw.) zusammensetzen lässt. In solchen Fällen kann man den Flächeninhalt näherungsweise über Ober- und Untersummen bestimmen.

Der Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen wird mithilfe von Rechtecken angenähert:

- Bei der Obersumme werden Rechtecke gleicher Breite so gewählt, dass ihre Oberkante über dem Graphen liegt. In jedem Teilintervall berührt dabei mindestens ein oberer Eckpunkt den Funktionsgraphen.
- Bei der Untersumme werden Rechtecke ebenfalls gleicher Breite so gewählt, dass ihre Oberkante unter dem Graphen liegt. Auch hier liegt in jedem Teilintervall mindestens ein Eckpunkt auf dem Graphen.

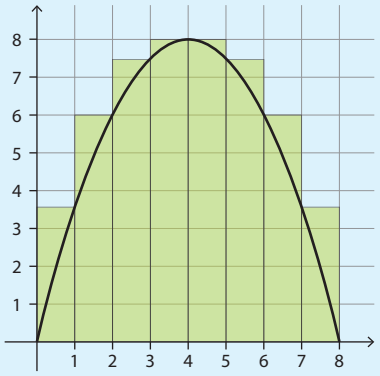
Ⓑ **Beispiel**

Betrachtet wird die Funktion $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x$.

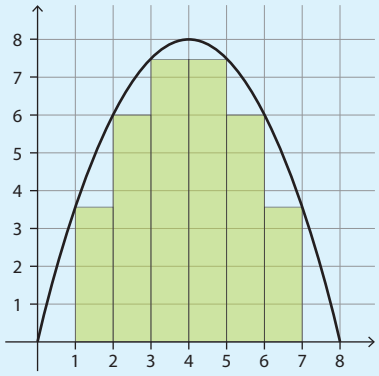
Bei der Obersumme liegt die Fläche der Rechtecke stets ein Stück über dem Graphen – dadurch wird insgesamt zu viel Fläche erfasst. Bei der Untersumme liegen die Rechtecke unter dem Graphen – hier wird zu wenig Fläche gezählt.

Eine naheliegende Idee ist deshalb: Wird der Mittelwert aus Ober- und Untersumme gebildet, liegt das Ergebnis oft schon recht nah am "tatsächlichen" Flächeninhalt. In diesem Beispiel lässt sich das gut nachvollziehen.

Obersumme



Untersumme



Hinweis
Je mehr Rechtecke verwendet werden, also je schmaler sie sind, desto genauer wird die Näherung.

Da die Breite der einzelnen Rechtecke in unserem Beispiel immer 1 beträgt, gilt für die Rechteckfläche: $A = \text{Breite} \cdot \text{Höhe} = 1 \cdot f(x) = f(x)$.

Dabei wird jeweils der x-Wert eingesetzt, an dem die Rechteckkante den Graphen berührt (also linker oder rechter Rand – je nachdem, ob Ober- oder Untersumme verwendet wird).

Nun werden die Flächen der einzelnen Rechtecke jeweils von links nach rechts bestimmt:

$A_{O1} = f(1) = -0{,}5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 3{,}5$
$A_{O2} = f(2) = -0{,}5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 6$
$A_{O3} = f(3) = -0{,}5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 7{,}5$
$A_{O4} = f(4) = -0{,}5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = 8$
$A_{O5} = f(4) = -0{,}5 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = 8$
$A_{O6} = f(5) = -0{,}5 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 = 7{,}5$
$A_{O7} = f(6) = -0{,}5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 = 6$
$A_{O8} = f(7) = -0{,}5 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 = 3{,}5$

$A_{U1} = f(1) = -0{,}5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 3{,}5$
$A_{U2} = f(2) = -0{,}5 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 = 6$
$A_{U3} = f(3) = -0{,}5 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 = 7{,}5$
$A_{U4} = f(5) = -0{,}5 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 = 7{,}5$
$A_{U5} = f(6) = -0{,}5 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 = 6$
$A_{U6} = f(7) = -0{,}5 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 = 3{,}5$

Werden die Teilflächen aufsummiert, ergibt dies:

$A_O = 50$ FE
$A_U = 34$ FE

Das arithmetische Mittel dieser beiden Werte ist mit 42 FE schon sehr nah an dem tatsächlich Wert. Dieser beläuft sich, das kann an dieser Stelle schon verraten werden, auf 42,67 FE.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.2 (TrXKFY)

Beziehen Sie sich in dieser Aufgabe auf die Situationsbeschreibung zum Gezeitenkraftwerk.

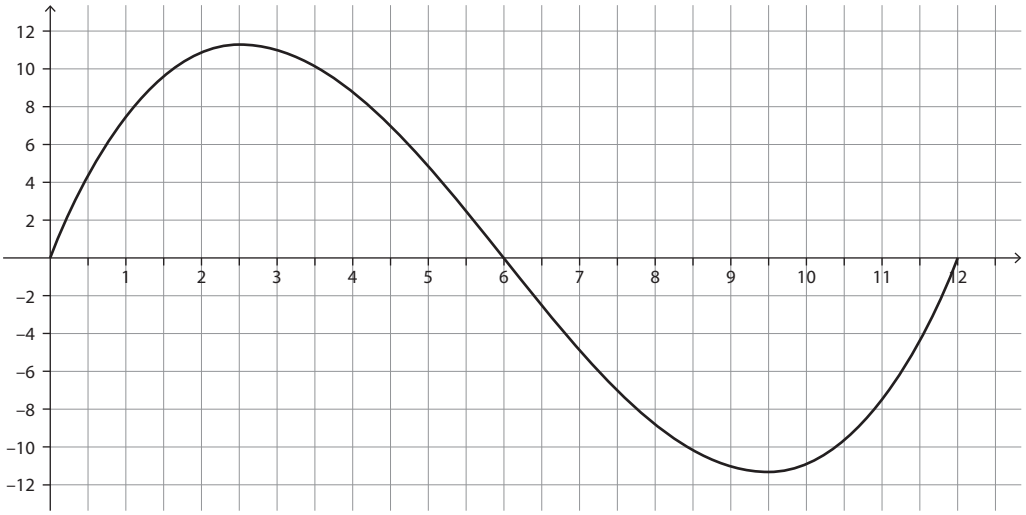
a) Tragen Sie zunächst in die Schaubilder für die Zuflussrate zur neuen Modellfunktion $f(x) = 0{,}135x^3 - 2{,}43x^2 + 9{,}72x$ die Rechtecke der Ober- und Untersumme im Zeitraum $0 \leq x \leq 6$ ein.

b) Berechnen Sie danach die Flächen der einzelnen Rechtecke (Teilsummen) und daraus jeweils die gesamte Ober- bzw. Untersumme.

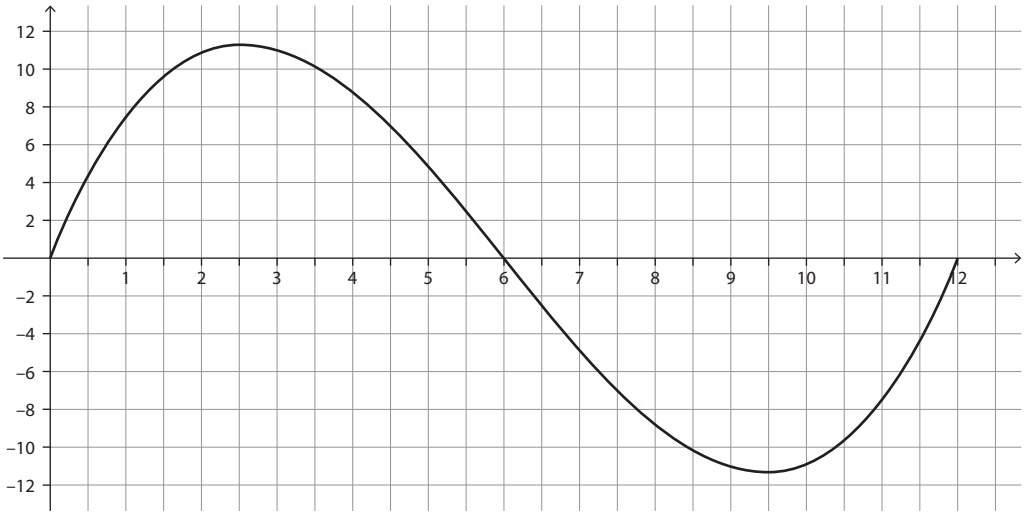
c) Bestimmen Sie anschließend, wie viele Mio. m^3 Wasser nach 6 Stunden im Speicher mehr vorhanden sind als zu Beginn.

d) Treffen Sie außerdem die Aussage aus Teilaufgabe 6.1 c) nun mithilfe der Extrempunktberechnung.

Obersumme



Untersumme



Aber auch die Flächenbestimmung mit der Ober- und Untersumme ist nur eine Annäherung der wirklichen Fläche. Doch bevor Sie zum sogenannten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kommen, mit dem Sie die exakte Fläche berechnen können, welche vom Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen wird, bedarf es ein paar Erläuterungen zur Schreibweise.

ⓘ

Integral und Integralgrenzen

Auch die Flächenbestimmung mit Ober- und Untersumme liefert zunächst nur Näherungswerte. Um später mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine exakte Fläche berechnen zu können, ist zuerst die Integralschreibweise wichtig.

Integral
Das Integral bezeichnet immer die Fläche, die zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse eingeschlossen wird.

Die Fläche, die **zwischen dem Graphen einer Funktion f(x) und der x-Achse** liegt, wird als (bestimmtes) **Integral** bezeichnet. Dabei wird festgelegt, in welchem x-Bereich die Fläche betrachtet wird – also von welchem x-Wert bis zu welchem x-Wert. Diese beiden Randwerte heißen Integralgrenzen:

- a heißt **untere Integralgrenze** (meist der kleinere x-Wert),
- b heißt **obere Integralgrenze** (meist der größere x-Wert).

Wichtig: a und b müssen nicht Nullstellen der Funktion sein. Es kann jeder sinnvolle Bereich [a; b] gewählt werden, je nachdem, welche Fläche bestimmt werden soll.

Integralzeichen

Für Integrale gibt es ein eigenes Zeichen: $\int$

Das **Integralzeichen** ist ein lang gezogenes, stilisiertes S und steht für eine Summe. Gemeint ist die Summe unendlich vieler, unendlich schmaler Teilflächen (gedanklich wie sehr schmale Rechtecke), mit denen die Fläche unter dem Graphen zusammengesetzt wird.

Für die Fläche zwischen f(x) und der x-Achse von x = a bis x = b schreibt man:

Aussprache
Integral von a bis b, f von x dx

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

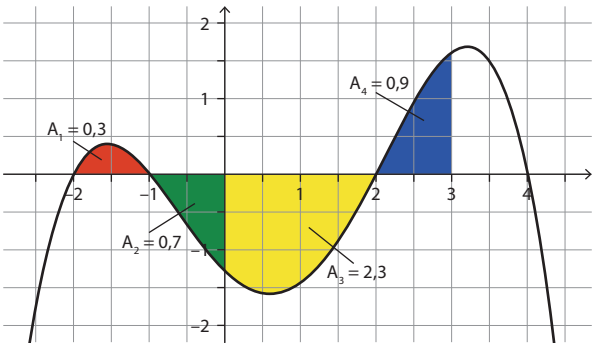
Delta-x
Der griechische Buchstabe Δ "Delta" (also D) steht für "Differenz" und beschreibt hier die Breite der Rechtecke.

Das *dx* gehört zwingend zur Schreibweise und man kann es sich als die "Breite" dieser winzigen Schritte vorstellen. In der Ober- und Untersumme hieß diese Breite noch Δx. Je kleiner Δx gewählt wird, desto genauer wird die Näherung – im Grenzfall "Δx –> 0" entsteht daraus die exakte Flächenberechnung, die später über den Hauptsatz möglich wird.

Aufgabe 6.3 (tvJzdG)

Achtung: negative Flächen
Wenn f(x) in einem Teil des Intervalls unterhalb der x-Achse liegt, liefert das Integral dort eine negative Fläche (genauer: einen negativen Flächeninhalt). Wenn wirklich die "geometrische Fläche" gemeint ist, muss man das später entsprechend berücksichtigen (z. B. durch Aufteilen).

Bestimmen Sie das Integral mithilfe der im Schaubild angegebenen Teil-Flächeninhalte.



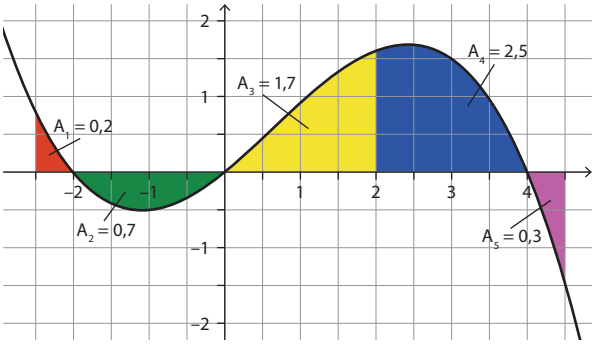
a) $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$

b) $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

c) $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

d) $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

e) $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$



f) $\int_{-2,5}^{0} f(x)\,dx$

g) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

h) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx$

i) $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

j) $\int_{2}^{4,5} f(x)\,dx$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



6.2 HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- / INTEGRALRECHNUNG

Situationsbeschreibung – Lärmschutzwall an der A1
Entlang der A1 rund um das Westhofener-Kreuz soll ein neuer Lärmschutzwall errichtet werden, um die Anwohner wirksamer vor Verkehrslärm zu schützen. Direkt davor ist ein etwa 3 km langer Graben geplant, der später mit Wasser gefüllt wird und zusätzlich als gestalterisches Element dient. Zwischen Graben und Mauer wird eine Böschung aufgeschüttet, die anschließend begrünt werden soll. Damit möglichst wenig Material zu- oder abgefahren werden muss, soll der Aushub aus dem Graben vollständig für die Böschung verwendet werden.

Für die weiteren Berechnungen wird angenommen, dass der Querschnitt von Graben und Böschung durch eine Funktion beschrieben werden kann. Mutterboden hat dabei eine Dichte von $\rho = 1{,}3\ t/m^3$.

Der Graben beginnt 2 m vor der Lärmschutzwand und besitzt eine Breite von 4 m. Der Verlauf wird modellhaft beschrieben durch: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$
(Die Variable x beschreibt dabei die horizontale Entfernung in Metern, f(x) die Höhe des Profils in Metern.)

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (GudWnH)
Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lässt sich die Fläche bestimmen, die der Graph einer Funktion zwischen zwei x-Werten zusammen mit der x-Achse einschließt. Während Ober- und Untersummen diese Fläche nur annähern, liefert der Hauptsatz ein exaktes Ergebnis.

Aussprache
F(x) sprechen Sie aus: "Groß F von x"

Er lautet: $A = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Dabei sind a und b die **Integralgrenzen**: Es wird genau der Flächeninhalt im Bereich von x = a bis x = b berechnet. Das Symbol $\left[F(x)\right]_a^b$ bedeutet: Zuerst wird F an der oberen Grenze b ausgewertet und anschließend der Wert an der unteren Grenze a abgezogen.

F(x) ist die **Stammfunktion** von f(x).
Das heißt: F ist eine Funktion, deren Ableitung wieder f ergibt, also $F'(x) = f(x)$.

Die Stammfunktion F(x) zu f(x) ist genau die Funktion, deren Ableitung wieder f(x) ergibt. Anders gesagt: Wird F(x) abgeleitet, entsteht f(x). Beispielsweise ist $F(x) = x^2$ eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$, denn $F'(x) = 2x = f(x)$.

Damit ist das Bestimmen einer Stammfunktion gewissermaßen das Gegenstück zum Ableiten. Dieses Verfahren heißt **Integrieren** – NICHT "Aufleiten".

ⓘ **Stammfunktion (GudWnH)**
Eine Stammfunktion F(x) zu einer Funktion f(x) ist eine Funktion, deren Ableitung wieder f(x) ergibt. Es gilt also:

$F'(x) = f(x)$.

Damit ist eine Stammfunktion gewissermaßen das "Gegenstück" zur Ableitung: Statt "ableiten" wird hier "integrieren" durchgeführt.
Für Potenzfunktionen gibt es eine besonders einfache Regel. Gilt

$f(x) = a \cdot x^n$

dann ist eine passende Stammfunktion

$F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$

Ⓑ **Beispiel**
Für die Bildung einer Stammfunktion müssen Koeffizient und Exponent lediglich in die allgemeine Stammfunktionsregel eingesetzt werden. Zur Kontrolle sollte die gefundene Stammfunktion (zumindest im Kopf) einmal abgeleitet werden, um zu prüfen, ob dabei wieder die ursprüngliche Funktion entsteht.

Eine Stammfunktion von $f(x) = 4x^3$ lautet $F(x) = \frac{4}{3+1}x^{3+1} = \mathbf{x^4}$

Eine Stammfunktion von $f(x) = 2x^3$ lautet $F(x) = \frac{2}{3+1}x^{3+1} = \mathbf{0{,}5x^4}$

Eine Stammfunktion von $f(x) = 3x^4$ lautet $F(x) = \frac{3}{4+1}x^{4+1} = \mathbf{\frac{3}{5}x^5}$

Eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{2}{3}x^5$ lautet $F(x) = \frac{2}{3(5+1)}x^{5+1} = \frac{2}{18}x^6 = \mathbf{\frac{1}{9}x^6}$

Mit etwas Übung können die Zwischenschritte beim Teilen durch n + 1 und Erhöhen des Exponenten auch direkt im Kopf gemacht und sofort das Endergebnis notiert werden.

ⓘ **Unbestimmtes Integral (GudWnH)**
Beim Integrieren taucht immer eine Besonderheit auf: Konstanten verschwinden beim Ableiten. Deshalb gibt es nicht nur eine einzige Stammfunktion, sondern unendlich viele, die sich nur durch eine Zahl unterscheiden.
Schreibt man diese ganze "Familie" mit einer beliebigen Konstante c, spricht man vom unbestimmten Integral:

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Ⓑ **Beispiel**
Zuerst wird die Stammfunktion ganz normal nach der bekannten Regel bestimmt. Danach wird einfach +c ergänzt und man erhält das unbestimmte Integral. Für f(x) = 4x gilt:

$\int 4x\,dx = 2x^2 + c$.

Dabei sind z. B. mit $c = 4$ oder $c = \frac{3}{2}$

$F_1(x) = 2x^2 + 4$ und $F_2(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}$

beides Stammfunktionen von f(x) = 4x, denn in beiden Fällen ist F'(x) = 4x.
Das "+c" steht also dafür, dass es nicht nur eine Lösung gibt, sondern unendlich viele.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Bestimmtes Integral (GudWnH)

Werden beim Integral konkrete Grenzen vorgegeben, entsteht daraus ein bestimmtes Integral. Dann wird nicht mehr eine Funktionsfamilie angegeben, sondern ein konkreter Zahlenwert berechnet:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Dieser Wert entspricht (je nach Situation) häufig dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [a; b] – allerdings mit Vorzeichen (unterhalb der x-Achse negativ).

Rechnerisch wird dazu eine Stammfunktion F(x) genutzt und anschließend eingesetzt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Wichtig dabei: Das +c aus dem unbestimmten Integral taucht hier nicht mehr auf – selbst wenn man es mitschreiben würde, würde es sich bei F(b) – F(a) automatisch wegkürzen.

Beispiel

Gegeben sei f(x) = 4x. Gesucht ist das bestimmte Integral im Intervall [2; 3]:

$$\int_2^3 4x\,dx$$

Eine Stammfunktion ist

$$F(x) = 2x^2$$

Nun wird eingesetzt:

$$\int_2^3 4x\,dx = \big[2x^2\big]_2^3 = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^2 = 10$$

Der Wert des bestimmten Integrals beträgt also 10.

Für eine detailliertere Beschreibung siehe Erläuterung und Beispiel auf der **nächsten Seite**.

Aufgabe 6.4 (qTcAhm)

Überprüfen Sie, ob die angegebene Funktion F(x) eine Stammfunktion von f(x) ist.

a) $f(x) = 8x^3$, $F(x) = 2x^4 + 1$

b) $f(x) = 5x^2$, $F(x) = \frac{5}{3}x^3 + x$

c) $f(x) = -4x^2 + 6$, $F(x) = -2x^2 + 6x - 3$

Aufgabe 6.5 (14LxkD)

Bestimmen Sie den Wert von a (und ggf. b), sodass F eine Stammfunktion von f ist.

a) $f(x) = 3x^2$, $F(x) = ax^3$

b) $f(x) = -6x^5$, $F(x) = ax^6$

c) $f(x) = 7x^4$, $F(x) = ax^b$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^7$, $F(x) = ax^b$

Aufgabe 6.6 (ZPq1DH)

Bestimmen Sie jeweils zwei verschiedene Stammfunktionen F_1 und F_2 zu f.

a) $f(x) = 2x^4$

b) $f(x) = -0{,}8x^3$

c) $f(x) = 3x$

d) $f(x) = 0$

Aufgabe 6.7 (hr8QBZ)

Bestimmen Sie zu jeder Funktion f(x) das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ (also eine Stammfunktion +c). Prüfen Sie durch Ableiten.

a) $f(x) = 9$

b) $f(x) = 6x$

c) $f(x) = -4x^2$

d) $f(x) = 0{,}5x^3$

e) $f(x) = 3x^2 - 8x$

f) $f(x) = 2x^4 + 5$

g) $f(x) = -1{,}2x^3 + 4x$

h) $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{5}{2}x$

i) $f(x) = x^5 - 3x^2 + x - 4$

j) $f(x) = -0{,}4x^6 + 1{,}5x^2 - 7$

k) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 1$

l) $f(x) = -\frac{5}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{2}x$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

ⓘ **Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (aXJkbM)**
In der Erklärung und im Beispiel zum bestimmten Integral auf der vorherigen Seite taucht bereits eine erste Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf. Nun wird dieser Zusammenhang systematisch erläutert. Der Hauptsatz stellt eine direkte Verbindung zwischen Flächenberechnung und Stammfunktionen her:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

- **Links** steht die Fläche in Integralschreibweise: Die Funktion f(x) und die beiden Integralgrenzen a und b geben an, in welchem Intervall die Fläche zwischen Graph und x-Achse betrachtet wird (kleinere Grenze unten, größere oben).
- In der **Mitte** wird eine Stammfunktion F(x) in eckigen Klammern notiert; rechts daneben stehen die Grenzen a und b. Das bedeutet: F(x) soll an beiden Grenzen ausgewertet werden.
- **Rechts** folgt die eigentliche Rechnung: Zuerst wird die obere Integralgrenze in die Stammfunktion eingesetzt, danach die untere. Anschließend wird daraus die Differenz F(b) – F(a) gebildet.

Wichtig: Bei der Rechnung verschwindet eine mögliche Konstante +c automatisch, da sie sowohl in F(b) als auch in F(a) enthalten wäre und sich beim Subtrahieren weg kürzt.

Ⓑ **Beispiel**
Als Beispiel dient die Funktion $f(x) = -0{,}5x^2 + 4x$ im Intervall [0; 8] aus Kapitel 6.1. In der Näherung über Ober- und Untersumme ergab sich zuvor bereits ein Wert von etwa 42 Flächeneinheiten. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lässt sich nun der exakte Wert bestimmen:

$$A = \int_0^8 (-0{,}5x^2 + 4x)\,dx \qquad \text{| Stammfunktion bilden}$$

$$= \left[-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2\right]_0^8 \qquad \text{| "obere" minus "untere" Integralgrenze}$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\cdot 8^3 + 2\cdot 8^2\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot 0^3 + 2\cdot 0^2\right) \qquad \text{| Klammern auflösen}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 512 + 2\cdot 64 + \frac{1}{6}\cdot 0 - 2\cdot 0 \qquad \text{| Werte zusammenfassen}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 512 + 2\cdot 64$$

$$= \frac{128}{3} = 42{,}\overline{6} \approx \mathbf{42{,}667}$$

Damit ergibt sich für die eingeschlossene (orientierte) Fläche im Intervall [0; 8] ein Wert von 42,67 FE. Die Näherung 42 FE aus Ober-/Untersumme lag damit bereits sehr nah am exakten Ergebnis.

Aufgabe 6.8 **(6Wj7nf)**
Bestimmen Sie den Wert der folgenden bestimmten Integrale. Geben Sie die Ergebnisse exakt an (also als Bruch bzw. ganze Zahl, nicht gerundet).

a) $\int_{-2}^{4} 3x\,dx$
b) $\int_{0}^{5} 2x^2\,dx$
c) $\int_{-1}^{2} (4x^3 - 2)\,dx$
d) $\int_{1}^{3} (5x^2 - x)\,dx$
e) $\int_{-3}^{1} x^2\,dx$
f) $\int_{-2}^{2} (x^3 + x)\,dx$
g) $\int_{0}^{4} (2x^3 - x^2)\,dx$
h) $\int_{-1}^{1} (6x^4 - 3x^2)\,dx$
i) $\int_{1}^{2} (x - 1)(x + 2)\,dx$
j) $\int_{-2}^{0} x(x + 3)\,dx$
k) $\int_{0}^{3} (x^2 - 4x + 4)\,dx$
l) $\int_{-1}^{2} (2x - 1)^2\,dx$
m) $\int_{1}^{3} (\frac{1}{2}x^2 + 3)\,dx$
n) $\int_{-2}^{2} (\frac{3}{4}x^3 - 2x)\,dx$
o) $\int_{0}^{6} (\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x)\,dx$
p) $\int_{-1}^{3} (\frac{5}{2}x - \frac{3}{2})\,dx$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.9 (HcFRc5)

Bestimmen Sie die obere Integralgrenze a so, dass die Gleichung stimmt.

a) $\int_0^a x^2\,dx = \frac{64}{3}$

b) $\int_1^a x^2\,dx = 13$

c) $\int_0^a 3x^2\,dx = 24$

d) $\int_1^a x\,dx = \frac{15}{2}$

e) $\int_{-1}^a (2x+1)\,dx = 6$

f) $\int_0^a (x^3+2x)\,dx = 10$

Aufgabe 6.10 (GZrFbb)

Bestimmen Sie jeweils den Parameter so, dass die angegebene Integralbedingung erfüllt ist.

a) $f(x) = ax^2 + 4x$; $\int_0^2 f(x)\,dx = 20$

b) $g(x) = 3x^2 + bx$; $\int_{-1}^1 g(x)\,dx = 6$

c) $h(x) = ax^3 - 2x$; $\int_0^2 h(x)\,dx = 0$

d) $p(x) = 2x^3 + ax^2$; $\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{3}{2}$

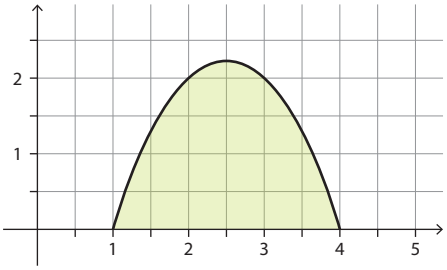
e) $q(x) = ax^4 + 1$; $\int_0^2 q(x)\,dx = 13{,}8$

f) $r(x) = x^3 + a$; $\int_{-2}^2 r(x)\,dx = 40$

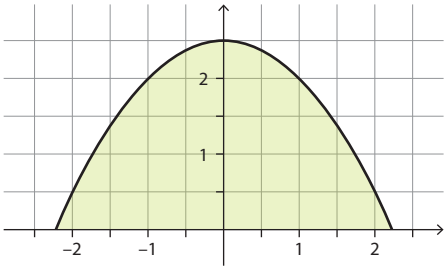
Aufgabe 6.11 (bHWZx8)

Berechnen Sie den Flächeninhalt der markierten Fläche.

a) $f(x) = -x^2 + 5x - 4$

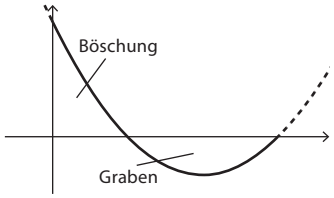


b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2{,}5$



Aufgabe 6.12 (EA7kmn)

Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung zum Lärmschutzwall und bearbeiten Sie die folgenden Fragestellungen mit $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$:



a) Wie groß ist die Querschnittsfläche des Grabens?

b) Reicht das Aushubmaterial aus, um die geplante Böschung vollständig aufzuschütten – oder bleibt Material übrig bzw. fehlt etwas? Begründen Sie dies rechnerisch über einen Flächenvergleich.

c) Wie groß ist das insgesamt bewegte Volumen an Mutterboden (in m^3) bei einer Länge von 3 km? Bestimmen Sie anschließend die zugehörige Masse in Tonnen.

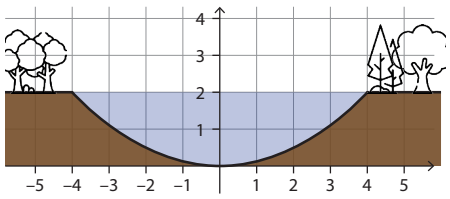
d) Welche maximale Höhe erreicht die Böschung, und welche maximale Tiefe hat der Graben (jeweils im Querschnitt)?

Aufgabe 6.13 (4DceM5)

Der Grund eines 2 km langen Kanals hat die Form einer Parabel. Eine Einheit entspricht einem Meter.

a) Berechnen Sie den Querschnitt des Kanals.

b) Wie viel Tonnen Wasser befindet sich im Kanal, wenn er ganz gefüllt ist?



Aufgabe 6.14 (7WSyJz)

Berechnen Sie jeweils das bestimmte Integral der Funktion in den angegebenen Intervallen.

a) $f(x) = 2x - 3$; $I_1 = [-1; 4]$, $I_2 = [0; 2]$

b) $g(x) = x^2 - 4x + 1$; $I_1 = [0; 5]$, $I_2 = [1; 3]$

c) $h(x) = -0{,}5x^3 + 2x$; $I_1 = [-2; 2]$, $I_2 = [0; 3]$

d) $k(x) = x^2 + x - 2$; $I_1 = [-2; 1]$, $I_2 = [0; 4]$

e) $m(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$; $I_1 = [-2; 2]$, $I_2 = [0; 1]$

f) $n(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$; $I_1 = [0; 3]$, $I_2 = [1; 4]$

Aufgabe 6.15 (jLFGTe)

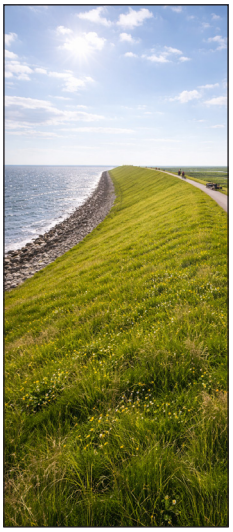


In Kapitel 4 wurde in Aufgabe 4.118 bereits der "Berliner Bogen" in Hamburg betrachtet. Die Glasfassade kann näherungsweise durch eine Parabel beschrieben werden, die den äußeren Rand der Front bildet: $f(x) = -0{,}03x^2 + 36$. Dabei entspricht 36 m der maximalen Höhe der Fassade; die gesamte Breite beträgt 69 m.

a) Berechnen Sie mithilfe des Modells, wie groß die Glasfläche der Fassade ist (in m^2).

b) Für die Fassade wird Doppelverglasung eingesetzt: zwei Glasscheiben mit jeweils 2 mm Dicke. Bestimmen Sie auf dieser Grundlage das Gesamtgewicht des verbauten Glases in Tonnen. Verwenden Sie für Glas die Dichte $\rho = 2600\ kg/m^3$.

Ⓚ **Aufgabe 6.16 (3uM4R4)**





Durch den steigenden Meeresspiegel sollen die Deiche rund um Sankt Peter-Ording verstärkt werden. Für die Planung wird der Querschnitt eines besonders langen Deichabschnitts (10 km) vereinfacht modelliert: Die Form des Deichprofils lässt sich ungefähr durch die Funktion $f(x) = -\frac{1}{70^2}x^3 + \frac{1}{70}x^2$ beschreiben. Dabei sind x und f(x) jeweils in Metern angegeben.

a) Für die Genehmigung ist eine Mindesthöhe von 10 m vorgeschrieben. Prüfen Sie anhand des Modells, ob diese Höhe erreicht wird. Begründen Sie die Entscheidung mithilfe geeigneter Kenngrößen des Funktionsgraphen.

b) Für die Bauplanung wird die Menge an benötigtem Mutterboden abgeschätzt. Bestimmen Sie das Volumen an Mutterboden für den gesamten 10-km-Abschnitt.

c) Mutterboden hat eine Dichte von $\rho = 1{,}3\ t/m^3$. Bestimmen Sie die Gesamtmasse des benötigten Materials. Entscheiden Sie anschließend, wie viele LKW-Fahrten erforderlich sind, wenn ein vierachsiger LKW maximal 20 t transportieren kann. Schätzen Sie zum Abschluss die Dauer des Antransports in Jahren rechnerisch ab, wenn rund um die Uhr alle 10 Minuten ein LKW anliefert, und beurteilen Sie kurz, ob das realistisch ist.

Ⓚ **Aufgabe 6.17 (7Sp2za)**



Auf dem Dach einer Schule wird die Leistung einer Solaranlage an einem klaren Frühlingstag modellhaft beschrieben. Die momentane elektrische Leistung P(t) (in kW) hängt von der Zeit t (in Stunden seit 06:00 Uhr) ab: $P(t) = -0{,}08t^3 + 0{,}96t^2$ für $0 \le t \le 12$

(Hinweis: t = 0 entspricht 06:00 Uhr, t = 3 entspricht 09:00 Uhr etc.)

Die Schulleitung möchte abschätzen, ob die erzeugte Energie ausreicht, um am selben Tag die Tablets für eine Projektwoche zu laden.

a) Zu Beginn und am Ende des betrachteten Zeitraums soll die Anlage "praktisch nichts" liefern. Prüfen Sie am Modell, ob das plausibel ist, und deuten Sie die Ergebnisse im Kontext.

b) Für die Planung der stärksten Einspeisezeit ist wichtig, wann die Leistung am größten ist. Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt das Maximum im Modell liegt und wie groß die maximale Leistung ist.

c) Für den Energieertrag zählt nicht die momentane Leistung, sondern die über die Zeit aufsummierte Energie.
Bestimmen Sie die insgesamt erzeugte elektrische Energie von 06:00 Uhr bis 18:00 Uhr in kWh. (Im Modell entspricht das der "Fläche" zwischen P(t) und der t-Achse im Intervall [0; 12].)

d) Ein Teil der Energie wird direkt verbraucht, der Rest geht in einen Speicher. Von 10:00 Uhr bis 14:00 Uhr ist der Verbrauch besonders hoch.
Ermitteln Sie, wie viel Energie die Anlage zwischen 10:00 Uhr und 14:00 Uhr liefert, und vergleichen Sie diesen Anteil prozentual mit dem gesamten Tagesertrag aus c).

e) Die Tablets benötigen zusammen 18 kWh. Begründen Sie mit Ihren Ergebnissen, ob die Tagesproduktion im Modell dafür reicht. Falls ja: Wie viel Reserve bleibt ungefähr?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



6.3 INTEGRAL ZWISCHEN ZWEI FUNKTIONEN

Situationsbeschreibung – Airline Logo

Die neue Airline AeroLynx entwickelt ein Logo, das bewusst an den Querschnitt einer Tragfläche erinnert: oben leicht gewölbt, unten flacher – wie ein stilisiertes Flügelprofil. Das Logo soll später als einfarbige Fläche auf Leitwerk, Tragflächenverkleidung und Werbematerialien gedruckt werden. Damit die Form in jeder Größe exakt gleich bleibt, wird die Kontur mathematisch beschrieben.

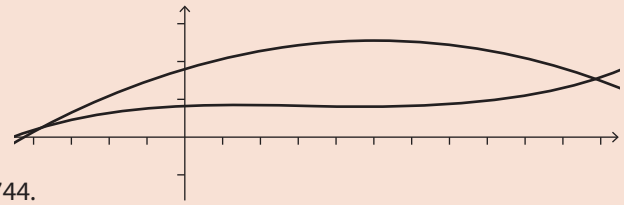
In einem Koordinatensystem steht x für die horizontale Position entlang des Logos (z. B. in cm) und y für die Höhe der Kontur (ebenfalls z. B. in cm).

Die Oberseite des Profils wird modelliert durch

$f(x) = -0{,}03x^2 + 0{,}3x + 1{,}8$

und die Unterseite durch

$g(x) = 0{,}002x^3 - 0{,}02x^2 + 0{,}044x + 0{,}744.$



Die gefüllte Logoform entsteht als Fläche zwischen den beiden Kurven. Betrachtet wird dabei genau der Bereich, in dem das Profil "geschlossen" ist – also das Intervall zwischen den beiden Schnittpunkten der Funktionen f und g.

Integral zwischen zwei Funktionen (muyX9M)

Sollen Integrale zwischen zwei Funktionsgraphen bestimmt werden, geht es nicht mehr um "Integral unter einem Graphen", sondern um den Bereich, der von zwei Kurven gleichzeitig begrenzt wird. Entscheidend ist dabei immer der Betrachtungsbereich: Er liegt in der Regel zwischen den Schnittpunkten der beiden Graphen.

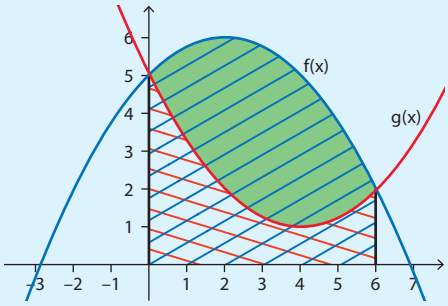
In diesem Bereich kann sich außerdem ändern, welcher Graph "oben" und welcher "unten" verläuft. Deshalb muss vor der Rechnung immer geprüft werden, ob sich die Graphen innerhalb des Intervalls nochmals schneiden. Falls ja, wird die Fläche in Teilbereiche zerlegt und die Teilflächen werden anschließend addiert.

Vorgehensweise 1: Zwei Integrale berechnen und anschließend subtrahieren

Eine Möglichkeit besteht darin, das gesuchte Integral als Differenz zweier Integrale zur x-Achse zu betrachten:

1. Zuerst wird das Integral berechnet, das der obere Graph im betrachteten Intervall mit der x-Achse einschließt.
2. Danach wird das Integral berechnet, das der untere Graph im selben Intervall mit der x-Achse einschließt.
3. Anschließend werden beide Integrale voneinander abgezogen, sodass nur der Bereich zwischen den Graphen übrig bleibt.

Im Schaubild bedeutet das:
Wird das rot gestrichelte Integral g(x) von dem blau gestrichelten Integral f(x) abgezogen, bleibt genau die grün hinterlegte Fläche als gesuchtes Differenzintegral übrig.



Rechnerisch sieht das im Intervall [a; b] so aus:

$$A_{zwischen} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Ⓑ **Beispiel**

Im obigen Schaubild ist die blaue Funktion gegeben mit $f(x) = -0{,}25x^2 + x + 5$ und die rote Funktion gegeben mit $g(x) = 0{,}25x^2 - 2x + 5$. Das eingeschlossene Integral wird durch die Schnittpunkte der Funktionen begrenzt, hier ablesbar durch $x = 0$ und $x = 6$. Sollten keine Integralgrenzen vorgegeben oder die Schnittpunkte nicht ablesbar sein, müssen diese bestimmt werden. Damit ergibt sich für das grüne Differenzintegral:

$$A_{zwischen} = \int_0^6 (-0{,}25x^2 + x + 5)\,dx - \int_0^6 (0{,}25x^2 - 2x + 5)\,dx$$

Zur Übersicht werden die beiden Integrale getrennt ausgewertet:

$$\begin{aligned} A_{blau} &= \int_0^6 (-0{,}25x^2 + x + 5)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_0^6 \\ &= -\frac{1}{12}\cdot 6^3 + 0{,}5\cdot 6^2 + 5\cdot 6 - \underbrace{\left(-\frac{1}{12}\cdot 0^3 + 0{,}5\cdot 0^2 + 5\cdot 0\right)}_{=0} \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{rot} &= \int_0^6 (0{,}25x^2 - 2x + 5)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 5x\right]_0^6 \\ &= \frac{1}{12}\cdot 6^3 - 6^2 + 5\cdot 6 - \underbrace{\left(\frac{1}{12}\cdot 0^3 - 0^2 + 5\cdot 0\right)}_{=0} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Wird das rote Integral vom blauen Integral abgezogen, ergibt sich für das Differenzintegral:

$$A_{zwischen} = 30 - 12 = 18 \text{ FE}$$

Der Nachteil hierbei ist, dass zwei einzelne Integrale ausgerechnet werden müssen.

ⓘ **Vorgehensweise 2: Differenzfunktion**

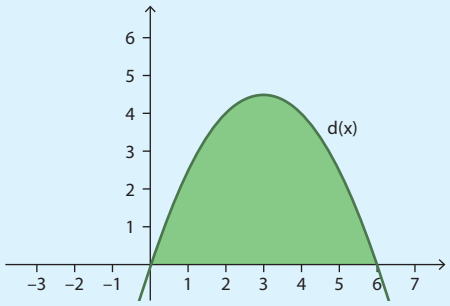
Ob zuerst die beiden Integrale unter den Graphen einzeln berechnet und anschließend voneinander abgezogen werden oder ob direkt die Funktionsgleichungen voneinander abgezogen werden, spielt rechnerisch keine Rolle. In beiden Fällen entsteht am Ende dieselbe Flächenbilanz zwischen den beiden Graphen.

Statt also zunächst "Integral unter f" und "Intergal unter g" zu bestimmen, kann direkt eine neue Funktion gebildet werden: die **Differenzfunktion**. Dazu wird die Funktionsgleichung des oberen Graphen minus die Funktionsgleichung des unteren Graphen gerechnet:

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Diese Funktion d(x) beschreibt für jedes x genau den "vertikalen Abstand" zwischen beiden Graphen. Das gesuchte Integral zwischen den Funktionsgraphen ergibt sich dann als Integral zwischen d(x) und der x-Achse – und zwar im betrachteten Intervall, das in der Regel zwischen den Schnittpunkten der beiden Graphen liegt:



$$A_{zwischen} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b d(x)\,dx$$

Oft ist zunächst nicht eindeutig, welcher Graph im Intervall "oben" und welcher "unten" liegt. Das kann entweder im Schaubild erkannt oder durch einen kurzen Test (z. B. Einsetzen eines x-Wertes zwischen den Schnittpunkten) überprüft werden. Wird bei der Differenz versehentlich "andersherum" gerechnet, ändert sich nur das Vorzeichen des Integrals – für den Integralwert wird am Ende ohnehin der positive Wert angegeben (also der Betrag).

Beispiel Ⓑ

Mit den Funktionen aus dem vorherigen Beispiel ergibt sich für die Differenzfunktion:

$$\begin{aligned} d(x) &= -0{,}25x^2 + x + 5 - (0{,}25x^2 - 2x + 5) \\ &= -0{,}25x^2 + x + 5 - 0{,}25x^2 + 2x - 5 \\ &= -0{,}5x^2 + 3x \end{aligned}$$

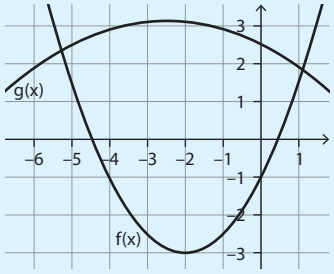
Damit kann nun das Differenzintegral bestimmt werden:

$$\begin{aligned} A_{zwischen} &= \int_0^6 (-0{,}5x^2 + 3x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^6 \\ &= -\frac{1}{6}\cdot 6^3 + \frac{3}{2}\cdot 6^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Diese Variante bedeutet deutlich weniger Aufwand, weshalb sie **vorzuziehen** ist.

Beispiel Ⓑ

Das dritte Beispiel verdeutlicht den Integralberechnungsprozess inklusive Schnittpunktbestimmung. Dazu sind die Funktionen $f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$ und $g(x) = -0{,}1x^2 - 0{,}5x + 2{,}5$ gegeben. Hier wurde f bewusst unterhalb von g gewählt, um zu zeigen, dass es grundsätzlich keine Rolle spielt, welche Funktion "oben" oder "unten" liegt – entscheidend ist am Ende der Betrag des bestimmten Integrals. Die Berechnung des Differenzintegrals erfolgt in drei Schritten:



1. **Bestimmung der Differenzfunktion**

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - g(x) \\ &= 0{,}5x^2 + 2x - 1 - (-0{,}1x^2 - 0{,}5x + 2{,}5) \\ &= 0{,}5x^2 + 2x - 1 + 0{,}1x^2 + 0{,}5x - 2{,}5 \\ &= 0{,}6x^2 + 2{,}5x - 3{,}5 \end{aligned}$$

2. **Schnittpunkte der Funktionen (Integralgrenzen)**
   Die Schnittpunkte ergeben sich aus f(x) = g(x) bzw. aus den Nullstellen der Differenzfunktion d(x) = 0.

$d(x) = 0$

$0 = 0{,}6x^2 + 2{,}5x - 3{,}5 \quad | :0{,}6$

$= x^2 + \frac{25}{6}x - \frac{35}{6} \quad |$ pq-Formel

$x_{1/2} = -\frac{25}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{25}{12}\right)^2 + \frac{35}{6}}$

$x_1 = 1{,}106 \quad \vee \quad x_2 = -5{,}273$

Damit liegen die Integralgrenzen bei $x_1 = 1{,}1$ und $x_2 = -5{,}3$.

3. **Berechnung des Differenzintegrals**
   Zu beachten ist: Der kleinere Nullstellenwert ist die untere, der größere die obere Integralgrenze.

$$A = \int_{-5{,}3}^{1{,}1} (0{,}6x^2 + 2{,}5x - 3{,}5)\, dx$$

$$= \left[0{,}2x^3 + 1{,}25x^2 - 3{,}5x\right]_{-5{,}3}^{1{,}1}$$

$$= 0{,}2 \cdot 1{,}1^3 + 1{,}25 \cdot 1{,}1^2 - 3{,}5 \cdot 1{,}1 - \left(0{,}2 \cdot (-5{,}3)^3 + 1{,}25 \cdot (-5{,}3)^2 - 3{,}5 \cdot (-5{,}3)\right)$$

$$= -2{,}0713 - (23{,}8871)$$

$$= -25{,}9584$$

Die negative Zahl entsteht, weil hier $d(x) = f(x) - g(x)$ gewählt wurde und f im betrachteten Bereich unterhalb von g liegt. Für die eingeschlossene (geometrische) Fläche wird daher der Betrag genommen: 25,96 FE.

Aufgabe 6.18 (Vqm5Mi)
Bestimmen Sie jeweils das Integral zwischen den beiden Funktionsgraphen im angegebenen Intervall. Nutzen Sie dazu eine geeignete Differenzfunktion und integrieren Sie über das vorgegebene Intervall.

a) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x + 1$, $g(x) = x + 1$, Intervall: $[0; 4]$
b) $f(x) = 0{,}25x^2 - 2x + 6$, $g(x) = -x + 2$, Intervall: $[1; 5]$
c) $f(x) = -x^2 + 6x$, $g(x) = 2x$, Intervall: $[0; 3]$
d) $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $g(x) = 2$, Intervall: $[0; 4]$
e) $f(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 4$, $g(x) = x$, Intervall: $[0; 6]$

Aufgabe 6.19 (UykPPL)
Bestimmen Sie jeweils den Wert des Integrals $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$ im angegebenen Intervall. Beachten Sie, dass negative Beiträge möglich sind und sich Flächenanteile ober- und unterhalb der x-Achse gegenseitig aufheben können.

a) $f(x) = x^3 - 3x$, $g(x) = x^2 - 1$, Intervall: $[-2; 2]$
b) $f(x) = -x^3 + 4x$, $g(x) = x^2$, Intervall: $[0; 2]$
c) $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x$, $g(x) = -0{,}5x^2 + x$, Intervall: $[-1; 3]$
d) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$, $g(x) = -x^2 - x$, Intervall: $[-1; 2]$
e) $f(x) = -0{,}5x^3 + 3x$, $g(x) = x^2 - 2$, Intervall: $[0; 3]$

Aufgabe 6.20 (QzdTex)
Ermitteln Sie jeweils das Integral der Differenzfunktion f – g im angegebenen Intervall.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2$, $g(x) = 0$, Intervall: $[-2; 2]$
b) $f(x) = -x^4 + 5x^2$, $g(x) = x^2$, Intervall: $[-2; 2]$
c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $g(x) = 1$, Intervall: $[-1; 1]$
d) $f(x) = -0{,}5x^4 + 4x^2$, $g(x) = 0{,}5x^2$, Intervall: $[0; 2]$
e) $f(x) = x^4 - 6x^2$, $g(x) = -2x^2$, Intervall: $[-2; 2]$
f) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 3$, $g(x) = -0{,}25x^2 - 1$, Intervall: $[-3; -3]$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.21 (jtBBa8)

Bestimmen Sie jeweils das eingeschlossene Integral zwischen den Graphen von f und g im Bereich zwischen den Schnittpunkten.

a) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, $g(x) = x + 1$
b) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x + 2$, $g(x) = x + 2$
c) $f(x) = 0{,}25x^2 - 2x + 5$, $g(x) = -x + 5$
d) $f(x) = -x^2 + 2x + 6$, $g(x) = 2$
e) $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 3$, $g(x) = 3x - 3$
f) $f(x) = -0{,}25x^2 + 2x$, $g(x) = x$
g) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 1$
h) $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = -x$

Aufgabe 6.22 (6fCepN)

Bestimmen Sie jeweils das Differenzintegral im Intervall zwischen der jeweils kleinsten und größten Schnittstelle.

a) $f(x) = x^3 - 3x$, $g(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$, $g(x) = -x^2 - x$
c) $f(x) = -x^3 + 4x$, $g(x) = x^2$
d) $f(x) = 0{,}5x^3 - 2x$, $g(x) = 0{,}5x^2 - x$
e) $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = 2x^2 - 4x$
f) $f(x) = -x^3 + x$, $g(x) = x^2 - 1$
g) $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x^2 - 2$
h) $f(x) = -0{,}5x^3 + 3x$, $g(x) = x^2$

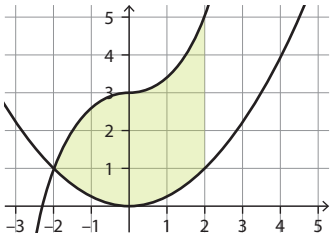
Aufgabe 6.23 (2iLJdm)

Bestimmen Sie jeweils das eingeschlossene Integral zwischen f und g zwischen den beiden Schnittpunkten.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2$, $g(x) = 0$
b) $f(x) = -x^4 + 5x^2$, $g(x) = x^2$
c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $g(x) = 1$
d) $f(x) = x^4 - 6x^2$, $g(x) = -2x^2$
e) $f(x) = -0{,}5x^4 + 4x^2$, $g(x) = 0{,}5x^2$
f) $f(x) = x^4 - 9x^2$, $g(x) = -x^2$
g) $f(x) = 2x^4 - 8x^2$, $g(x) = 0$
h) $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 1$, $g(x) = 1$

Aufgabe 6.24 (hvGGLQ)

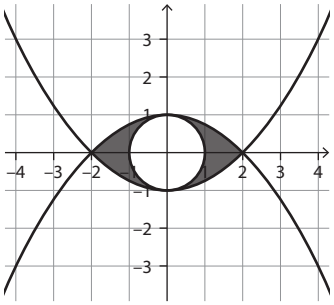
Die grüne Fläche wird durch die Funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 3$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2$ begrenzt. Als betrachteter Bereich gilt das Intervall von $x = -2$ (Schnittpunkt der Graphen) bis $x = 2$.



a) Zeigen Sie, dass die Graphen außerhalb dieses Intervalls keinen weiteren Schnittpunkt besitzen.
b) Bestimmen Sie anschließend den Flächeninhalt der von f und g im Intervall $[-2; 2]$ eingeschlossenen Fläche.

Aufgabe 6.25 (zzjKwF)

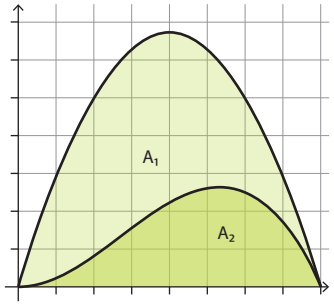
In einer Werbeagentur entsteht für ein neues Logo eine stilisierte Augenform. Die Kontur des Auges wird im Koordinatensystem durch zwei Parabeln beschrieben: eine bildet das obere Lid, die andere das untere Lid. Die dunkel markierte Fläche soll später geplottet und als Folie ausgeschnitten werden, um sie auf ein Fahrzeug zu kleben.



a) Ermitteln Sie zunächst die Funktionsgleichungen der beiden Parabeln.
b) Berechnen Sie anschließend den Flächeninhalt der dunkel markierten Augenfläche.
c) Bestimmen Sie schließlich, wie groß der prozentuale Anteil der Pupille an der gesamten Augenfläche ist.

Aufgabe 6.26 (5ydNGf)

Die Graphen der Funktionen $f(x) = -\frac{9}{8}x^2 + \frac{27}{4}x$ und $g(x) = -\frac{1}{8}x^2(x - 6)$ schließen zusammen mit der x-Achse zwei Teilflächen A_1 und A_2 ein.
Weisen Sie nach, dass die Flächeninhalte von A1 und A2 im Verhältnis 2 : 1 stehen.



Aufgabe 6.27 (vSPQ9N)

Beziehen Sie sich für die folgenden Aufgaben auf die Situationsbeschreibung.

a) Damit das Logo als geschlossene Fläche gedruckt werden kann, muss zuerst festgelegt werden, wo Ober- und Unterkante zusammenlaufen. Bestimmen Sie die Schnittstellen der beiden Funktionen und geben Sie das Intervall [a; b] zwischen ihnen an.

b) Für die Produktion ist entscheidend, wie viel Fläche tatsächlich eingefärbt werden muss (Materialverbrauch, Druckkosten). Berechnen Sie den Flächeninhalt der Logoform, also die Fläche zwischen f und g im Intervall [a; b].

c) Um das Druckbild in jeder Größe realistisch zu halten, soll das Logo an der dicksten Stelle nicht „zu wuchtig" wirken. Bestimmen Sie die maximale Profildicke $d(x) = f(x) - g(x)$ im Intervall [a; b] und geben Sie an, an welcher Stelle diese maximale Dicke auftritt.

Ⓚ **Aufgabe 6.28 (1nXH25)**



Ein E-Scooter-Sharing-Anbieter betreibt am Stadtrand eine kleine Ladehalle. Über einen Vormittag hinweg wird modellhaft beschrieben, wie viel elektrische Leistung in die Akkus hineinfließt und wie viel gleichzeitig für Betrieb und Nebenverbraucher (Lüftung, Steuerung, Beleuchtung) benötigt wird.

Für $0 \le t \le 12$ (t in Stunden seit 08:00 Uhr) gelten:

- Ladeleistung L(t) in kW: $L(t) = -0{,}1t^3 + 1{,}2t^2$
- Verbrauchsleistung V(t) in kW: $V(t) = 0{,}1t^2 + 1$

Im Zeitraum soll abgeschätzt werden, ob netto Energie in die Akkus wandert oder ob zeitweise mehr verbraucht als geladen wird.

a) Zu Beginn und gegen Ende des betrachteten Zeitraums wirkt die Ladeleistung im Modell deutlich kleiner als in der Mitte. Prüfen Sie durch Funktionswerte an geeigneten Stellen, ob das im Modell plausibel ist, und deuten Sie die Aussage im Kontext.

b) Es ist wichtig zu wissen, wann die Ladehalle netto "im Plus" ist. Untersuchen Sie dafür, in welchen Zeitabschnitten L(t) größer bzw. kleiner als V(t) ist.

c) Bestimmen Sie die netto geladene Energie zwischen 08:00 Uhr und 20:00 Uhr in kWh. (Im Modell entspricht das der Fläche zwischen den Graphen von L(t) und V(t) im Intervall [0; 12], mit Vorzeichen.)

d) Für die Planung interessiert zusätzlich die "kritischste Phase": Zu welcher Zeit ist der Abstand zwischen Ladeleistung und Verbrauch besonders groß? Begründen Sie mithilfe einer geeigneten Rechnung und geben Sie zusätzlich an, wie groß dieser Abstand ist.

Ⓚ **Aufgabe 6.29 (xvW8Qi)**



An einem Küstenabschnitt wird untersucht, wie stark Sediment (Sand/Schlick) pro Stunde transportiert wird. Für eine Baustelle am Deich gilt: Ab einer Transportmenge von $S = 5$ (in willkürlichen Transporteinheiten pro Stunde) muss die Baustelle gesichert werden, weil die Strömung dann Material unterspülen kann.

Für $0 \le x \le 12$ (x in Stunden seit Messbeginn) beschreibt das Modell die momentane Transportmenge: $T(x) = -0{,}04x^3 + 0{,}6x^2 - 1{,}2x + 1$

Der Sicherheitswert wird als konstante Funktion $S(x) = 5$ dargestellt.

a) Überprüfen Sie im Modell, ob der Transport zu Beginn eher unterhalb oder oberhalb des Sicherheitswertes liegt, und beschreiben Sie kurz, wie sich das im Verlauf verändert.

b) Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die Transportmenge genau dem Sicherheitswert entspricht. (Diese Zeitpunkte begrenzen die kritischen Phasen.)

c) Ermitteln Sie, wie viel "kritische Transportmenge" insgesamt anfällt, also die aufsummierte Menge oberhalb des Sicherheitswertes. (Im Modell ist das die Fläche zwischen T(x) und S(x) in den Zeitabschnitten, in denen $T(x) \ge S(x)$ gilt.)

d) Ein Sicherungsteam kann maximal 6 "Flächeneinheiten" an kritischer Transportmenge abarbeiten. Begründen Sie mit Ihrem Ergebnis aus c), ob das im Modell ausreicht, oder ob zusätzliche Sicherung nötig wäre.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



6.4 INTEGRAL VS. FLÄCHE

Situationsbeschreibung – Rodung des Regenwaldes
Um Nutella herzustellen, wird unter anderem Palmöl verwendet – und Palmöl bedeutet weltweit enorme Flächenkonkurrenz. In den Hauptanbaugebieten in Südostasien werden dafür immer wieder Wälder in Plantagen umgewandelt. Das hat Folgen für Klima und Artenvielfalt, weil nicht nur Waldfläche verloren geht, sondern auch große Mengen CO_2 freigesetzt werden und Lebensräume zerschnitten werden. Zur Einordnung: Für Indonesien wurde für den Zeitraum 1995–2015 modellbasiert geschätzt, dass neue großflächige Ölpalmenplantagen im Mittel rund 117.000 ha Wald pro Jahr verdrängten (zusätzlich zur allgemeinen Plantagen-Ausweitung). Das entspricht ungefähr dem 1,3-fachen der Fläche Berlins oder rund 164.000 Fußballfeldern.

Der brasilianische Landwirt Aurelio Andrade pachtet ein Gebiet im Amazonasbecken, das von einem Flussarm des Amazonas begrenzt wird. Auch wenn Ölpalmenplantagen dort nicht die typische Landnutzung sind, zeigt das Beispiel, wie wirtschaftliche Anreize dazu führen können, dass selbst ökologisch sensible Flächen unter Nutzungsdruck geraten. Für die folgende Rechnung wird daher ein stark vereinfachtes Modell betrachtet, das nur die geometrische Größe der betroffenen Fläche in den Blick nimmt.

Der Verlauf dieses Amazonas-Flussabschnitts wird im Modell durch den Funktionsgraphen $a(x) = 0{,}5x^3 - 3x$ beschrieben. Als Grundstücksgrenze wird die x-Achse verwendet. Das gepachtete Grundstück ist somit genau der Bereich, der zwischen dem Graphen von a(x) und der x-Achse eingeschlossen wird. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 km.

Orientierte vs. geometrische Fläche (MfZCLh) ⓘ
Bei den letzten Aufgaben wurde bereits deutlich, dass bei Integralen auch negative Werte entstehen können. In der Realität kann eine Fläche natürlich nicht "negativ" sein – mathematisch ist dieses Vorzeichen aber sinnvoll, weil es festhält, ob ein Graph oberhalb oder unterhalb der x-Achse verläuft. Liegt der Graph oberhalb der x-Achse, wird der Beitrag positiv gezählt; liegt er darunter, wird er negativ gezählt.

Daraus ergibt sich eine wichtige Unterscheidung zwischen Integral und Fläche:

- Wird vom Integral gesprochen, ist die **orientierte** Fläche gemeint. Dabei dürfen Werte negativ sein, und Teilbereiche oberhalb und unterhalb der x-Achse werden mit Vorzeichen verrechnet.
- Wird dagegen von der Fläche (im **geometrischen** Sinn) gesprochen, sind nur positive Flächeninhalte gemeint. Dann zählen alle Teilflächen als Betrag, unabhängig davon, ob der Graph oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. Das kann dazu führen, dass ein Bereich in mehrere Teilintervalle zerlegt werden muss, damit die einzelnen Flächenstücke getrennt bestimmt und anschließend addiert werden können.

Ⓑ **Beispiel**

Bei Flächenberechnungen mit Integralen ist ein wichtiger Punkt zu beachten:
Ein Integral liefert nicht automatisch den "normalen", also geometrischen Flächeninhalt. Stattdessen rechnet das Integral mit Vorzeichen:

- Liegt der Graph oberhalb der x-Achse, zählt der Flächeninhalt positiv.
- Liegt der Graph unterhalb der x-Achse, zählt der Flächeninhalt negativ.

Das ist in vielen Anwendungen sinnvoll, weil damit Zunahmen und Abnahmen gegeneinander aufgerechnet werden können (z. B. Zu- und Abflüsse, Gewinne und Verluste). Das Integral beschreibt dann also eine Bilanz: Positive Beiträge erhöhen den Gesamtwert, negative Beiträge verringern ihn. Gerade bei zeitabhängigen Prozessen kann so direkt erkannt werden, ob "unter dem Strich" ein Plus oder ein Minus entsteht.

Soll jedoch die tatsächlich eingeschlossene Fläche bestimmt werden, darf es keine negativen Anteile geben – dann müssen Teilflächen so berücksichtigt werden, dass am Ende ein positiver Flächeninhalt entsteht. Mathematisch bedeutet das: Es wird nicht die Vorzeichenbilanz gesucht, sondern die Summe der Flächenbeträge. Häufig führt das dazu, dass ein Intervall an den Nullstellen der Funktion in Teilintervalle zerlegt werden muss.

Damit dieser Unterschied besonders deutlich wird, eignet sich eine punktsymmetrische Funktion dritten Grades: Bei ihr "spiegeln" sich die Flächen links und rechts der y-Achse häufig so, dass sie sich als Integralwert gegenseitig aufheben. Dann kann trotz "Integralwert 0" dennoch eine deutlich sichtbare, eingeschlossene Fläche vorhanden sein.
Gegeben sei die punktsymmetrische Funktion $f(x) = -x^3 + 4x$.

Nullstellen und betrachteter Bereich

Um den Bereich zu finden, in dem eine Fläche eingeschlossen wird, werden die Schnittpunkte mit der x-Achse benötigt:

$f(x) = 0$
$0 = -x^3 + 4x = x(-x^2 + 4)$
$\mathbf{x_1 = 0} \quad \vee \quad 0 = -x^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x_2 = 2} \quad \vee \quad \mathbf{x_3 = -2}$

Zwischen diesen drei Nullstellen entstehen zwei Teilbereiche:

- von –2 bis 0 liegt der Graph oberhalb der x-Achse,
- von 0 bis 2 liegt der Graph unterhalb der x-Achse.

Orientierte Fläche

Sei zunächst die orientierte Fläche (Integralwert) über die komplette Breite berechnet, um zu zeigen, dass sich die Flächen gegenseitig aufheben:

$$A = \int_{-2}^{2} (-x^3 + 4x)\,dx$$

$$= \left[-0{,}25x^4 + 2x^2\right]_{-2}^{2}$$

$$= -0{,}25 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 - \left(-0{,}25 \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2\right)$$

$$= 4 - 4 = 0$$

Das bedeutet nicht, dass "keine Fläche vorhanden" ist. Es bedeutet nur: Die positive Fläche links (oberhalb der x-Achse) und die negative Fläche rechts (unterhalb der x-Achse) sind gleich groß und heben sich als Integralwert gegenseitig auf.

Das Integral liefert hier also eine Bilanz: "Plus" und "Minus" ergeben zusammen Null.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Geometrische Fläche

Soll nun die tatsächlich eingeschlossene geometrische Fläche berechnet werden, dürfen negative Anteile nicht vorkommen. Daher wird der Betrag berücksichtigt, z. B. so:

Mehr als zwei Nullstellen
Sofern mehr als zwei Nullstellen gegeben sind, rechnet man alle Teilflächen von Nullstelle zu Nullstelle

$$A_{geo} = \int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx = \left|\int_{-2}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{-2} f(x)\,dx\right|$$

Seien die zwei Teilintegrale hier der Übersichtlichkeit halber getrennt berechnet:

$$A_1 = \int_{-2}^{0} (-x^3 + 4x)\,dx$$

$$= \left[-0{,}25x^4 + 2x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$= 0 - (-0{,}25 \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2)$$

$$= 0 - 4 = -4$$

$$A_2 = \int_{0}^{-2} (-x^3 + 4x)\,dx$$

$$= \left[-0{,}25x^4 + 2x^2\right]_{0}^{-2}$$

$$= -0{,}25 \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^2 - 0$$

$$= 4$$

Damit ergibt sich für die geometrische Fläche

$$A_{geo} = |A_1| + |A_2| = 4 + 4 = 8$$

Aufgabe 6.30 (v6fVfT)

Bestimmen Sie jeweils den geometrischen Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall von der kleinsten bis zur größten Nullstelle.

a) $f(x) = 0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 - 3x$ mit den Nullstellen: –2, 0, 3
b) $f(x) = -x^3 + 7x - 6$ mit den Nullstellen: –3, 1, 2
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ mit den Nullstellen: –1, 1, 3
d) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ mit den Nullstellen: –2, 1, 2
e) $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 6$ mit den Nullstellen: –2, 2, 3
f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ mit den Nullstellen: –3, –1, 2
g) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$ mit den Nullstellen: –3, 0, 2

Aufgabe 6.31 (8PKPh6)

Bestimmen Sie zuerst die drei Nullstellen und anschließend den geometrischen Flächeninhalt im Intervall zwischen der kleinsten und der größten Nullstelle.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
b) $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 2{,}5x + 3$
c) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$
d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
e) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$
f) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$
g) $f(x) = 2x^3 - 18x$
h) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 24x$
i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x$

Aufgabe 6.32 (vVpuuY)

Für jede Funktion ist der geometrische Flächeninhalt im Intervall zwischen der kleinsten und größten Nullstelle zu bestimmen. Zusätzlich berechnen Sie über dasselbe Intervall auch die orientierte Fläche, um beide Ergebnisse miteinander zu vergleichen.
Tipp: Bei manchen Funktionen hilft Symmetrie für eine einfachere Berechnung.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$
b) $f(x) = -2x^3 - 2x^2 + 4x$
c) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
d) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 24$
e) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x - 10$
f) $f(x) = x^4 - 4{,}25x^2 + 1$
g) $f(x) = 0{,}5x^5 - 2{,}5x^3 + 2x$
h) $f(x) = 0{,}5x^4 - 5x^2 + 4{,}5$
i) $f(x) = x^3 - 9x$

Aufgabe 6.33 (Cxg6Xq)

Bestimmen Sie die geometrische Fläche, die zwischen den beiden Funktionsgraph f(x) und g(x) eingeschlossen wird.

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$
$g(x) = x^3 + 2x^2 - 8x - 1$

b) $f(x) = x^3 - 7x - 6$
$g(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 6$

c) $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 4x + 2$
$g(x) = x^4 - 6{,}5x^2 - 4x + 2$

Aufgabe 6.34 (JQCS7Y)

Bestimmen Sie für jedes Funktionenpaar die Schnittpunkte der beiden Graphen und berechnen Sie anschließend den geometrischen Flächeninhalt, der zwischen den Graphen im Bereich vom linken bis zum rechten Schnittpunkt eingeschlossen wird. (Bei drei Schnittpunkten entstehen in der Regel zwei Teilflächen.)

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 1$
$g(x) = x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 12$
$g(x) = -2x + 4$

c) $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 - 5x + 4$
$g(x) = 0{,}5x^2 - 2$

d) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
$g(x) = -x^2 + 3x + 1$

e) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 13$
$g(x) = x^2 - 4x + 2$

f) $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 7x + 8$
$g(x) = -0{,}5x^2 + 2$

Ⓚ **Aufgabe 6.35 (r7epWW)**



Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung zu Aurelio Andrade.

a) Ermitteln Sie die Größe der Fläche, die gerodet werden müsste (in km^2).
Begründen Sie dabei kurz, warum hier der geometrische Flächeninhalt betrachtet werden muss (und nicht nur der Integralwert mit Vorzeichen).

b) Die Pacht beträgt rund 450 Brasilianische Real pro km^2 und Monat. Bestimmen Sie, welche Kosten pro Jahr für die Fläche von Herrn Andrade entstehen (in Real/Jahr).

c) Recherchieren Sie einen aktuellen Wechselkurs BRL => EUR und rechnen Sie die jährlichen Pachtkosten aus Teilaufgabe b) in Euro um. Notieren Sie Quelle und Datum des Wechselkurses.

d) Um die gerodete Fläche besser einordnen zu können, soll sie in "Fußballfeldern" angegeben werden. Recherchieren Sie dafür die Standardmaße eines Fußballfelds (z. B. Bundesliga/DFB-Norm), berechnen Sie daraus die Fläche eines Spielfelds und bestimmen Sie anschließend, wie vielen Fußballfeldern die gerodete Fläche von Herrn Andrade entspricht. Notieren Sie Quelle und Datum Ihrer Recherche.

Ⓚ **Aufgabe 6.36 (f9FbSA)**



Eine Werkstatt bedruckt T-Shirts im Siebdruck. Für einen Auftrag soll ein sehr simples Motiv gedruckt werden, dessen Form zur Kalkulation vereinfacht modelliert wird. Die bedruckte Motivfläche wird als Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = -\frac{1}{50}x^3 + \frac{9}{50}x^2 + \frac{8}{25}x - \frac{72}{25}$ und der x-Achse beschrieben. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1 cm; x gibt die Breite in cm an und f(x) die Höhe des Motivrandes in cm.

a) Damit das Motiv vollständig gedruckt wird, muss der Druckbereich in x-Richtung festgelegt werden. Bestimmen Sie die beiden Randpunkte des Motivs als kleinste und größte Stelle, an der f(x) = 0 gilt, und geben Sie daraus die Motivbreite an.

b) Die benötigte Farbmenge hängt direkt von der bedruckten Fläche ab. Bestimmen Sie den geometrischen Flächeninhalt der bedruckten Motivfläche in cm^2.

c) Beim Siebdruck werden im Mittel 0,012g Farbe pro cm^2 aufgetragen. Die Farbe kostet 24 Euro pro kg. Berechnen Sie die Farbmasse und die Farbkosten pro T-Shirt (in Cent).

d) Für einen Auftrag sollen 2000 T-Shirts bedruckt werden. Bestimmen Sie die insgesamt benötigte Farbmasse und die Gesamtkosten. Beurteilen Sie, ob eine vorhandene Farbdose mit 0,5 kg ausreicht oder ob nachbestellt werden muss.

e) Begründen Sie kurz, warum hier nicht einfach das Integral über das gesamte Intervall als Ergebnis ausreicht, sondern der geometrische Flächeninhalt benötigt wird.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



6.5 MITTELWERT EINER FUNKTION

Situationsbeschreibung – Autolackiererei
In einer Lackierstraße für Karosserieteile wird die Schichtdicke einer Klarlackschicht während eines Sprühdurchgangs überwacht. Obwohl die Anlage mit festen Einstellungen arbeitet, ist die Schichtdicke nicht zu jedem Zeitpunkt gleich: Zu Beginn des Sprühvorgangs baut sich der Lacknebel erst auf, in der Mitte wird am gleichmäßigsten beschichtet, und gegen Ende nimmt die aufgetragene Menge wieder ab (z. B. durch veränderte Strömung und Auslauf des Sprühbilds).
Ein Sensor misst deshalb während eines einzelnen Durchgangs die momentane Schichtdicke. Der zeitliche Verlauf wird modellhaft durch eine Funktion beschrieben:

$$d(t) = \frac{1}{1500}t^3 - \frac{59}{1000}t^2 + \frac{33}{25}t + 90$$

Dabei ist t ist die Zeit seit Beginn des Sprühdurchgangs in Sekunden ($0 \le t \le 40$) und d(t) ist die Schichtdicke in µm (Mikrometer).

Für die Qualitätskontrolle ist nicht nur interessant, wie dick die Schicht zu einzelnen Zeitpunkten ist, sondern vor allem, wie "dick im Durchschnitt" über den gesamten Durchgang beschichtet wurde – also die mittlere Schichtdicke über das Intervall [0; 40].

Mittelwert mit Hilfe eines Integrals bestimmen (kJpZ4F)
Der Mittelwert einer Funktion beschreibt den durchschnittlichen Funktionswert auf einem bestimmten Intervall. Er ist das genaue Gegenstück zum "Durchschnitt" aus einer Wertetabelle – nur eben für einen stetigen Verlauf, bei dem unendlich viele Werte zwischen den Intervallgrenzen liegen.

Wie ein Mittelwert aus einer Tabelle bestimmt wird, ist aus Kapitel 2.3 "Arithmetisches Mittel, Modalwert und Median" bereits bekannt. Bei einer Funktion f(x) gibt es im Intervall [a; b] jedoch nicht nur einzelne Messwerte, sondern unendlich viele Zwischenwerte. Deshalb wird statt einer Summe die Fläche unter dem Graphen genutzt – also ein Integral.

Der Funktionsmittelwert von f im Intervall [a; b] ist $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Dabei gilt:

- $\int_a^b f(x)\,dx$ liefert die orientierte Fläche (also mit Vorzeichen) zwischen Graph und x-Achse.
- b – a ist die Länge des Intervalls.
- Der Bruch "Fläche geteilt durch Breite" ergibt eine mittlere Höhe.

Anschaulich ist der Mittelwert genau die Höhe einer waagerechten Linie, die über dem Intervall [a; b] ein Rechteck mit gleichem Flächeninhalt wie die Fläche unter dem Graphen erzeugt.

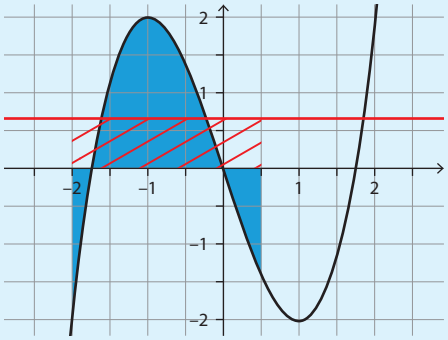
Im Sachkontext ist der Mittelwert besonders sinnvoll, wenn eine Größe über eine Strecke oder Zeit schwankt, aber am Ende ein "typischer" Wert gebraucht wird, z. B.:

- mittlere Leistung einer Anlage über mehrere Stunden
- mittlere Geschwindigkeit über einen Streckenabschnitt
- mittlere Schichtdicke über eine Bauteillänge
- mittlere Durchflussrate eines Kanals über eine Zeitspanne

Wenn f(x) auch unterhalb der x-Achse liegt, kann das Integral teilweise negativ sein. Dann beschreibt der Mittelwert eine Bilanz (z. B. Zu- und Abfluss zusammen).
Geht es dagegen um einen "Durchschnittsbetrag" ohne Vorzeichen, muss je nach Kontext mit $|f(x)|$ bzw. Teilintervallen gearbeitet werden.

Ⓑ **Beispiel**

Um den Mittelwert einer Funktion zu bestimmen, wird die orientierte Fläche (Integral) und das entsprechende Intervall benötigt.
Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x$ im Intervall $[-2; 0{,}5]$.



Der Mittelwert der Funktion im obigen Intervall ist damit

$$m = \frac{1}{0{,}5-(-2)} \int_{-2}^{0{,}5} (x^3 - 3x)\,dx$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \left[0{,}25x^4 - 1{,}5x^2\right]_{-2}^{0{,}5}$$

$$= 0{,}4 \cdot \left((0{,}25 \cdot 0{,}5^4 - 1{,}5 \cdot 0{,}5^2) - (0{,}25 \cdot (-2)^4 - 1{,}5 \cdot (-2)^2)\right)$$

$$= 0{,}4 \cdot ((-0{,}359) - (-2))$$

$$= 0{,}4 \cdot 1{,}641 = 0{,}656$$

Der Mittelwert liegt bei 0,656 (rote Linie). Somit hat das Rechteck (rot schraffiert) mit einer Breite von 2,5 LE (von −2 bis 0,5) und einer Höhe von 0,656 LE den selben Flächeninhalt wie die blau hinterlegte orientierte Fläche (das Integral der Funktion).

Aufgabe 6.37 (emgL7e)

Bestimmen Sie jeweils den Funktionsmittelwert m von f im angegebenen Intervall [a; b].

a) $f(x) = 2x + 3$, Intervall $[-1; 4]$

b) $f(x) = -x^2 + 4x$, Intervall $[0; 6]$

c) $f(x) = x^3 - 2x$, Intervall $[-1; 2]$

d) $f(x) = 0{,}5x^2 - x + 1$, Intervall $[-2; 2]$

e) $f(x) = -0{,}2x^3 + x^2 + 2$, Intervall $[0; 5]$

f) $f(x) = 3 - x^4$, Intervall $[-1; 1]$

Aufgabe 6.38 (82q1TW)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen den Mittelwert im angegebenen Intervall.

a) $f(x) = -0{,}5x^3 + 2x^2 - x + 1$, Intervall: $[-2; 1]$

b) $f(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 3$, Intervall: $[0; 2]$

c) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$, Intervall: $[-1; 1]$

d) $f(x) = 2x^3 - 9x + 6$, Intervall: $[1; 4]$

e) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - x^2$, Intervall: $[0; 3]$

f) $f(x) = 1{,}2x^2 - 3{,}6x + 2{,}4$, Intervall: $[-1; 2]$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.39 (1ggVPW)
Bestimmen Sie den Funktionsmittelwert und begründen Sie kurz, ob Symmetrie den Rechenweg vereinfacht.

a) $f(x) = x^3 - 4x$, Intervall $[-2; 2]$

b) $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$, Intervall $[-1; 1]$

c) $f(x) = x^2 + 3$, Intervall $[-3; 3]$

d) $f(x) = -x^4 + 4x^2$, Intervall $[-2; 2]$

e) $f(x) = 0{,}25x^3 + x$, Intervall $[-4; 4]$

f) $f(x) = -2x^5 + x^3$, Intervall $[-1; 1]$

Aufgabe 6.40 (vmQP5s)
Bestimmen Sie den Parameter so, dass der Funktionsmittelwert im Intervall den angegebenen Wert hat.

a) $f(x) = a \cdot x + 2$, Intervall $[0; 4]$, Mittelwert $m = 5$

b) $f(x) = x^2 + a$, Intervall $[-2; 2]$, Mittelwert $m = 3$

c) $f(x) = a \cdot x^2 - x$, Intervall $[0; 2]$, Mittelwert $m = 1$

Aufgabe 6.41 (BAWyE7)
Bestimmen Sie den Parameter so, dass der Funktionsmittelwert im Intervall den angegebenen Wert hat.

a) $f(x) = x^3 + a \cdot x$, Intervall $[-1; 1]$, Mittelwert $m = 0$

b) $f(x) = -0{,}5x^2 + a$, Intervall $[-2; 2]$, Mittelwert $m = 1$

c) $f(x) = a \cdot x^3 + 2$, Intervall $[0; 3]$, Mittelwert $m = 8$

Aufgabe 6.42 (H7EYKU)
In jeder Zeile ist ein typischer Fehler beim Mittelwert enthalten. Korrigieren Sie den Ansatz.

a) $m = \frac{1}{b+a}\int_a^b f(x)\,dx$

b) $m = \int_a^b f(x)\,dx$

c) $m = \frac{1}{b-a}\left[f(x)\right]_a^b$

d) $m = \frac{1}{b-a}\int_b^a f(x)\,dx$

Aufgabe 6.43 (1WBk5e) Ⓚ
In einer automatisierten Fertigungslinie wird ein Bauteil entlang einer Messstrecke kontinuierlich erfasst. Ein Referenzmodell gibt vor, welcher Messwert an jeder Position idealerweise erreicht werden soll (Sollwert). Gleichzeitig liefert ein Sensor die tatsächlich gemessenen Werte (Istwert). Damit die Anlage beurteilen kann, wird der mittlere Fehler über die gesamte Messstrecke. Dazu wird die Fehlerfunktion als Differenz aus Ist- und Sollwert definiert: $e(x) = i(x) - s(x)$. Entscheiden Sie mathematisch begründet, ob der mittlere Fehler den Wert von 1 überschreitet, denn dann müsste die Anlage nachjustiert werden.



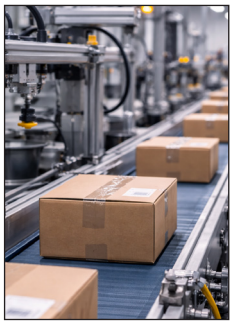
$s(x) = 2x + 1$ $\quad i(x) = -0{,}5x^2 + 4x + 1$ $\quad$ Intervall $[0; 4]$

Aufgabe 6.44 (4pUYcv) Ⓚ
Beziehen Sie sich auf die Situationsbeschreibung zur Klarlackschichtdicke d(t).



a) Für die Qualitätskontrolle wird eine einzige Kennzahl benötigt, die die Beschichtung über den gesamten Sprühdurchgang "zusammenfasst". Bestimmen Sie diese mittlere Schichtdicke und geben Sie sie in µm an.
b) Das Qualitätsfenster lautet: "im Mittel 95 µm ± 1 µm". Ordnen Sie Ihren Wert aus a) ein und treffen Sie eine begründete Aussage, ob der Durchgang im Modell als "in Ordnung" gelten kann.
c) Die Schichtdicken dürfen nicht kleiner als 80 µm , aber auch nicht größer als 160 µm sein. Prüfen Sie rechnerisch, ob die vorgegebenen Minimal- und Maximalwerte eingehalten werden.
d) Begründen Sie kurz, warum in dieser Situation eine Betrachtung "über den gesamten Zeitraum" sinnvoller ist als die Beurteilung anhand eines einzelnen Messwerts (z. B. nur am Anfang oder nur am Ende des Sprühvorgangs). Gibt es eine Alternative?

Ⓚ



Aufgabe 6.45 (7s3e34)

In einer Verpackungslinie wird der Durchsatz r(t) (Pakete pro Minute) während einer 12-minütigen Einlaufphase modelliert durch $r(t) = -0{,}05t^3 + 0{,}6t^2 + 1{,}2t$ für $0 \le t \le 12$.

a) Die Schichtleitung möchte wissen, wie viele Pakete in der Einlaufphase tatsächlich durchgelaufen sind. Ermitteln Sie diese Gesamtzahl und erläutern Sie kurz, wie sie im Modell mit r(t) zusammenhängt.

b) Um die Einlaufphase mit anderen Tagen zu vergleichen, soll die schwankende Kurve durch eine durchschnittliche "Ersatzrate" beschrieben werden. Bestimmen Sie diese.

c) In der Einsatzplanung wurde fälschlich mit einer konstanten Rate von 25 Paketen/Minute kalkuliert. Entscheiden Sie anhand Ihrer Ergebnisse, ob dadurch Personal eher über- oder unterplant wurde, und begründen Sie kurz.

Ⓚ



Aufgabe 6.46 (jQ6BVP)

Ein Abkühlungsofen fährt in einer 30-minütigen Aufheizphase das Temperaturprofil $T(t) = 0{,}004t^3 - 0{,}18t^2 + 4t + 20$ $(0 \le t \le 30)$, T in °C.

a) Für ein empfindliches Bauteil ist nicht zwingend der Spitzenwert dieses Abkühlungsvorgangs relevant, sondern eher die "mittlere thermische Belastung" über die gesamte Aufheizphase. Bestimmen Sie die Temperatur, die diese Belastung im Mittel beschreibt.

b) Der Prozess gilt als zulässig, wenn die mittlere Temperatur höchstens 85 °C beträgt. Bewerten Sie die Einstellung anhand Ihres Ergebnisses.

c) Formulieren Sie in einem Satz, wie der ermittelte Mittelwert berechnet wird (als verständliche Aussage für jemanden ohne Kenntnisse über Integralrechnung).

Ⓚ



Aufgabe 6.47 (uEXw2S)

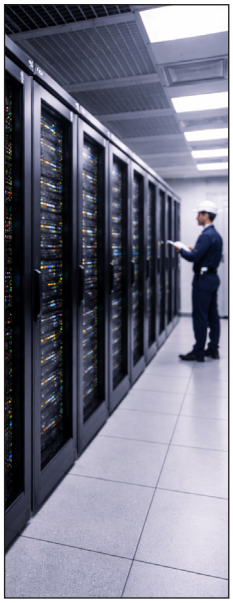
Die elektrische Leistung eines Geräts schwankt über 10 Minuten:
$P(t) = -0{,}02t^3 + 0{,}3t^2 + 1{,}5t + 20$ $(0 \le t \le 20)$, P in kW.

a) Für eine vereinfachte Dokumentation soll das wechselnde Leistungsprofil durch eine konstante Leistung ersetzt werden, die im Zeitraum denselben "Gesamteffekt" hat.

b) Vergleichen Sie die Ersatzleistung mit den Werten P(0) und P(20) sowie mit dem maximalen Wert von P(t). Begründen Sie kurz, warum die Ersatzleistung zwischen diesen Werten liegt.

c) Für die Abrechnung zählt die insgesamt verbrauchte Energie. Ermitteln Sie den Energieverbrauch im Zeitraum (in kWh) und erklären Sie kurz, warum dabei "Leistung über Zeit aufsummiert" wird.

Ⓚ



Aufgabe 6.48 (1NwhX4)

In einem klimatisierten Serverraum wird die Temperatur an einem zentralen Messpunkt während eines Nachmittags überwacht. Trotz gleichbleibender Klimaanlagen-Einstellung schwankt die Temperatur, weil zeitweise mehr Rechenleistung abgerufen wird (z. B. Updates/Backups) und Türen kurz geöffnet werden.
Der Verlauf wird im Modell durch die Funktion $T(t) = 0{,}02t^3 - 0{,}45t^2 + 3t + 18$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit 12:00 Uhr (also $0 \le t \le 10$) und T(t) die Temperatur in °C.

a) Bestimmen Sie die Temperatur um 13:00 Uhr, 15:00 Uhr und 17:30 Uhr.

b) Für die Auswertung ist die mittlere Temperatur im Zeitraum von 12:00 Uhr bis 22:00 Uhr entscheidend.

c) Die Technikleitung möchte wissen, wann die Temperatur ihren höchsten und ihren niedrigsten Wert im betrachteten Zeitraum erreicht. Tipp: Betrachten Sie nicht nur die Extremwerte, sondern auch Werte an den Intervallrändern.

d) Wie stark weicht der Maximalwert prozentual vom Mittelwert aus b) ab? Wie stark weicht der Minimalwert prozentual vom Mittelwert ab?

e) Ein Alarm soll ausgelöst werden, wenn die Temperatur den Mittelwert aus b) um mehr als 8 % überschreitet. Prüfen Sie, ob (und wann) das im Modell innerhalb des Zeitraums vorkommt.

f) Begründen Sie, warum die Berechnung von $\int_0^{10} T(t)\,dt$ im Sachkontext nicht sinnvoll ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



6.6 ROTATIONSKÖRPER

Situationsbeschreibung – Thermobecher
Für einen neuen Thermobecher soll die Innenform so geplant werden, dass er gut in der Hand liegt, stabil steht und gleichzeitig ausreichend Volumen bietet. In der Konstruktion wird der Querschnitt des Bechers in einem Koordinatensystem betrachtet: Die x-Achse beschreibt die Höhe im Becher (in cm) vom Boden nach oben, und f(x) gibt den Innenradius (ebenfalls in cm) an.

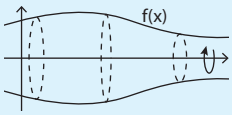
Damit lässt sich der Innenraum des Bechers als Rotationskörper modellieren: Dreht man den Graphen von f(x) um die x-Achse, entsteht die räumliche Form des Becherinneren. So kann später rechnerisch überprüft werden, wie groß das Fassungsvermögen ist und wie sich die Form über die Höhe verändert.

Der Radius des Becherinneren wird in diesem Modell beschrieben durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{300}x^3 - \frac{7}{80}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{7}{2}$$

Der betrachtete Bereich reicht dabei vom Becherboden bis zur vorgesehenen Füllhöhe, also für $0 \le x \le 12$.

Rotationsvolumen – Vollkörper (2F6dSS)
Ein Rotationskörper entsteht, wenn eine Fläche um eine Achse "herumgedreht" wird. Aus einer zweidimensionalen Form wird dadurch ein dreidimensionaler Körper – ähnlich wie bei einer Drehbank: Ein Profil wird vorgegeben, und durch die Drehung entsteht die räumliche Form.



In der Integralrechnung geht es dabei meistens um Volumina. Typisch ist folgende Situation: Eine Funktion beschreibt einen Radius (also den Abstand zur Drehachse). Dreht sich der Graph bzw. die Fläche unter dem Graphen um die x-Achse, entsteht ein Körper, dessen Querschnitte senkrecht zur x-Achse Kreise sind. Jeder dieser Querschnitte hat die Fläche $A(x) = \pi \cdot (f(x))^2$.

Das Volumen kann man sich als Summe vieler sehr dünner Scheiben vorstellen. So, wie man sich die Fläche unter einem Graphen als Summe vieler sehr dünner Streifen vorstellen kann. Addiert man alle diese Scheiben von $x = a$ bis $x = b$, erhält man das Gesamtvolumen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Dabei gilt: f(x) beschreibt den Radius in Längeneinheiten (z. B. cm), und das Ergebnis V hat dann die Einheit "Kubik" (z. B. cm^3).

Ⓑ **Beispiel**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{10}x + 1$ im Intervall [0; 10].

Der Graph von f(x) beschreibt den Radius eines Körpers. Wird die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [0; 10] um die x-Achse rotiert, entsteht ein Rotationskörper. Mit der Gleichung für das Rotationsvolumen ergibt dies (analog zur regulären Integralrechnung):

$$V = \pi \cdot \int_0^{10} \left(\frac{1}{10}x + 1\right)^2 dx \qquad \text{| Klammer auflösen (hier binomische Formel)}$$

$$= \pi \cdot \int_0^{10} \left(\frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{5}x + 1\right) dx \qquad \text{| Stammfunktion bilden}$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{300}x^3 + \frac{1}{10}x^2 + x\right]_0^{10} \qquad \text{| Integralgrenzen einsetzen}$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{100} \cdot 10^3 + \frac{1}{10} \cdot 10^2 + 10 - 0\right) \qquad \text{| zusammenfassen}$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{10}{3} + 10 + 10\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{70}{3} = 73{,}304 \text{ VE}$$

Somit hat der Rotationskörper mit f(x) als "Außenhülle" ein Volumen von rund 73,3 VE.

ⓘ **Rotationsvolumen mit "Loch" – Hohlkörper (i9rXbb)**

Manchmal entsteht kein "voller" Körper, sondern ein Hohlkörper, z. B. wenn zwischen zwei Graphen rotiert wird (Außenradius R(x), Innenradius r(x)). Dann besteht jeder Querschnitt aus einer Kreisfläche minus einer kleineren Kreisfläche (wie eine Unterlegscheibe):

$$V = \pi \cdot \int_a^b (R(x)^2 - r(x)^2)\, dx$$

Diese Form ist besonders praktisch, wenn ein Innenprofil (z. B. Trinköffnung, Wandstärke, Bohrung) berücksichtigt werden soll.

Ⓑ **Beispiel**

Eine Fläche wird um die x-Achse gedreht. Dabei liegt außen der Graph von f(x) = x + 2 und innen (das "Loch") der Graph von g(x) = 1 im Intervall [0; 3].

In Bezug auf die Volumensgleichung ist hier f(x) = R(x) und g(x) = r(x). Damit ergibt sich:

$$V = \pi \cdot \int_0^3 ((x+2)^2 - 1^2)\, dx \qquad \text{| Klammer auflösen}$$

$$= \pi \cdot \int_0^3 (x^2 + 4x + 4 - 1)\, dx \qquad \text{| zusammenfassen}$$

$$= \pi \cdot \int_0^3 (x^2 + 4x + 3)\, dx \qquad \text{| Stammfunktion bilden}$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x\right]_0^3 \qquad \text{| Integralgrenzen einsetzen}$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2\ \ 3 \cdot 3\right) \qquad \text{| zusammenfassen}$$

$$= \pi \cdot (9 + 18 + 9)$$

$$= \pi \cdot 36 = 113{,}097 \text{ VE}$$

Somit hat die "Außenhülle" des Rotationskörpers, die von R(x) und r(x) begrenzt wird ein Volumen von rund 113,1 VE.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.49 (369FGn)

Bestimmen Sie jeweils das Rotationsvolumen V des Körpers, der entsteht, wenn der Graph von f(x) im angegebenen Intervall um die x-Achse rotiert.

a) $f(x) = 0{,}5x + 1$
Intervall [0; 4]

b) $f(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 1$
Intervall [0; 6]

c) $f(x) = x^2 + 1$
Intervall [0; 2]

d) $f(x) = -x^2 + 4$
Intervall [–2; 2]

e) $f(x) = 2 - 0{,}5x$
Intervall [0; 4]

f) $f(x) = 0{,}2x^3 - x + 3$
Intervall [0; 2]

Aufgabe 6.50 (MqVJqV)

Bestimmen Sie jeweils das Rotationsvolumen V des "Hohlkörpers", der entsteht, wenn die Fläche zwischen f(x) (Außenradius) und g(x) (Innenradius) im Intervall um die x-Achse rotiert. Im Intervall gilt jeweils $f(x) > g(x)$.

a) $f(x) = -0{,}25x^2 + x + 4$
$g(x) = 0{,}5x + 1$
Intervall [0; 4]

b) $f(x) = x + 3$
$g(x) = 1$
Intervall [0; 5]

c) $f(x) = -0{,}5x^2 + 4$
$g(x) = 1$
Intervall [–2; 2]

d) $f(x) = 2x + 5$
$g(x) = x + 1$
Intervall [0; 3]

e) $f(x) = 6 - x$
$g(x) = 2$
Intervall [0; 4]

f) $f(x) = x^2 + 4$
$g(x) = x + 1$
Intervall [0; 2]

Aufgabe 6.51 (QxtjJJ)

Bestimmen Sie jeweils das Rotationsvolumen V. Entscheiden Sie dabei sinnvoll, ob ggf. Symmetrie (z. B. Intervall [–a; a]) Rechenwege verkürzt.

a) $f(x) = 3 - x^2$
Intervall [–1; 1]

b) $f(x) = 1{,}5x + 2$
Intervall [–2; 2]

c) $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 3$
Intervall [0; 4]

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
Intervall [0; 3]

e) $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$
Intervall [-4; 4]

f) $f(x) = 0{,}1x^3 + 1$
Intervall [0; 3]

g) $f(x) = 2{,}5 - 0{,}5x^2$
Intervall [–2; 2]

h) $f(x) = 0{,}8x + 1{,}6$
Intervall [–3; 3]

i) $f(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}4x + 2{,}2$
Intervall [0; 5]

Aufgabe 6.52 (QiuSkQ)

Ⓚ



Ein Start-up entwickelt eine neue Stumpenkerze. Die Kerze soll eine besondere, leicht taillierte Form haben und wird später aus einer Silikonform gegossen. In einem Querschnitt wird die Außenkontur (Radius) durch eine Funktion modelliert. Dreht sich dieser Querschnitt um die x-Achse, entsteht der dreidimensionale Kerzenkörper.

Gegeben ist der Radius in cm durch
$f(x) = -0{,}002x^2 + 0{,}02x + 6$ für $0 \le x \le 30$
Dabei beschreibt x die Höhe der Kerze in cm (vom Boden nach oben).

a) Ermitteln Sie, wie groß der Durchmesser am Kerzenboden und an der Kerzenoberkante ist, und deuten Sie die Werte im Kontext.
b) Um Verpackung und Standfestigkeit planen zu können, ist die größte Breite entscheidend. Bestimmen Sie, an welcher Höhe die Kerze am breitesten ist und wie groß der Maximaldurchmesser dort ausfällt.
c) Für die Materialplanung soll abgeschätzt werden, wie viel Wachs pro Kerze benötigt wird. Stellen Sie ein geeignetes Integral für das Kerzenvolumen auf und bestimmen Sie das Volumen in Litern.
d) Kerzenwachs hat ungefähr eine Dichte von 0,90 g/cm³. Berechnen Sie daraus die Masse einer Kerze in Kilogramm und interpretieren Sie, ob das Ergebnis zu einer "Stumpenkerze" passt.

Ⓚ



Aufgabe 6.53 (YMccU5)

Für ein Modellflugzeug soll ein Schaumkern gefräst werden. Der Kern ist rotationssymmetrisch; aus dem Profil entsteht durch Drehung um die x-Achse die Form. Für die Kalkulation ist die Materialmenge wichtig.

Der Radius in cm wird modelliert durch $f(x) = 0{,}0008x^3 - 0{,}03x^2 + 0{,}35x + 1{,}6$ für $0 \le x \le 20$. Dabei ist x die Längskoordinate entlang des Kerns (in cm).

a) Prüfen Sie, ob der Kern im Modell an irgendeiner Stelle den zulässigen Maximaldurchmesser von 6\,\text{cm} überschreitet, und begründen Sie, ob das Modell geändert werden muss. Berücksichtigen Sie dabei auch die Randpunkte $x = 0$ und $x = 20$.

b) Der Hersteller will wissen, wie viel Material pro Kern benötigt wird. Ermitteln Sie das Volumen des Kerns in cm^3.

c) Berechnen Sie das Gesamtgewicht des Bauteils, um beurteilen zu können, ob es für den geplanten Einsatz geeignet ist. Für das Bauteil wird XPS (extrudierter Polystyrol-Hartschaum) mit einer Dichte von $\rho = 0{,}05$ g/cm³ verwendet. Prüfen Sie, ob für dieses Bauteil die Gewichtsvorgabe "maximal 25 g" eingehalten wird.

Ⓚ



Aufgabe 6.54 (DRKbVk)

Eine wiederverwendbare Getränkeflasche soll innen ein möglichst großes Fassungsvermögen haben, gleichzeitig aber nicht zu breit werden. Die Flasche wird als Rotationskörper modelliert: Der Innenraum entsteht durch Rotation des Innenradius, die Außenkontur durch Rotation des Außenradius. Aus der Differenz ergibt sich die Wandstärke bzw. das Materialvolumen (x ist die Höhe in cm).

Innenradius (in cm): $r(x) = 0{,}022x + 2{,}9$ für $0 \le x \le 18$
Außenradius (in cm): $R(x) = -0{,}002x^2 + 0{,}06x + 3$ für $0 \le x \le 18$

a) Stellen Sie zunächst sicher, dass das Modell überhaupt eine Flasche beschreibt: Begründen Sie rechnerisch, dass im gesamten Intervall $R(x) > r(x)$ gilt (ansonsten gäbe es "negative Wandstärke").

b) Für das Design sind Durchmesser unten ($x = 0$) und oben ($x = 18$) wichtig. Ermitteln Sie jeweils den Außendurchmesser und geben Sie die Standfläche in cm^2 an.

c) Die Produktbeschreibung soll das Fassungsvermögen enthalten. Ermitteln Sie das Innenvolumen der Flasche in Milliliter.

d) Für die Materialplanung wird außerdem das Kunststoffvolumen benötigt. Stellen Sie ein Integral für das Materialvolumen (Außenvolumen minus Innenvolumen) auf und berechnen Sie es.

e) Ein Granulatdatenblatt gibt an: 1 cm^3 Kunststoff entspricht 1,05 g. Berechnen Sie daraus die Masse der Flasche und erläutern Sie kurz, ob die Größenordnung plausibel wirkt.

Ⓚ



Aufgabe 6.55 (KfJeWE)

Beziehen Sie sich in dieser Aufgabe auf die Situationsbeschreibung zum Thermobecher.

a) Bestimmen Sie den Innendurchmesser am Becherboden und deuten Sie, was dieser Wert für die Standstabilität bedeutet.

b) Bestimmen Sie den Innendurchmesser an der Öffnung (bei $x = 12$) und erläutern Sie kurz, welche praktische Bedeutung dieser Durchmesser z. B. fürs Trinken bzw. Reinigen hat.

c) Ermitteln Sie, bei welcher Höhe der Becher innen am breitesten ist und wie groß dort der maximale Innendurchmesser ist.

d) Bestimmen Sie das Volumen des Innenraums bis zur Füllhöhe als Rotationsvolumen (Rotation um die x-Achse) und geben Sie das Ergebnis in Milliliter an und beurteilen Sie, ob der Thermobecher damit eher in Richtung "kleiner Coffee-to-go" oder "großer Becher" geht.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



6.7 VERMISCHTE ÜBUNGSAUFGABEN

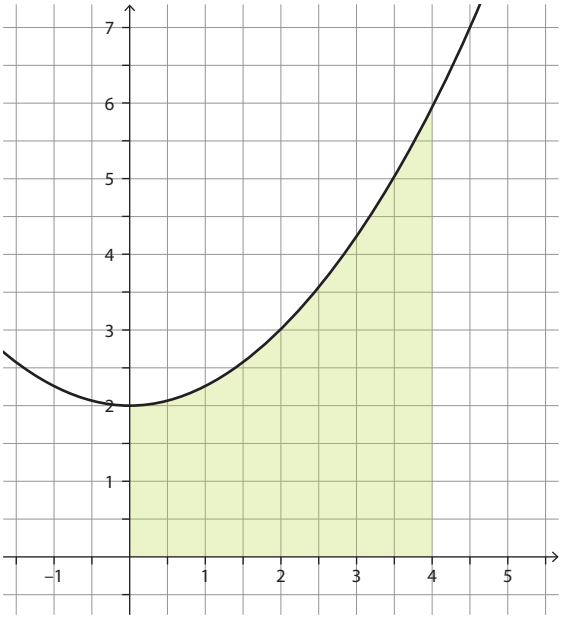
Aufgabe 6.56 (pX96PQ)
Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionstermen jeweils eine Stammfunktion F(x).

a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = \frac{5}{4}$
c) $f(x) = -7x$
d) $f(x) = 1{,}6x - 3{,}2$
e) $f(x) = (x - 2)(x + 4)$
f) $f(x) = (x + 1)^2$
g) $f(x) = 4x^2 - 18x + 5$
h) $f(x) = \frac{11}{6}x^3 - 2x^2 + 3x - 4$
i) $f(x) = (x - 2) \cdot x^4 - 3$

Aufgabe 6.57 (2mrUUz)
Ermitteln Sie die folgenden bestimmten Integrale. Geben Sie die Ergebnisse exakt an.

a) $\int_0^4 3x\,dx$
b) $\int_{-1}^2 2x^2\,dx$
c) $\int_0^2 5x^3\,dx$
d) $\int_{-3}^3 (6 - x^2)\,dx$

Aufgabe 6.58 (Q8ypBc)
Berechnen Sie die Größe der markierten Fläche unter der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$.



Aufgabe 6.59 (MDgfdz)
Ein Fahrradcomputer speichert während einer Trainingseinheit fortlaufend die momentane Geschwindigkeit. Für die Auswertung wird die Geschwindigkeit v(t) (in km/h) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) modelliert durch $v(t) = -12{,}5t^2 + 2{,}5t + 27{,}875$.
Für die gefahrene Strecke im Zeitraum $[t_1; t_2]$ wird im Modell die Fläche zwischen dem Graphen von v und der t-Achse im entsprechenden Intervall verwendet.
Bestimmen Sie, welche Strecke der Radfahrer zwischen $t_1 = 0{,}1$ und $t_2 = 0{,}5$ zurücklegt.

Aufgabe 6.60 (4cy2hn)
Bestimmen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Geben Sie exakte Werte an.

a) $\int_0^4 (3x^2 - 2x)\,dx$

b) $\int_{-2}^1 (2x^3 + 1)\,dx$

c) $\int_1^3 (x^2 - 4x + 5)\,dx$

d) $\int_{-1}^2 (5 - x^3)\,dx$

e) $\int_0^2 (0{,}5x^4 - 3x)\,dx$

f) $\int_{-3}^0 (x^2 + 2x)\,dx$

g) $\int_2^5 (4x - 6)\,dx$

h) $\int_{-2}^2 (x^3 - 3x)\,dx$

i) $\int_{-5}^{-2} (0{,}25x^2 + 2x - 3)\,dx$

Aufgabe 6.61 (6n7dff)
Bestimmen Sie die obere Integralgrenze a, sodass die Gleichung stimmt.

a) $\int_0^a 2x\,dx = 25$

b) $\int_1^a x^2\,dx = \frac{26}{3}$

c) $\int_{-2}^a 3x^2\,dx = 24$

d) $\int_0^a (4 - x)\,dx = 6$

e) $\int_2^a (x^2 - 1)\,dx = 0$

f) $\int_{-1}^a x^3\,dx = 3{,}75$

Aufgabe 6.62 (cqsMNW)
Bestimmen Sie den Parameter k, sodass die Aussage erfüllt ist.

a) $\int_0^2 (kx^2 + 1)\,dx = 10$

b) $\int_{-1}^1 (kx^3 + 2)\,dx = 4$

c) $\int_1^3 (x^2 + kx)\,dx = 20$

Aufgabe 6.63 (gdkCq6)
An einem heißen Sommertag wird die Temperatur in einem Klassenraum ohne Klimaanlage ab 08:00 Uhr gemessen. Der Temperaturverlauf kann näherungsweise durch die Funktion $T(x) = 0{,}003x^3 - 0{,}12x^2 + 3x + 22$ beschrieben werden. Dabei ist x die Zeit in Stunden seit 08:00 Uhr ($x = 0$) und T(x) die Temperatur in °C. Betrachtet wird der Zeitraum von 08:00 Uhr bis 15:00 Uhr, also $0 \le x \le 7$.

a) Ab einer Raumtemperatur von 30° C darf der Unterricht beendet werden. Bestimmen Sie, mit Hilfe der Tabellenfunktion des Taschenrechners, die ungefähre Uhrzeit, zu der die Schüler:innen nach Hause gehen dürfen.

b) Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur zwischen 08:00 Uhr und 15:00 Uhr.

Ⓚ **Aufgabe 6.64 (SpXRts)**



In einer modernen Verpackungslinie werden Kartons automatisch gefaltet, befüllt und anschließend über ein Förderband zur Etikettierung transportiert. Gerade in den ersten Minuten nach dem Einschalten läuft die Linie noch nicht stabil: Manche Stationen "tasten" sich ein, Material sammelt sich kurz, und die Mitarbeitenden greifen gelegentlich ein (z. B. wenn ein Karton schief steht). Damit der Schichtleiter die Anlaufphase besser beurteilen kann, wird der tatsächliche Durchsatz protokolliert. Dazu zählt ein Sensor, wie viele Pakete pro Minute das Ende des Förderbands passieren. Die Durchsatzrate r(t) (Pakete/Minute) hängt von der Zeit t (in Minuten seit dem Start) ab und soll modellhaft durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschrieben werden. Die Messwerte lauten:

t (min)	0	2	4	6
r(t) (Pakete/min)	30	34	62	66

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für $r(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ auf, das zu den Messwerten passt, und ermitteln Sie daraus eine passende Funktionsgleichung r(t).

b) Für die Tagesplanung ist nicht der Momentanwert entscheidend, sondern die Gesamtmenge der transportierten Pakete in den ersten 6 Minuten.

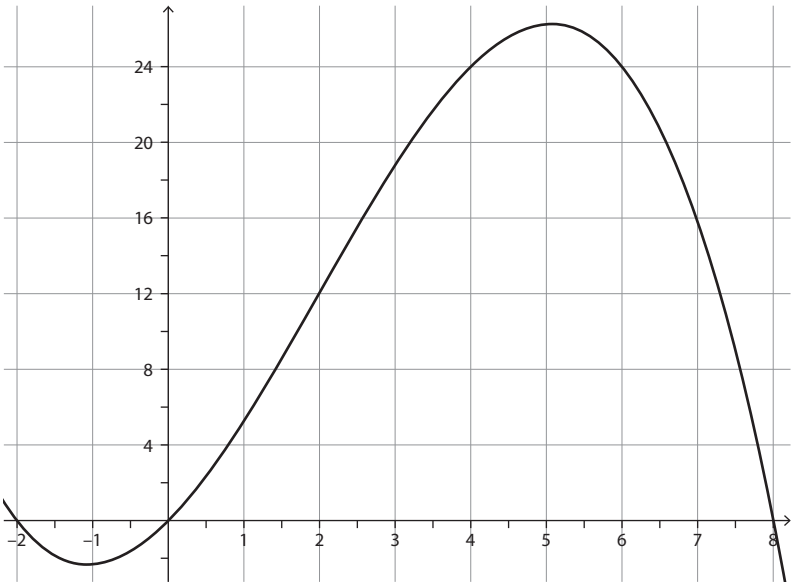
c) Geben Sie den durchschnittlichen Durchsatz im Zeitraum [0; 6] an (in Paketen pro Minute) und deuten Sie diesen Wert im Kontext: Was sagt er über die Anlaufphase aus?

d) Die Linie gilt als "eingeschwungen", sobald insgesamt 200 Pakete transportiert wurden. Bestimmen Sie, ab welcher Minute dieser Wert im Modell erreicht wird. Eine Annäherung dieses Wertes mit Hilfe der Tabellenfunktion des Taschenrechners ist ausreichend.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.65 (zV3nss) Ⓚ

In einer großen Industrieanlage wird ein Speichertank mit einer Flüssigkeit befüllt, der später als Puffer für einen Produktionsprozess dient. Während des Befüllens wird nicht nur der Füllstand beobachtet, sondern vor allem die Zuflussrate: Sie ist am Anfang oft gering (Ventile öffnen, Druck baut sich auf), steigt dann an und fällt gegen Ende wieder ab (weil geregelt wird, um Überlaufen zu vermeiden).



Dazu ist hier der Graph der Zuflussrate q(t) abgebildet. Daraus sollen geeignete Informationen abgelesen und daraus ein Modell erstellt werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen ($0 \le t \le 8$), die Zuflussrate q(t) in m^3/h.



a) Lesen Sie aus dem Graphen vier geeignete Informationen ab (z. B. Startwert, Schnittpunkte mit der t-Achse, Zeitpunkt und Höhe des größten Zuflusses) und notieren Sie diese als Bedingungen. Formulieren Sie daraus ein Lineares Gleichungssystem und bestimmen Sie eine passende Funktionsgleichung q(t).

b) Prüfen Sie anhand des Modells, ob im Zeitraum [0; 8] durchschnittlich 15 m^3 Flüssigkeit pro Stunde in den Tank gelangen, damit der Filterkreislauf stabil starten kann. Formulieren Sie dazu ein kurzes Fazit.

c) Zu welchem Zeitpunkt wird die Flüssigkeit am schnellsten eingefüllt? Bestimmen Sie diesen Zeitpunkt und geben Sie die Zuflussrate q(t) (in m^3/h) zu diesem Zeitpunkt an.

Aufgabe 6.66 (9WAjLt) Ⓚ



Bei einer großen Veranstaltung (z. B. Messe, Konzert oder Festival) wird der Einlass über Scanner geregelt. Schon kurz nach Öffnung kommen viele Besucher gleichzeitig, während die Abfertigung zunächst durch Personalbesetzung und Sicherheitschecks begrenzt ist. Dadurch entsteht eine Warteschlange, die sich im Verlauf wieder abbauen kann – oder im ungünstigen Fall weiter anwächst. Es wird zwischen zwei Größen unterschieden:

- Ankunftsrate A(t): Anzahl ankommender Personen pro Minute
- Abfertigungsrate S(t): Anzahl abgefertigter Personen pro Minute

Dabei gilt t in Minuten nach Öffnung, $0 \le t \le 60$. Zu Beginn stehen bereits W(0) = 120 Personen in der Warteschlange.

Ankunftsrate: $A(t) = -0{,}02t^2 + 1{,}2t + 25$
Abfertigungsrate (konstant): $S(t) = 35$

a) Stellen Sie ein Modell für die Warteschlange W(t) auf, indem Sie eine geeignete Bilanzgleichung formulieren. Bestimmen Sie anschließend die Warteschlangenlänge W(60).
Tipp: Der Ansatz zur Lösung dieser Aufgabe lautet $W'(t) = A(t) - S(t)$

b) Für die Einsatzleitung ist wichtig, wann die Schlange am längsten ist, um Personal gezielt zu verlagern. Ermitteln Sie den Zeitpunkt und die maximale Warteschlangenlänge.

c) Bestimmen Sie die durchschnittliche Ankunftsrate im Zeitraum [0; 60]. Nutzen Sie dazu den Mittelwert der Funktion A(t).

d) Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die maximale Ankunftsrate im Zeitraum [0; 60] die Abfertigungsrate übersteigt. Für die Personalplanung gilt die Regel: Übersteigt die maximale Ankunftsrate die Abfertigungsrate um mehr als 20 %, soll weiteres Einlasspersonal eingesetzt werden. Entscheiden Sie, ob Personal aufgestockt werden muss.

Aufgabe 6.67 (5GRFL9)

Berechnen Sie jeweils den geometrischen Flächeninhalt zwischen den Graphen von f und g. Der betrachtete Bereich liegt zwischen den Schnittpunkten.

a) $f(x) = -x^2 + 4x$, $g(x) = x$

b) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$, $g(x) = -x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 2x + 3$

d) $f(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 4$, $g(x) = 0{,}5x + 2$

e) $f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = x$

f) $f(x) = -x^3 + 3x^2$, $g(x) = x^2$

Aufgabe 6.68 (JQGRNP)

Bestimmen Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen den beiden Graphen im angegebenen Intervall. Falls sich die Graphen im Intervall schneiden, muss sinnvoll geteilt werden.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 1$, Intervall $[0; 3]$

b) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3$, $g(x) = 1$, Intervall $[-2; 4]$

c) $f(x) = x^3 - 3x$, $g(x) = -x$, Intervall $[-2; 2]$

d) $f(x) = 0{,}2x^3 - x$, $g(x) = 0{,}4x$, Intervall $[0; 5]$

e) $f(x) = -x^2 + 6$, $g(x) = x^2 - 2$, Intervall $[-2; 2]$

f) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$, $g(x) = -2x + 6$, Intervall $[1; 5]$

Aufgabe 6.69 (iBfSQZ)

Bestimmen Sie den geometrischen Flächeninhalt zwischen den Graphen von $f(x) = x^3 - 3x$ und $g(x) = x$.

Aufgabe 6.70 (1YLK6d)

Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall zwei Größen: den Integralwert und den geometrischen Flächeninhalt.

a) $f(x) = 0{,}25x^3 - 1{,}5x$, Intervall $[-2; 2]$

b) $f(x) = 0{,}5x(x - 1)(x - 3)$, Intervall $[0; 3]$

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, Intervall $[0; 5]$

d) $f(x) = -x^2 + 1$, Intervall $[-2; 1]$

e) $f(x) = \frac{1}{4}x^2(x - 4)$, Intervall $[0; 5]$

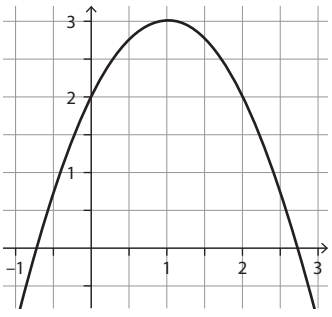
f) $f(x) = \cos(x)$, Intervall $[0; \pi]$

Hinweis zu Teilaufgabe f): So eine Aufgabe wird in der Form weder in einer Klausur, noch in der Abschlussprüfung dran kommen. Sehen Sie diese Aufgabe als Herausforderung und recherchieren Sie selbstständig die Stammfunktion und Nullstellen der Sinus-Funktion.
Dazu weiterhin wichtig: Möchten Sie mit sin/cos als Funktion rechnen, muss das Bogenmaß in Ihrem Taschenrechner auf "RAD" (oder "radian") eingestellt werden.
Möchten Sie mit Winkeln rechnen (z. B. Winkel in einem Dreieck oder Steigungen in Winkel bzw. Winkel in Steigung umrechnen), müssen Sie "DEG" (oder "degree") in Ihrem Taschenrechner als Bogenmaß einstellen.

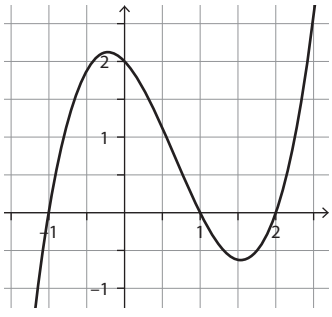
Aufgabe 6.71 (yfzgb4)

Bestimmen Sie die zwischen Graph und x-Achse eingeschlossene (geometrische) Fläche.

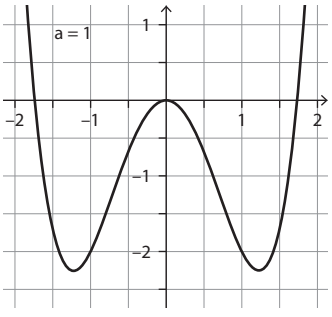
a)



b)



c)



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.72 (Z2AnTZ)
Aus einem Blech soll ein Bauteil ausgeschnitten werden. Die Kontur des Bauteils wird im Modell durch die beiden Funktionsgraphen $f(x) = x^2 - 6x$ und $g(x) = -x + 11$ beschrieben (x- und y-Werte in dm).

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Bereichs, der zwischen den beiden Graphen eingeschlossen wird.
b) Das Bauteil wird anschließend beidseitig mit einem Speziallack beschichtet. Ermitteln Sie die Gesamtkosten für 100 beschichtete Bauteile, wenn der Lack 2,10 Euro pro dm^2 kostet.

Aufgabe 6.73 (5KD59N)
Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Bereichs, der zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt (also die tatsächlich eingeschlossene Fläche).

Aufgabe 6.74 (Lk2mVQ)
Berechnen Sie den Inhalt der eingeschlossenen Fläche der folgenden Funktionen:
$f(x) = 0{,}6x^3 - 2{,}4x^2 + 1{,}8x + 1$
$g(x) = 1{,}2x^2 - 3{,}6x + 1$

Aufgabe 6.75 (Bf74fP) Ⓚ
Die Begrenzungen der Parkanlage werden durch zwei Straßen modelliert. Im Koordinatensystem gilt:

- x und y sind in 10 m-Schritten angegeben (x = 1 entspricht 10 m)
- innerer Straßenverlauf: $f(x) = 0{,}25x^2 + 2$
- äußerer Straßenverlauf: $g(x) = -0{,}25x^2 + 4x + 2$

Der betrachtete Parkbereich liegt zwischen den Schnittpunkten der beiden Kurven.



a) Die Parkzugänge sollen genau dort liegen, wo sich die beiden Straßen schneiden. Ermitteln Sie die Koordinaten beider Zugänge (Schnittpunkte).
b) Zwischen diesen beiden Zugängen soll ein gerader, betonierter Weg durch den Park verlaufen. Bestimmen Sie dazu zunächst die tatsächliche Weglänge in Metern, indem Sie die Entfernung der beiden Zugangspunkte mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Anschließend soll die benötigte Betonmenge für den Weg ermittelt werden. Der Weg ist 3 m breit und hat eine Dicke von 20 cm.
Berechnen Sie das Betonvolumen in m^3, das dafür benötigt wird.
c) Für die Kostenkalkulation wird für Rollrasen ein Preis von 7,99 Euro/m^2 angesetzt. Bestimmen Sie die Rasenfläche der Parkanlage in m^2 und berechnen Sie daraus die Materialkosten. Die Fläche des betonierten Weges wird dabei nicht abgezogen (der Weg liegt im Modell also "über" dem Rasen). Berücksichtigen Sie zusätzlich 10 % Verschnitt.
d) Lassen Sie sich die Funktionen mit einem geeigneten Programm (z. B. GeoGebra) zeichnen und überlgen Sie zunächst ohne Rechnung, wie die Parkfläche durch eine senkrechte Trennlinie (also eine Gerade x = k, parallel zur y-Achse) in zwei gleich große Teilflächen geteilt werden kann. Geben Sie den Wert k an, sodass die von den beiden Begrenzungsfunktionen eingeschlossene Fläche im Intervall zwischen den Schnittpunkten links von x = k genauso groß ist wie rechts von x = k. Prüfen Sie Ihr Ergebnis rechnerisch.

Aufgabe 6.76 (PXbL9J)
Die Parabel hat den y-Achsenabschnitt $y_0 = -1$ und den Scheitelpunkt S(–2|–3). Zusammen mit dem Graphen der Funktion $f(x) = 0{,}5x^3 + 1$ begrenzt sie eine Fläche mit dem Inhalt A.

a) Stellen Sie zunächst den Funktionsterm der Parabel auf.
b) Berechnen Sie anschließend den orientierten Flächeninhalt A, der im Intervall [–2; 1] von den beiden Graphen eingeschlossen wird.

Aufgabe 6.77 (upPj5r)

Das MGhZ Dortmund (Mund-Gesundheits-Zentrum) möchte sich eine sehr stilisierte, riesige Zahn-Skulptur über den Eingang zur Praxis hängen, um potenzielle Patienten auf sich aufmerksam zu machen. Der Querschnitt dieser Skulptur ist rechts abgebildet und entspricht der eingeschlossenen Fläche der Funktionen $g(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ und $f(x) = -0{,}1x^2 + 6$ (x und f(x) in Meter).

a) Bestimmen Sie rechnerisch die Schnittpunkte der Funktionen.

b) Wie groß ist die Querschnittsfläche der Zahn-Skulptur?

Ⓚ

Aufgabe 6.78 (83ZSk9)



In einer Abfüllanlage für Speiseöl wird eine digitale Waage direkt hinter dem Füllventil eingesetzt. Bei jedem Flaschenwechsel schwingt das System kurz nach, weil das Ventil nachregelt und das Förderband minimal vibriert. Für die Qualitätskontrolle wird daher die Füllmassen-Abweichung e(t) (in g) relativ zum Sollwert (z. B. 500 g) während der ersten Sekunden nach dem Start eines Abfüllvorgangs modelliert.

Positive Werte bedeuten: zu viel eingefüllt, negative Werte: zu wenig. Die Zeit t wird in Sekunden seit Beginn des Abfüllvorgangs gemessen.

Folgende gerundete Messerte wurden festgehalten:

t (s)	0	4	8	12
e(t) (g)	0,2	1,1	0,6	0,9

a) Um die Startphase der Waage beurteilen zu können, soll aus den Messwerten ein Modell erstellt werden: Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3. Grades e(t), die die Abweichung e (in g) in Abhängigkeit von t (in s) beschreibt.

b) Für die Abnahme gilt: Die Anlage darf im Mittel über die ersten 12 Sekunden höchstens +0,6 g vom Sollwert abweichen (Überfüllung). Prüfen Sie anhand des mittleren Fehlers, ob die Abnahmebedingung erfüllt ist.

c) Zusätzlich gilt als Sicherheitsgrenze: Zu keinem Zeitpunkt in [0; 12] darf die Abweichung größer als 1,5 g sein. Prüfen Sie, ob das Modell diese Grenze einhält.

d) Falls eine der Bedingungen nicht erfüllt ist: Formulieren Sie eine kurze Empfehlung an die Schichtleitung und begründen Sie diese mit Kennwerten aus Ihren Ergebnissen. Gehen die Ungenauigkeiten der Befüllung zu Lasten des Kunden oder des Unternehmens?

Ⓚ

Aufgabe 6.79 (EsVLiA)



Für eine mobile Wasserfilterstation (Katastrophenschutz) wird die Förderleistung einer Pumpe während eines kurzen Testlaufs untersucht. Die Förderrate q(t) (in L/s) hängt von der Zeit t (in s) ab: Zu Beginn muss das System ansaugen, dann steigt die Förderrate, erreicht kurz ein Maximum und fällt gegen Ende wieder ab, weil der Testlauf beendet und die Pumpe heruntergeregelt wird. Aus dem zugehörigen Graphen werden folgende Informationen abgelesen bzw. sind vorgegeben:

- Der Graph schneidet die t-Achse bei t = 0 (Start: noch kein Durchfluss).
- Bei t = 2 liegt ein lokales Maximum.
- Zusätzlich gilt q(1) = 2 und q(3) = 0 (Test endet, Durchfluss fällt wieder auf 0).

a) Um die Förderleistung der Pumpe besser bewerten zu können, soll aus den stichpunktartig erfassten Kennwerten ein Modell erstellt werden: Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion 3. Grades q(t) für die Förderrate (in L/s).

b) Für den Filter gilt: Damit die Aktivkohle gleichmäßig arbeitet, soll die durchschnittliche Förderrate im Testlauf [0; 3] mindestens 1,2 L/s betragen. Prüfen Sie, ob diese Mindestanforderung erreicht wird.

c) Die Pumpe darf außerdem kurzfristig nicht überlastet werden: Die Förderrate soll im gesamten Intervall [0; 3] nicht über 2,8 L/s steigen. Prüfen Sie diese Bedingung am Modell.

d) Abschließend soll die Gesamtmenge Wasser dokumentiert werden, die im Testlauf gefördert wurde. Bestimmen Sie diese Menge und geben Sie die Einheit korrekt an.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.80 (Esypne)

Bestimmen Sie jeweils den Mittelwert m der Funktion im angegebenen Intervall.

a) $f(x) = 2x - 3$ auf $[0; 5]$
b) $f(x) = -x^2 + 4x$ auf $[0; 4]$
c) $f(x) = 0{,}5x^3 - x$ auf $[-1; 2]$
d) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ auf $[-2; 1]$
e) $f(x) = -0{,}25x^3 + x^2 - 2$ auf $[0; 4]$
f) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ auf $[-1; 1]$
g) $f(x) = -0{,}5x^4 + 2x^2$ auf $[0; 2]$
h) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$ auf $[0; 2]$
i) $f(x) = 0{,}25x^4 - x^2 + 2x$ auf $[-1; 3]$
j) $f(x) = \sin(x)$ auf $[0; \pi]$

Aufgabe 6.81 (TvY5Wj)

Berechnen Sie den Mittelwert m und entscheiden Sie jeweils, ob m näher an f(a), f(b) oder $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ liegt.

a) $f(x) = x^2$ auf $[0; 3]$
b) $f(x) = -2x + 6$ auf $[1; 5]$
c) $f(x) = x^3 - 3x$ auf $[-2; 0{,}5]$
d) $f(x) = 0{,}2x^3 + x$ auf $[-1; 2]$
e) $f(x) = -x^2 + 2$ auf $[-1; 1]$
f) $f(x) = 0{,}5x^4 - x^2$ auf $[0; 2]$
g) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ auf $[0; 4]$
h) $f(x) = -0{,}5x^3 + 2x$ auf $[-2; 2]$
i) $f(x) = 0{,}1x^4 - 0{,}8x^2 + 1$ auf $[-1; 3]$
j) $f(x) = \sin(x) + 1$ auf $[0; \pi]$

Aufgabe 6.82 (U5HrgX) Ⓚ



In einer Verpackungsmaschine werden Kartonlaschen mit einer Andruckrolle auf eine Klebenaht gepresst, damit die Schachtel zuverlässig schließt. Entlang einer kurzen Pressstrecke kann der Druck schwanken (z. B. durch Rollenunwucht, Materialtoleranzen oder leicht wechselnde Bandspannung).

Der Anpressdruck p(x) (in N/cm²) entlang der Strecke x (in cm) wird auf dem Intervall $[0; 10]$ modelliert durch: $p(x) = -0{,}06x^3 + 0{,}9x^2 - 3x + 8$

a) Für die Klebenaht ist entscheidend, wie "stabil" der Druck über die Strecke ist. Bestimmen Sie den mittleren Anpressdruck auf $[0; 10]$ und deuten Sie ihn als "gleichmäßigen Ersatzdruck".
b) Der Druck darf aus Qualitätsgründen nie unter 6 N/cm² fallen (sonst öffnet sich die Naht) und nie über 11 N/cm² steigen (sonst wird der Karton beschädigt). Prüfen Sie mit dem Modell, ob beide Grenzwerte im gesamten Intervall eingehalten werden.
c) Als Zusatzkriterium der Instandhaltung gilt: Der maximale Druck darf höchstens 25 % über dem Mittelwert liegen. Prüfen Sie, ob diese Vorgabe erfüllt ist. Falls nicht: Entscheiden Sie, ob eine Anpassung des Anpresssystems sinnvoll ist, und begründen Sie kurz.
d) Für eine Stichprobe soll der Druck an der Position $x = 4$ cm dokumentiert werden. Bestimmen Sie den Modellwert und ordnen Sie ihn in Bezug auf die Grenzwerte ein.

Aufgabe 6.83 (8BTVaz) Ⓚ



In einer Leiterplattenfertigung wird eine transparente Schutzlackschicht (Conformal Coating) aufgetragen, damit die Elektronik gegen Feuchtigkeit geschützt ist. Während eines Sprühdurchgangs ist die Schichtdicke nicht konstant: Das Sprühbild baut sich auf, läuft stabil und nimmt am Ende wieder ab. Als Qualitätsvorgabe gilt: Im Mittel sollen 12 µm erreicht werden. Die momentane Schichtdicke d(t) (in µm) wird modelliert durch:

$d(t) = 0{,}0012t^3 - 0{,}06t^2 + 1{,}1t + 9$ für $0 \le t \le 20$ (t in s)

a) Für die Freigabe eines Sprühprogramms ist der Durchschnitt entscheidend: Bestimmen Sie die mittlere Schichtdicke im Intervall $[0; 20]$.
b) Die Spezifikation fordert 12 µm ± 0,5 µm als mittlere Schichtdicke. Prüfen Sie anhand des Ergebnisses aus a), ob das Sprühprogramm die Spezifikation erfüllt.
c) Die Schichtdicke soll während des Durchgangs möglichst stabil bleiben und darf zu keinem Zeitpunkt unter 10 µm fallen. Prüfen Sie diese Mindestanforderung auch an den Randpunkten der Funktion.
d) Falls die Spezifikation nicht erfüllt ist: Formulieren Sie eine kurze technische Konsequenz (z. B. "Parameter anpassen") und nennen Sie einen Modellhinweis, der diese Empfehlung stützt (z. B. zu niedriger Mittelwert oder Unterschreitung der Mindestdicke).

Aufgabe 6.84 (syeWx2)
Bestimmen Sie jeweils das Rotationsvolumen, das entsteht, wenn die Fläche zwischen dem Graphen von f(x) und der x-Achse im angegebenen Intervall um die x-Achse rotiert. Entscheiden Sie sinnvoll, ob Symmetrie Rechenwege verkürzt.

a) $f(x) = 3 - x^2$, Intervall $[-1; 1]$

b) $f(x) = 0{,}5x + 2$, Intervall $[-2; 2]$

c) $f(x) = -0{,}25x^2 + 2x + 4$, Intervall $[0; 4]$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$, Intervall $[0; 3]$

e) $f(x) = 4 - 0{,}25x^2$, Intervall $[-4; 4]$

f) $f(x) = 0{,}1x^3 + 1$, Intervall $[0; 3]$

Aufgabe 6.85 (4xDBnQ)
Ein Hohlkörper entsteht, wenn der Bereich zwischen Außenradius R(x) und Innenradius r(x) um die x-Achse rotiert. Bestimmen Sie jeweils das Materialvolumen im angegebenen Intervall.

a) $R(x) = 4$, $r(x) = x$, Intervall $[0; 3]$

b) $R(x) = 3 + 0{,}5x$, $r(x) = 1 + 0{,}25x$, Intervall $[0; 4]$

c) $R(x) = 5 - 0{,}2x^2$, $r(x) = 2$, Intervall $[0; 4]$

d) $R(x) = 4 - 0{,}25x^2$, $r(x) = 1 + 0{,}5x$, Intervall $[0; 2]$

e) $R(x) = 2 + x^2$, $r(x) = x$, Intervall $[0; 2]$

f) $R(x) = 3$, $r(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5$, Intervall $[0; 2]$

Aufgabe 6.86 (uEQENZ)
Ein Designbüro entwirft eine rotationssymmetrische Glasvase. Der Innenraum der Vase soll über die Höhe möglichst harmonisch verlaufen. Im Modell beschreibt f(x) den Innenradius in cm, x ist die Höhe in cm (vom Boden nach oben).

$f(x) = -0{,}01x^3 + 0{,}18x^2 + 0{,}6x + 2$ für $0 \le x \le 18$

a) Der Innenraum soll als Rotationskörper interpretiert werden. Ermitteln Sie, wie viele Liter Flüssigkeit die Vase bis zur Höhe 18 cm aufnehmen kann.
b) Bestimmen Sie den Durchmesser am Boden und den Durchmesser an der Öffnung (bei $x = 18$).
c) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, ob es im betrachteten Bereich eine Stelle gibt, an der die Vase am breitesten ist (und wo diese ungefähr liegt).

Aufgabe 6.87 (3Pddf9)
In einer Werkstatt wird ein rotationssymmetrisches Distanzstück für eine Maschinenwelle gefertigt. Der Außenradius und der Innenradius werden (in mm) durch Funktionen modelliert, x ist die Bauteillänge in mm.

- Außenradius: $R(x) = 18 - 0{,}002x^2$ für $0 \le x \le 60$
- Innenradius: $r(x) = 10 + 0{,}03x$ für $0 \le x \le 60$

a) Ermitteln Sie das Materialvolumen des Bauteils in mm^3.
b) Rechnen Sie das Ergebnis in cm^3 um.
c) Die Dichte von Aluminium beträgt 2,7 g/cm^3. Bestimmen Sie die Masse des Bauteils in g.

Aufgabe 6.88 (vFGfSM)
Ein gedrechselter Griff soll aus einem Holzrohling entstehen. Der Radius wird angenähert durch $f(x) = 3 - 0{,}2x$ für $0 \le x \le 10$.
a) Bestimme das Volumen des Griffes in cm^3.
b) Der Griff soll am Ende (bei $x = 10$) mindestens 1 cm Radius haben. Prüfen Sie, ob das Modell die Vorgabe erfüllt.
c) Holz hat eine Dichte von 0,70 g/cm^3. Berechnen Sie die Masse.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 6.89 (216rhZ)

Eine Abstandshülse wird als Hohlzylinder modelliert, Länge 12 cm: $R(x) = 2{,}5$ und $r(x) = 2{,}0$ für $0 \le x \le 12$.

a) Bestimmen Sie das Materialvolumen der Hülse in cm^3.
b) Geben Sie den Außendurchmesser und Innendurchmesser an.
c) Eine Hülse kostet 0,03 Euro pro cm^3 Material. Bestimme die Materialkosten.

Aufgabe 6.90 (nWdTfH) Ⓚ

Eine Produktdesignerin entwickelt eine wiederverwendbare Trinkflasche. Damit die Flasche gut in der Hand liegt, darf sie außen nicht zu breit werden. Gleichzeitig soll das Fassungsvermögen möglichst groß sein. Für den Prototyp wird der Querschnitt in einem Koordinatensystem modelliert: x beschreibt die Höhe in cm (vom Boden nach oben). Durch Rotation um die x-Achse entsteht die räumliche Flasche.



Für den betrachteten Bereich $0 \le x \le 18$ gelten:

- Außenradius: $R(x) = -0{,}001x^2 + 3{,}9$
- Innenradius: $r(x) = -0{,}0008x^2 + 3{,}7$

a) Für die Konstruktion ist entscheidend, wie dick die Wandung maximal wird. Prüfen Sie, an welcher Stelle die Wandstärke $R(x) - r(x)$ am größten ist, und geben Sie diese maximale Wandstärke (in mm) an.
b) Das Design soll "schlank" bleiben: Der Innendurchmesser darf höchstens 7,5 cm betragen. Bewerten Sie anhand des Modells, ob diese Vorgabe erfüllt ist.
c) Für die Alltagstauglichkeit wird ein Mindestvolumen von 0,75 l gefordert. Untersuchen Sie, ob der Innenraum bis zur Höhe 18 cm dieses Volumen erreicht.
d) Zur Materialabschätzung wird das Volumen der Flaschenwand benötigt. Ermitteln Sie das Materialvolumen.
e) Das Material hat eine Dichte von 1,05 g/cm^3. Bestimmen Sie die Masse des Kunststoffs (in g). Begründen Sie anschließend kurz, ob das Ergebnis für eine Flasche "handlich" wirkt.

Aufgabe 6.91 (9tRBiT) Ⓚ

In einer kleinen Wasseraufbereitungsanlage wird eine zylindrische Pumpenkammer mit einem speziell geformten Einsatz abgedichtet. Der Einsatz wird gedreht hergestellt; sein Profil wird in einem Koordinatensystem beschrieben. x ist die Länge in cm entlang der Kammerachse. Durch Rotation um die x-Achse entsteht der dreidimensionale Einsatzkörper.



Der Radius wird für $0 \le x \le 20$ modelliert durch: $f(x) = 2{,}6 + 0{,}12x - 0{,}006x^2$

a) Für die Montage darf der Einsatz nirgends einen Durchmesser von mehr als 6 cm haben. Prüfen Sie diese Vorgabe im Modell und nennen Sie die Stelle, an der der Einsatz am breitesten ist.
b) Für die Materialplanung soll bestimmt werden, wie viel Dichtmaterial pro Einsatz benötigt wird. Ermitteln Sie das Volumen des Einsatzes in cm^3 und geben Sie Gewicht bei einer Dichte von $\rho = 2{,}7\ g/cm^3$ an.
c) Der Hersteller kalkuliert mit 0,018 Euro pro cm^3 Material (inkl. Verschnitt). Bestimmen Sie die Materialkosten für einen Einsatz.
d) Für eine Serie werden 250 Einsätze benötigt. Die Anlage kann nur freigegeben werden, wenn die Materialkosten unter 2.700 Euro bleiben. Bewerten Sie, ob die Vorgabe erfüllt ist.
e) Bei der Fertigung gilt: Damit der Einsatz sauber abdichtet, darf die Steigung des Radius höchstens 0,05 cm/cm betragen (also $|f'(x)| \le 0{,}05$).
Bestimmen Sie alle x-Werte im Intervall $[0; 20]$, für die diese Vorgabe erfüllt ist, und interpretieren Sie den Bereich.

6.8 CHECKLISTE – INTEGRALRECHNUNG

Mit der Checkliste können Sie als Vorbereitung auf die Klausur überprüfen, welche grundlegenden Themenbereiche der Unterrichtsreihe Sie gut können bzw. wo Sie noch unsicher sind. Wenn Sie die Checkliste erfolgreich bearbeitet haben, sollten Sie in der Klassenarbeit auf jeden Fall eine ausreichende Leistung erzielen.

	Meine Kompetenzen (bitte kreuzen Sie entsprechend an):	Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
1	Ich kenne die Gleichung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung.				
2	Ich weiß, wie Stammfunktionen gebildet werden.				
3	Ich kann den Unterschied zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen erläutern.				
4	Ich kann die Begriffe "untere Integralgrenze" und "obere Integralgrenze" erläutern.				
5	Ich kann ein Integral berechnen, wenn sowohl die Funktionsgleichung, als auch die Integrationsgrenzen angegeben sind.				
6	Ich kann ein Integral berechnen, wenn lediglich die Funktionsgleichung angegeben ist.				
7	Ich kann eine Differenzfunktion bestimmen.				
8	Ich kann Schnittpunkte von Funktionen berechnen.				
9	Ich kann mit Hilfe der Differenzfunktion die Fläche zwischen zwei Funktionen bestimmen.				
10	Ich kann erläutern, was die definierten Begriffe "Integral" und "Fläche" voneinander unterscheidet.				
11	Ich kann die Nullstellen einer (Differenz-)Funktion mit Hilfe der bekannten Lösungsverfahren bestimmen.				
12	Ich kann eine Fläche bestimmen, wenn es mehr als zwei Nullstellen einer (Differenz-)Funktion gibt.				
13	Ich kann bei einer Funktion mit mehr als zwei Nullstellen sowohl das Integral, als auch die Fläche bestimmen.				
14	Ich kann Aufgaben im Sachzusammenhang lösen.				

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

		Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
15	Ich kann die Ergebnisse von Textaufgaben im Sachzusammenhang interpretieren.				
16	Ich kann neben der Integralrechnung auch noch die Funktionsuntersuchung mit Extrem- und Wendepunkten aus dem vorherigen Kapitel durchführen.				
17	Ich kann den Mittelwert einer Funktion berechnen und im Sachkontext interpretieren.				
18	Ich kann das Rotationsvolumen eines Vollkörpers berechnen.				
19	Ich kann das Rotationsvolumen eines Hohlkörpers berechnen.				

Hilfestellung

Beim Durchgehen der Checkliste sind noch folgende Fragen aufgetaucht:

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.1 EINFÜHRUNG IN VEKTOREN

Situationsbeschreibung

Mannheim wird wegen der Anordnung seiner Straßen in der Innenstadt auch als Quaderstadt bezeichnet. Jemand fragt vor der Jesuitenkirche (weißer Punkt) nach dem Weg zum Marktplatz (Pfeilspitze). Der direkte Weg (Luftlinie) ist als weißer Pfeil eingezeichnet, den Sie so aber nicht zu Fuß gehen können.



Aufgabe 7.1 **(dSTvgg)**

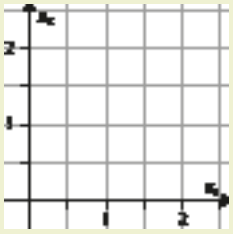
a) Geben Sie drei verschiedene Wegbeschreibungen an (füllen Sie die Lücken z. B. mit "rechts", "links", "oben", "unten" und Zahlwerten).

1. _____ nach _____ und _____ nach _____

2. _____ nach _____ und _____ nach _____

3. _____

b) Welche Wegbeschreibung können Sie sich am besten merken?



Koordinatenachsen
Die Achsen in einem Koordinatensystem für Vektoren lauten nicht x und y, sondern werden als **x_1-Achse** und **x_2-Achse** bezeichnet.

ⓘ **Erläuterung**

Ein Vektor beschreibt eine Bewegung oder eine Verschiebung in der Ebene oder im Raum. Sie können zum Beispiel einen Punkt A zu einem Punkt B verschieben. Sie können auch komplette Formen oder im dreidimensionalen sogar ganze Körper (z. B. einen Würfel) verschieben. Alle diese Verschiebungen können mit Hilfe von **Vektoren** dargestellt werden.

Die Schreibweise für einen solchen Vektor lautet: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Der kleine Pfeil über dem v gibt an, dass es sich hier um einen Vektor handelt. Dabei beschreibt x_1 die Bewegung nach rechts (positiver Wert) bzw. links (negativer Wert) und x_2 die Bewegung nach oben (positiver Wert) bzw. unten (negativer Wert).

Da der Vektor aber nur eine Bewegung beschreibt, ist er nicht an eine feste Position im Koordinatensystem gebunden, sondern kann theoretisch überall positioniert werden.

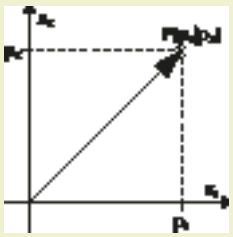
ⓘ **Gegenvektor**

Verläuft derselbe Vektor in die entgegengesetzte Richtung, bezeichnen Sie diesen als Gegenvektor und es gilt: $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

ⓘ **Verbindungsvektor**

Möchten Sie nun die Verbindung (Verschiebung) von einem zu einem anderen Punkt bestimmen (ähnlich wie in der Situationsbeschreibung mit der Mannheimer Innenstadt), können Sie diese mit Hilfe der Koordinaten zweier Punkte bestimmen:

Für den Verbindungsvektor zweier Punkte $A(a_1|a_2)$ und $B(b_1|b_2)$ gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$



ⓘ **Ortsvektor**

Bisher konnten Sie Punkte in einem Koordinatensystem durch die Angabe einer x- und y-Koordinate beschreiben. Dies ist auch mithilfe des Vektors $\overrightarrow{OP}$ möglich, der den Koordinatenursprung O mit dem Punkt P verbindet. Dieser Vektor heißt Ortsvektor und Sie benennen ihn mit dem Kleinbuchstaben des "Endpunktes", also in diesem Fall $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ (diese Benennung gilt nur für Ortsvektoren!). Es gilt:

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt $P(p_1|p_2)$ und der Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ haben also dieselben Koordinaten, bloß in einer anderen Schreibweise.

Aufgabe 7.2 **(D6S5Sh)**

Zeichnen Sie die Punkte A und B in ein Koordinatensystem. Zeichnen und bestimmen Sie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ der Punkte A und B und beschreiben Sie den Weg von A nach B in Worten (so wie in Aufgabe 7.1).

a) A(1|2), B(5|7) b) A(3|-2), B(-1|4) c) A(3|3), B(-4|3) d) A(5|-2), B(5|6)

Aufgabe 7.3 **(yeFsvA)**

Geben Sie jeweils zwei Punktpaare A und B an, die folgenden Verbindungsvektor haben:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix}$ e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) Geben Sie den Gegenvektor zu den Vektoren aus den Teilaufgaben a) bis e) an.

g) Der Punkt P(2|5) soll durch die Vektoren aus a) bis e) zum Punkt P' verschoben werden. Benennen Sie jeweils die verschobenen Punktkoordinaten, die sich daraus ergeben.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 7.4 (r3zUPh)

Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und seines Gegenvektors.

a) A(1|0), B(3|4)
b) A(–1|3), B(–1|1)
c) A(4|0), B(3|1)
d) A(2,1|1,1), B(0|1)
e) A(–1|2), B(0|2)
f) A(–1|–2), B(3|2)

Aufgabe 7.5 (Zurd9r)

Der Punkt P wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ auf den Punkt Q abgebildet. Bestimmen Sie anhand einer Zeichnung in einem zweidimensionalen Koordinatensystem den Punkt Q und berechnen Sie anschließend seine Koordinaten.

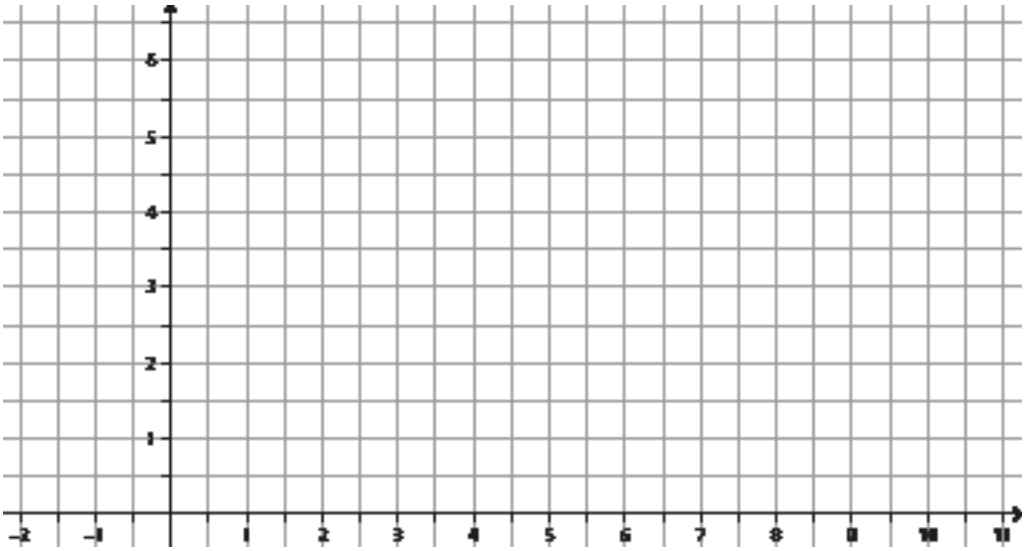
a) P(2|5)
b) P(0|0)
c) P(–3|0)
d) P(–4|6)

Abbildung
"Bildet Punkt A auf Punkt B ab" bedeutet nichts anderes als "Punkt A soll mit einem Vektor zu Punkt B verschoben werden".

Aufgabe 7.6 (LrbgU6)

Zeichnen Sie die Vierecke ABCD in das unten stehende Koordinatensystem und überprüfen Sie mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, ob es sich um ein Parallelogramm handelt. Begründen Sie Ihre Antwort.

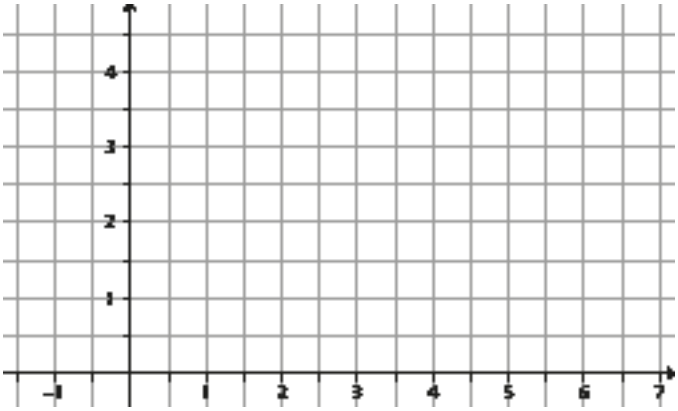
a) A(–2|2), B(5|5), C(9|6), D(2|3)
b) A(2|0), B(4|3), C(11|6), D(9|2)



Aufgabe 7.7 (Uk8gtv)

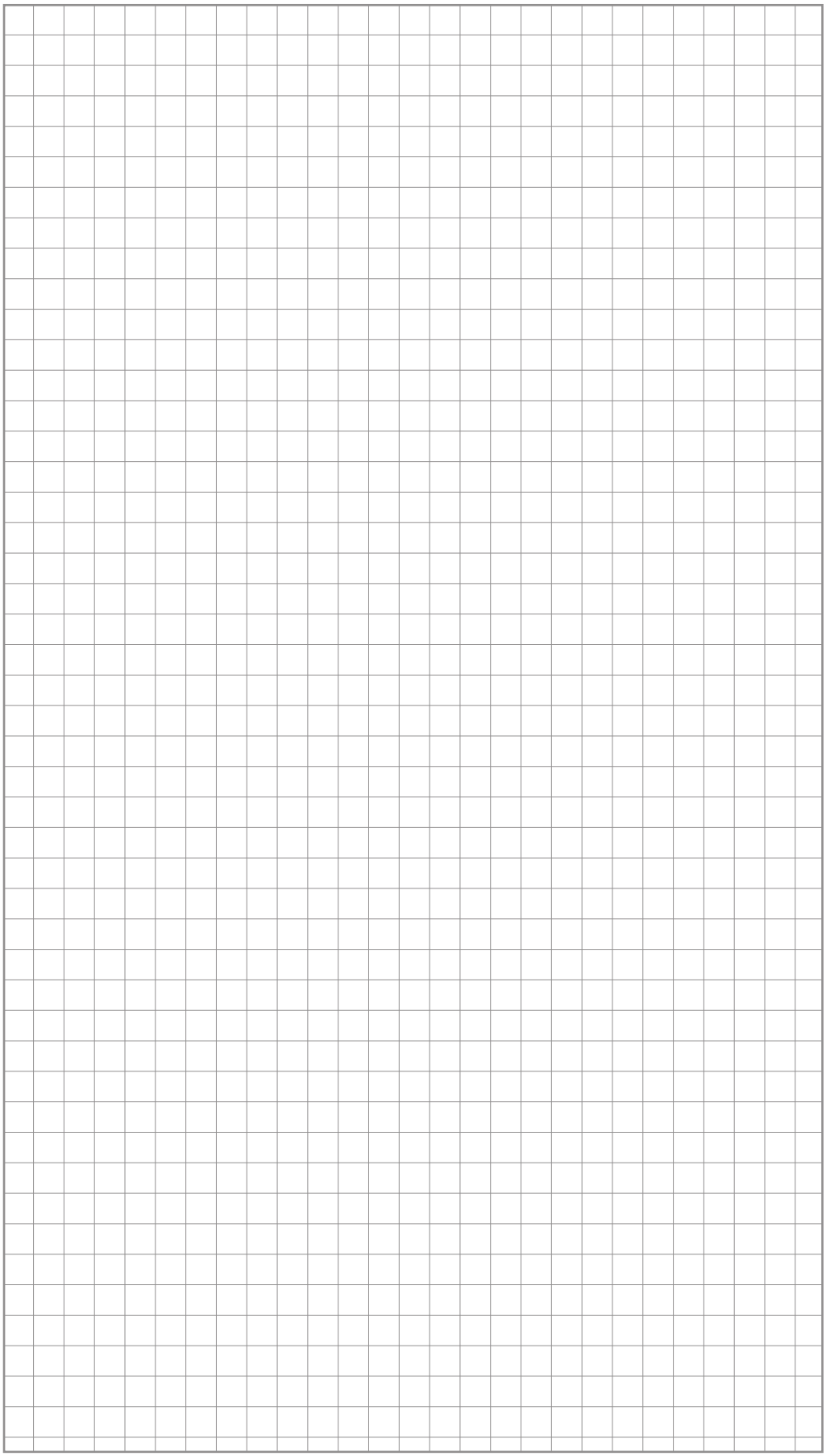
Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(–1|1), B(4|2), C(1|3) sowie der Punkt Z(2|1).

a) Das Dreieck ABC wird durch Verschiebung um den Ortsvektor $\overrightarrow{OZ}$ auf das Dreieck A'B'C' abgebildet. Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A', B' und C'.
b) Zeichnen Sie beide Dreiecke in das unten stehende Koordinatensystem.
c) Zeigen Sie mit Hilfe von Vektoren, dass das Viereck ABB'A' ein Parallelogramm ist.

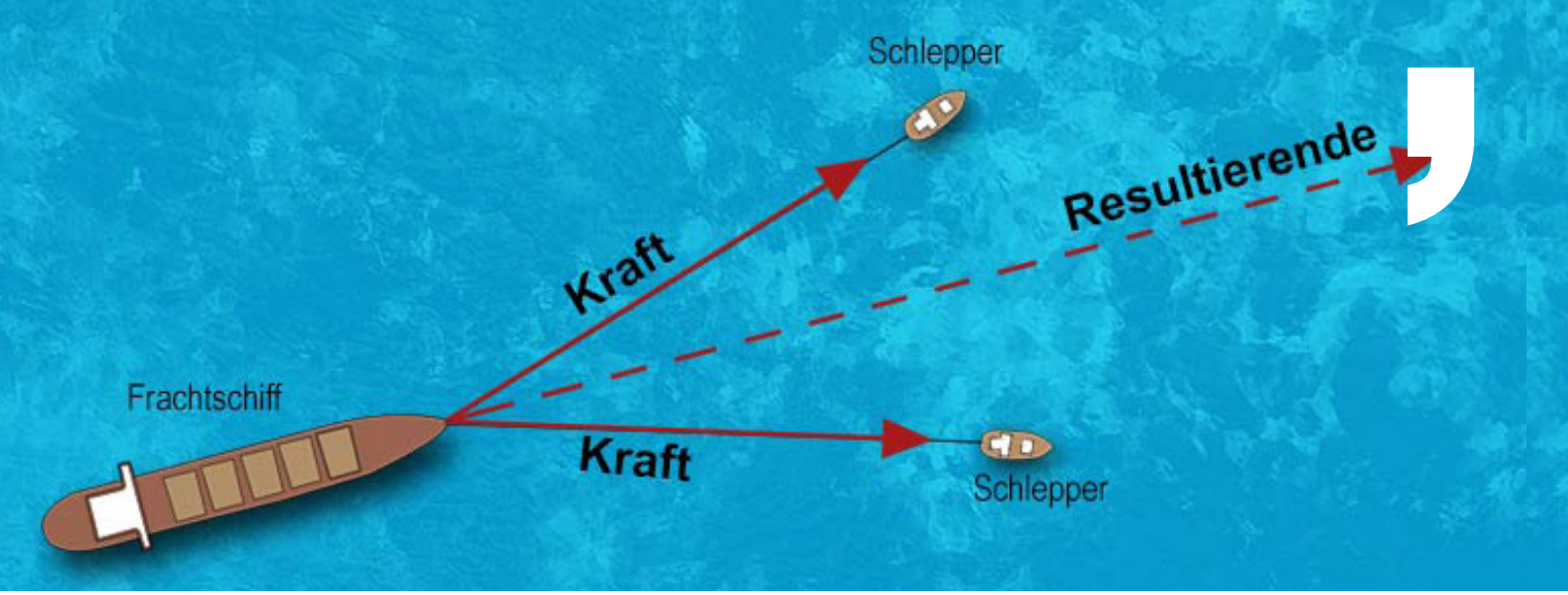


Hilfestellung

Sollten Sie bei den vorherigen Aufgaben Hilfe benötigen, können Sie dies hier notieren:

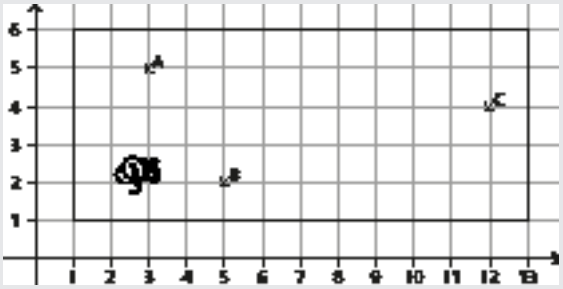


DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.2 RECHNEN MIT VEKTOREN

Situationsbeschreibung
Eine computergesteuerte Maus, die für Spionagezwecke in Regierungsgebäuden entwickelt wurde, kann jede Position innerhalb des umrandeten Testbereichs erreichen. Die Befehle hierzu heißen: "Gehe i_1 Einheiten in x_1-Richtung und i_2 Einheiten in x_2-Richtung".

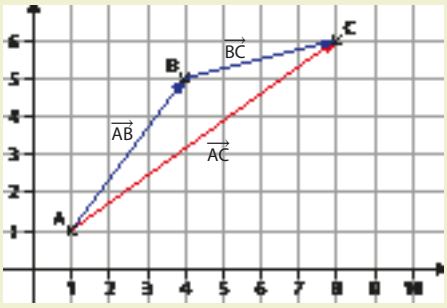


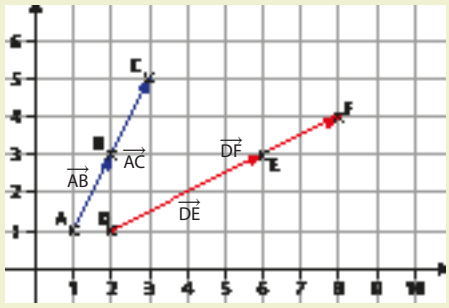
Aufgabe 7.8 (eyZByh)

a) Wie lauten die Befehle für die Bewegung der Spionagemaus von A nach B, von B nach C und von A nach C?

b) Finden Sie einen rechnerischen Zusammenhang zwischen den drei Verbindungsvektoren.

Addition und Skalarmultiplikation von Vektoren
Mit Vektoren können Sie genau so rechnen, wie mit Zahlen. Sie können addiert (**Vektoraddition**) und mit reellen Zahlen multipliziert (**Skalarmultiplikation**) werden.





Durch das "Aneinandersetzen" der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ erhalten Sie den Vektor $\overrightarrow{AC}$; dies wird als **Vektoraddition** (linkes Bild) bezeichnet: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+4\\4+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$

Vektoren können durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl, dem sogenannten Skalar, "verlängert" werden; dies wird als **Skalarmultiplikation** (rechtes Bild) bezeichnet:

$\overrightarrow{AB} = 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AC} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5 \cdot 2\\0{,}5 \cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{DF} = 1{,}5 \cdot \overrightarrow{DE} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5 \cdot 4\\1{,}5 \cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.9 **(QzukQe)**
Berechnen Sie die folgenden Vektoradditionen und Skalarmultiplikationen.

a) $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}8\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9\\4\end{pmatrix}$ e) $-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}$ d) $5\cdot\begin{pmatrix}-9\\2\end{pmatrix}$ f) $0{,}4\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.10 **(FVugLG)**
Schreiben Sie den Vektor als Produkt aus einem beliebigen Skalar und einem Vektor mit ganzzahligen Koordinaten.

a) $\begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}39\\-52\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\2\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{5}{6}\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}0{,}4\\-1{,}8\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.11 **(c1ra2D)**
Führen Sie die folgenden Rechnungen aus.

a) $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1{,}5\\1\end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}-10\\12\end{pmatrix}$ c) $0{,}4\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+\frac{3}{5}\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

Rechengesetze
Bei der Vektoraddition und Skalarmultiplikation gilt das Kommutativ-, Distributiv- und Assoziativgesetz (siehe Seite 20)

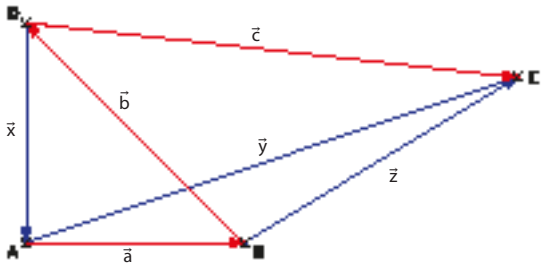
Aufgabe 7.12 **(pKPw9D)**
Vereinfachen Sie so weit wie möglich durch Faktorisieren und Zusammenfassen.

a) $7\vec{a}+5\vec{a}$
b) $13\vec{c}-\vec{c}+6\vec{c}$
c) $3\vec{d}-4\vec{e}+7\vec{d}-6\vec{e}$
d) $2{,}5\vec{u}-3{,}7\vec{v}-5{,}2\vec{u}+\vec{v}$
e) $2(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}$
f) $-3(\vec{x}+\vec{y})$
g) $-(\vec{u}-\vec{v})$
h) $3(\vec{a}+2(\vec{a}+\vec{b}))$
i) $6(\vec{a}-\vec{b})+4(\vec{a}+\vec{b})$

Aufgabe 7.13 **(9iXSKp)**
Zeichnen Sie die Punkte in ein Koordinatensystem. Spiegeln Sie Punkt A an Punkt Z, so erhalten Sie den Punkt A'. Bestimmen Sie die Koordinaten des fehlenden Punktes.

a) A(2|2), Z(4|–4) b) A(–1|5), A'(3|1) c) Z(2|–3), A'(4|1)

Aufgabe 7.14 **(hH32Ra)**
Drücken Sie die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ und $\vec{z}$ als Kombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



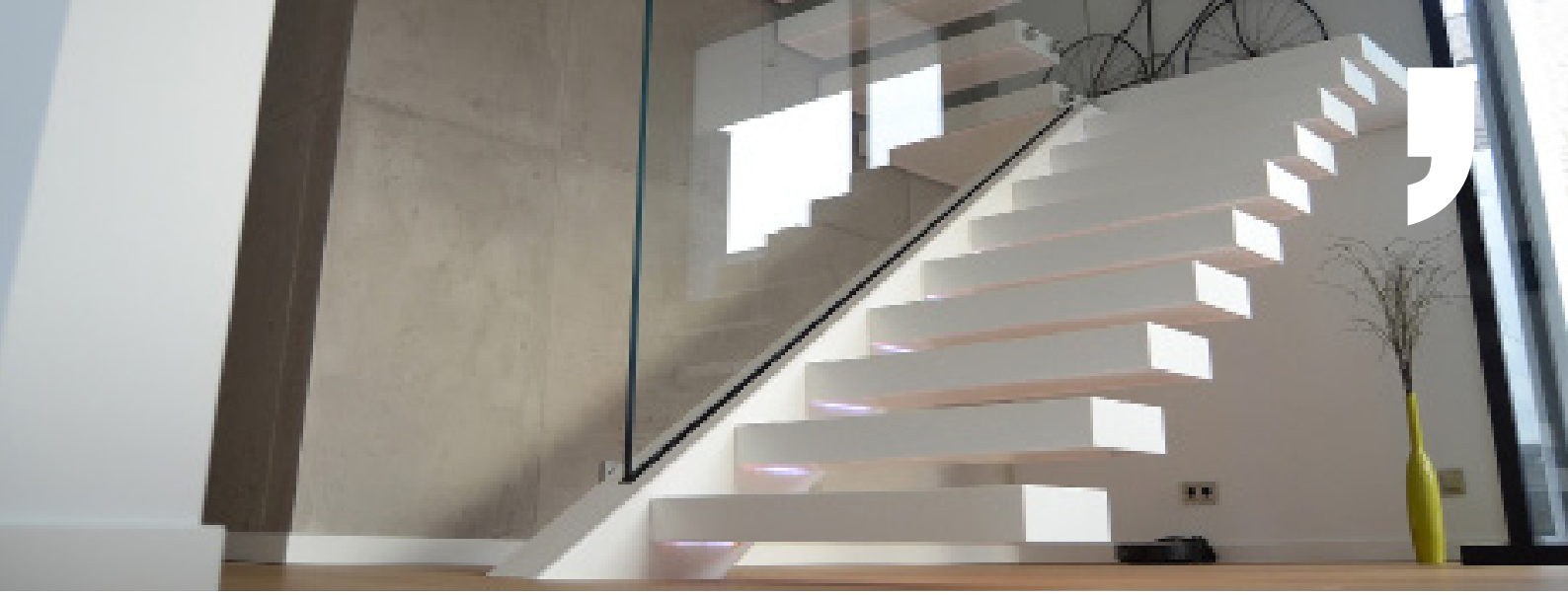
Aufgabe 7.15 **(YFNV4E)**
Bestimmen Sie, falls möglich, eine reelle Zahl x, sodass gilt:

a) $\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}x\\1{,}5\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.16 **(BpT6HN)**
Bestimmen Sie, falls möglich, eine reelle Zahl r und s, sodass gilt:

a) $\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.3 PUNKTE UND VEKTOREN IM RAUM

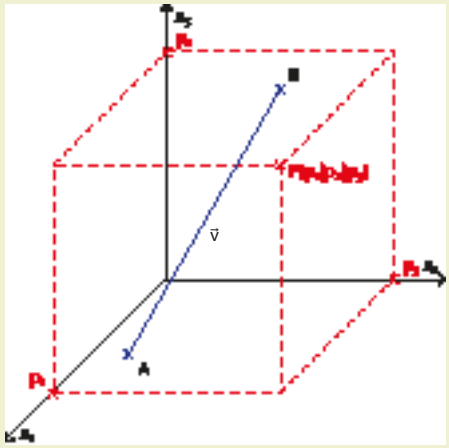
Das dreidimensionale Koordinatensystem

Um Geraden, Flächen und Körper im Dreidimensionalen darstellen zu können, benötigen Sie eine dritte Koordinatenachse. Hierbei wird die x_2-Achse von links nach rechts, die x_3-Achse von unten nach oben und die x_1-Achse im 45°-Winkel von oben rechts nach unten links gezeichnet.

Koordinatensysteme
Es gibt unterschiedliche Darstellungsformen für dreidimensionale Koordinatensysteme.

Das hier beschriebene System wird als 1-1-Koordinatensystem bezeichnet.

Die von je zwei Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen nennen Sie **Koordinatenebenen** und bezeichnen sie mit x_1x_2-Ebene, x_2x_3-Ebene bzw. x_1x_3-Ebene.



Da es nun drei Achsen gibt, sind auch drei Koordinaten nötig, um einen Punkt im Raum zu beschreiben und schreibt z. B. $P(p_1|p_2|p_3)$.
Ein Vektor im Raum benötigt natürlich auch drei Koordinaten und Sie schreiben beispielsweise für den Vektor $\vec{v}$ von A nach B:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

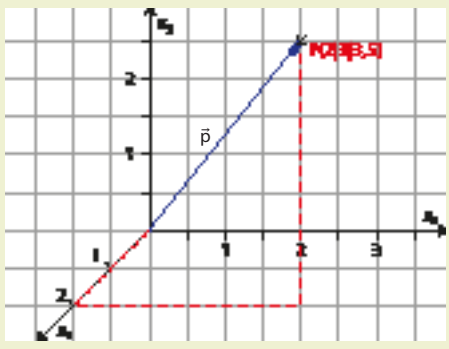
Dabei gibt der Wert v_1 die Einheiten in Richtung der x_1-Achse, v_2 die Einheiten in Richtung der x_2-Achse und v_3 die Einheiten in Richtung der x_3-Achse an.

Rechnen mit Vektoren im Raum

Die Vektoraddition und Skalarmultiplikation, die Sie in den vorherigen Kapitel im ebenen Koordinatensystem gelernt haben, lassen sich durch Hinzunahme der dritten Koordinate auf Vektoren im räumlichen Koordinatensystem übertragen.

Zeichnen des räumlichen Koordinatensystems

Die Einheit der x_1-Achse beträgt ein Kästchen und die Einheit der x_2 und x_3-Achse jeweils 2 Kästchen. So können Sie beispielsweise den Punkt P(2|3|3,5) und somit natürlich auch den zugehörigen Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$ einzeichnen.



Die hier gestrichelten Linien zeichnen Sie jedoch nicht ein, sondern sollen nur der Orientierung im Koordinatensystem dienen.

Aufgabe 7.17 (Uk9r4j)

Zeichnen Sie die in a) gegebenen Punkte in ein dreidimensionales Koordinatensystem auf dem gegebenen Kästchenpapier.

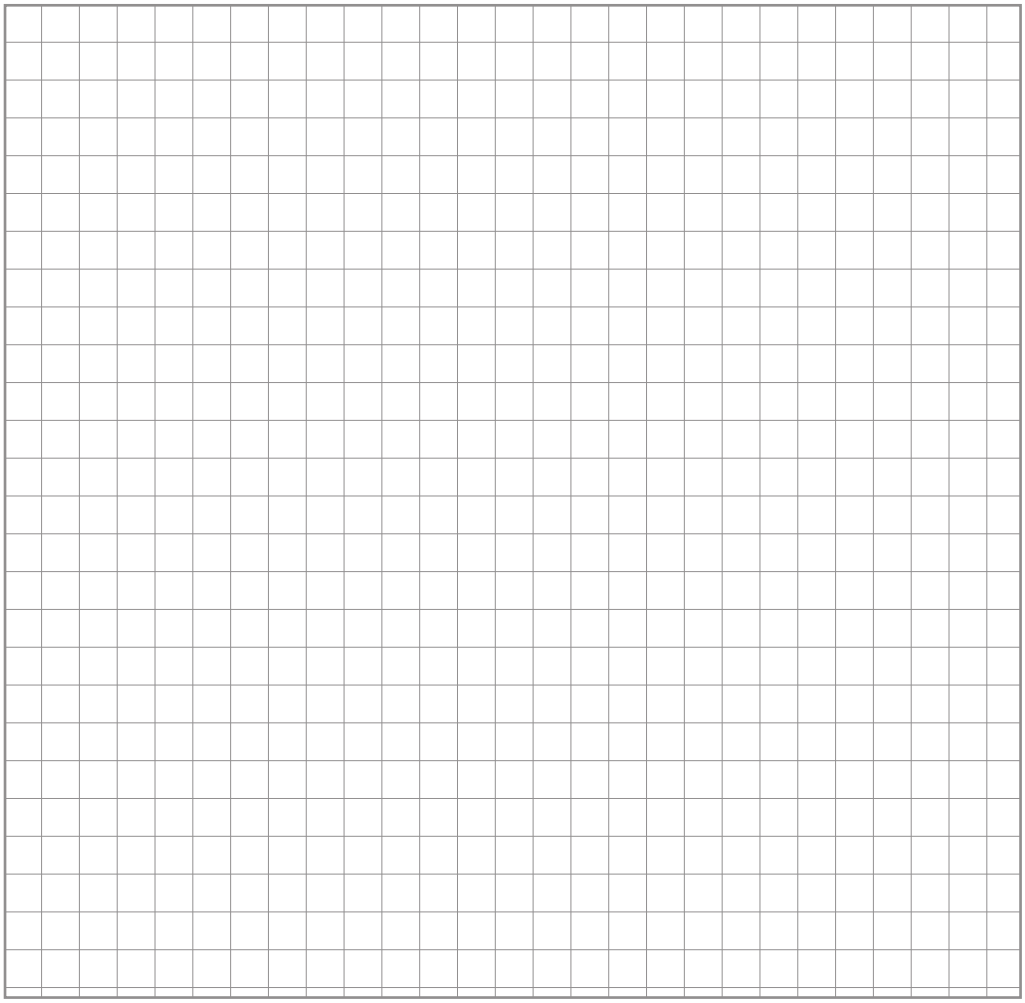
a) A(4|3|1), B(4|6|1), C(4|3|7)

b) Zeichnen Sie einen Punkt D ein, damit ein Rechteck entsteht. Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an.

c) Bestimmen Sie den Vektor der Diagonalen $\overrightarrow{BC}$.

d) Geben Sie die Koordinaten des Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$ an.

e) Geben Sie die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{b}$ an.



Aufgabe 7.18 (gdNtjU)

Gegeben sind die Punkte A(1|2|3), B(3|–2|1), C(2,25|–1,3|7), D(0,25|2,7|9). Es handelt sich um ein Parallelogramm, sofern $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gilt. Überprüfen Sie dies.

Aufgabe 7.19 (yzTZkN)

a) Zeichnen Sie die Punkte A(2|3|4), B(–2|0|1), C(3|–1|0) und D(0|0|–3) und die zugehörigen Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ in ein Koordinatensystem.

b) Geben Sie Koordinaten von drei Punkten P, Q und R an, die zwar beim Zeichnen an der gleichen Stelle liegen wie der Punkt A, aber dazu völlig verschiedene Koordinaten haben.

Aufgabe 7.20 (SFUUmL)

Wo liegen im räumlichen Koordinatensystem alle Ortsvektoren, bei denen

a) eine der x_1-, x_2- oder x_3-Koordinaten den Wert 0 hat?

b) zwei der der x_1-, x_2- oder x_3-Koordinaten den Wert 0 hat?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.4 BETRAG EINES VEKTORS und EINHEITSVEKTOR

Halteseile eines Sendemastens

Die Halteseile (Abspannseile) eines Sendemastens wie sie rechts im Bild zu sehen sind, werden als Pardunen bezeichnet. Meist werden Pardunen in drei Richtungen gespannt, die von oben gesehen um 120 Grad gegeneinander versetzt sind. Je nach Masthöhe müssen Pardunen oft in mehreren Höhen installiert werden, um ein seitliches Durchbiegen des Mastes im Wind zu begrenzen. Am Boden werden die Pardunen meist mit massiven Betonfundamenten verankert.
Mit Hilfe von Vektoren lassen sich nun zum einen die Längen der Pardunen bestimmen, als auch deren Verlauf im Raum mit einer Geradengleichung angeben.



Betrag eines Vektors

Der sogenannte Betrag eines Vektors beschreibt dessen Länge. Die Berechnung ist vom Prinzip her identisch mit dem Satz des Pythagoras.

In einem "normalen" zweidimensionalen und rechtwinkligen Dreieck, mit Seite c als Hypotenuse gilt nämlich $c^2 = a^2 + b^2$ und somit $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Für den Betrag des zweidimensionalen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ gilt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Für den Betrag des dreidimensionalen Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Einheitsvektor

Ein Vektor $\vec{a}$ hat meistens nicht die Länge 1. Manchmal kann es aber durchaus sinnvoll sein, einen Vektor mit dem Betrag 1 anzugeben. Das heißt, die Richtung des Vektors bleibt gleich, doch er hat die Länge 1.
Diesen Einheitsvektor $\vec{a}_0$ berechnen Sie mit $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Beispiel

Betrachten Sie den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Sie erhalten für den Betrag: $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29} \approx 5{,}39$

Und für den Einheitsvektor: $\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}371 \\ 0{,}557 \\ 0{,}742 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.21 (nzU7YJ)
Berechnen Sie den Betrag der einzelnen Vektoren.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.22 (69qqRB)
Untersuchen Sie, ob das Dreieck gleichschenklig ist.

a) A(–1|5), B(0|3), C(–8|2)
b) A(–1|7), B(8|–2), C(–5|–6)
c) A(1|–2|2), B(3|2|1), C(2|0|3)
d) A(7|0|–1), B(5|–3|–1), C(4|0|1)

Aufgabe 7.23 (4AV3QH)
Bestimmen Sie den Einheitsvektor.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
b) $\overrightarrow{AB}$ mit A(4|5), B(–8|0)
c) Ortsvektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$
d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
e) $\overrightarrow{CD}$ mit C(5|–7|2), D(9|7|5)
f) Ortsvektor $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.24 (4Bw4Wv)
Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektor $\overrightarrow{AB}$ und seines Gegenvektor. Bestimmen Sie weiterhin für die Teilaufgaben a), b) und c) den Betrag des Vektors und den Einheitsvektor.

a) A(1|0|1), B(3|4|1)
b) A(–1|2|3), B(2|–2|4)
c) A(1|–4|–3), B(7|2|–4)
d) A(4|2|0), B(3|3|3)
e) A(4|2|–1), B(5|–1|–3)
f) A(2,5|1|–3), B(4|–3,3|2)

Merke
Bei einem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Vektoren gleich.

Aufgabe 7.25 (tQtHhP)
Überprüfen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist. Bestimmen Sie jeweils die Seitenlängen der Parallelogramme.

a) A(–2|2|3), B(5|5|5), C(9|6|5), D(2|3|3)
b) A(2|0|3), B(4|4|4), C(11|7|9), D(9|3|8)
c) A(2|–2|7), B(6|5|1), C(1|–1|1), D(8|0|8)
d) A(3|2|1), B(7|–3|4), C(0|5|–6), D(–4|10|–9)

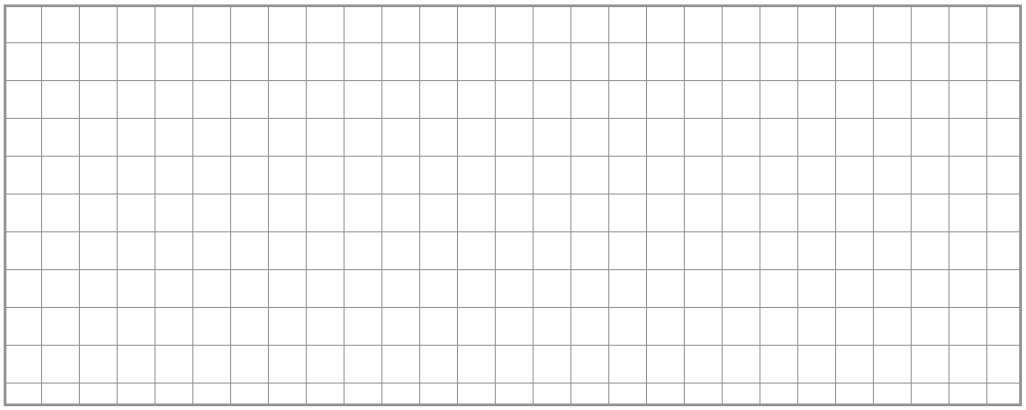
Aufgabe 7.26 (zF93RS)
Bestimmen Sie die Koordinaten von D, sodass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

a) A(–1|1|3), B(2|–1|–1), C(3|3|–2)
b) A(21|–11|43), B(3|7|–8), C(0|4|5)
c) A(–75|199|–67), B(35|0|–81), C(1|2|3)
d) A(3|–4|2), B(5|8|–2), C(–4|6|7)

Aufgabe 7.27 (nKLWii)
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

a) A(1|–5), B(0|3), C(–8|2)
b) A(2|3|5), B(6|6|0), C(2|8|0)
c) A(1|1|6), B(3|3|–2), C(5|–1|2)
d) A(7|0|–1), B(5|–3|–1), C(4|0|1)

Hilfestellung
Sollten Sie bei den vorherigen Aufgaben Hilfe benötigen, können Sie dies hier notieren:



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.5 NORMALENVEKTOR und WINKEL ZWISCHEN VEKTOREN

Skalarprodukt

Um den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen zu können, müssen Sie sich zunächst eine neue Rechenart anschauen: das sogenannte Skalarprodukt

Bis jetzt konnten Sie Vektoren addieren und Vektoren mit einem Skalar (einer Zahl) multiplizieren. Mit dem Skalarprodukt können Sie zwei Vektoren miteinander multiplizieren:

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

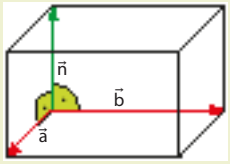
Wenn das Skalarprodukt Null ergibt, so sind die Vektoren rechtwinklig zueinander; Sie bezeichnen dies in der Mathematik als **orthogonal**.

Orthogonalität
orthogonal = rechtwinklig

Normalenvektor

Ist ein Vektor $\vec{n}$ orthogonal zu zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so nennen Sie $\vec{n}$ einen Normalenvektor von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Um $\vec{n}$ zu bestimmen, verwenden Sie das sogenannte **Kreuzprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$



Beispiel zur Berechnung eines Normalenvektors

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 4 \\ 2 - 1 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit steht der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht auf den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Winkel zwischen zwei Vektoren

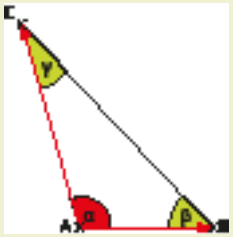
Unter dem Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verstehen Sie den kleineren der beiden Winkel, der entsteht, wenn Sie die Pfeile der Vektoren zu einem gemeinsamen Anfangspunkt zeichnen.

Für den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{mit } 0° \leq \alpha \leq 180°$$

Mehr zu Winkeln
Mehr zu Winkelberechnungen finden Sie auf Seite 245.

Ⓑ



Beispiel zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren

Gegeben ist das Dreieck ABC mit A(1|–1|–5|), B(3|2|–4), C(2|–1|–9). Für den Winkel α gilt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}\right|} = \frac{2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-4)^2}} = \frac{2+0-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{17}} = \frac{-2}{\sqrt{238}} \approx -0{,}1296$$

Es gilt also $\cos(\alpha) = -0{,}1296$ und somit für den Winkel $\alpha = \cos^{-1}(-0{,}1296) \approx$ **97,45°**.

Aufgabe 7.28 (9SZbUq)

Schauen Sie sich das obige Beispiel an.

a) Berechnen Sie die übrigen Winkel β und γ.

b) Wie können Sie γ nur mit Hilfe der Winkel α und β bestimmen?

Aufgabe 7.29 (cpyqZe)

a) Berechnen Sie $\vec{a} * \vec{b}$, $\vec{a} * \vec{c}$, $\vec{a} * \vec{d}$, $\vec{a} * \vec{e}$, $\vec{b} * \vec{c}$, $\vec{b} * \vec{d}$, $\vec{b} * \vec{e}$, $\vec{c} * \vec{d}$, $\vec{c} * \vec{e}$, $\vec{d} * \vec{e}$ für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{e} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

b) Welche der Vektoren sind zueinander orthogonal?

Aufgabe 7.30 (Ajvv22)

Drücken Sie die Diagonalen des Vierecks ABCD mit A(–2|–2), B(3|0), C(3|3) und D(0|3) durch Vektoren aus. Sind sie zueinander orthogonal?

Aufgabe 7.31 (UHJmRb)

Prüfen Sie, ob das Dreieck ABC in einem der Punkte rechtwinklig ist.

a) A(3|4|2), B(2|0|3), C(1|2|1) b) A(–1|2|5), B(3|–2|4), C(5|1|3)

Aufgabe 7.32 (bLu3nF)

Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass $\vec{a}$ orthogonal zu $\vec{b}$ ist.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\4\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\a_2\\3\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\0\\b_3\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.33 (bt4EAX)

Bestimmen Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.34 (UE4xKL)

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.35 (k9CCTK)

Bestimmen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Winkel im Dreieck ABC. Zeichnen Sie für die Teilaufgabe a) das Dreieck und messen Sie nach.

a) A(2|1), B(5|–1), C(4|3) b) A(5|0|4), B(3|0|0), C(5|4|0) c) A(5|1|5), B(5|5|3), C(3|3|5)

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

7.6 GERADEN IM RAUM und ABSTAND PUNKT-GERADE

Sie können selbstverständlich nicht nur Punkte im Raum beschreiben, sondern auch Geraden mithilfe von Vektoren darstellen. Dazu benötigen Sie einen Vektor, der vom Koordinatenursprung auf einen Punkt der Gerade zeigt und einen zweiten Vektor, der von dort aus die Richtung der Geraden angibt.

Definition

Jede Gerade g lässt sich durch eine Gleichung der Form

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

beschreiben. Hierbei ist $\vec{p}$ ein **Stützvektor** und $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{o}$) ein **Richtungsvektor** von g. Diese Schreibweise nennen Sie **Geradengleichung in Parameterform** (mit dem Parameter t).

ⓘ

Stützvektor
Ein Stützvektor ist ein Ortsvektor zu einem Punkt der Geraden.

Beispiel

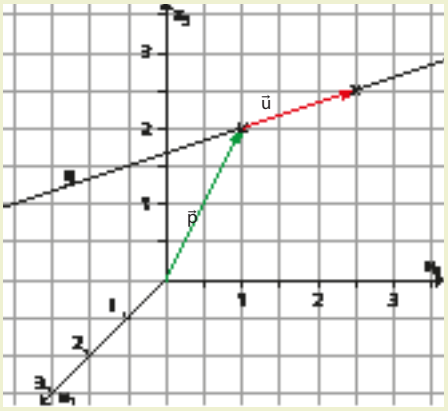
In der rechten Grafik sehen Sie den Ortsvektor

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zusammen ergeben sie die Geradengleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Je nachdem, welchen Wert Sie für den Parameter t wählen, können Sie jeden Punkt auf der Geraden g erreichen.



Ⓑ

YouTube

Aufgabe 7.36 (9qMt8X)

In Bezug auf das obige Beispiel:

a) Welche Koordinaten hat der Punkt an der Pfeilspitze des Vektors $\vec{u}$? Von welchem Parameter gehen Sie dabei aus?
b) Zu welchem Punkt gelangen Sie mit dem Parameter t = –2.
c) Zeichnen Sie den Ortsvektor und den "Weg" (mit gestrichelten Linien - so wie im unteren Beispiel auf Seite 221) zu dem Punkt aus b) in das obige Koordinatensystem ein.

Aufgabe 7.37 (LxJBhb)

Gegeben sind die Punkte A(3|2|5) und B(2|1|4).

a) Bestimmen Sie eine mögliche Geradengleichung, die durch diese beiden Punkte verläuft.
b) Zu welchem Punkt gelangen Sie mit dem Parameter t = 2.
c) Stellen Sie eine zweite Geradengleichung auf, welche dieselbe Gerade beschreibt.

ⓘ **Punktprobe**

Sie gehen von den folgenden Punkten einer Geraden aus: A(1|–2|5), B(4|6|–2)

Damit erhalten Sie die folgende Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$

Nun soll überprüft werden, ob der Punkt C(–5|–18|19) auf der Geraden liegt. Ist dies der Fall, muss es eine reelle Zahl t geben, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Aus der "ersten Zeile" $1 + 3t = -5$ erhalten Sie durch Umstellen $t = -2$. Damit gilt (t eingesetzt in die zweite und dritte Zeile) $-2 + (-2) \cdot 8 = -18$ und $5 + (-2) \cdot (-7) = 19$.
Die Ergebnisse entsprechen der zweiten und dritten Koordinaten des Punktes, weshalb der Punkt C auf der Geraden liegt.

Aufgabe 7.38 (RQzHU5)

Prüfen Sie, ob die Punkte A bzw. B auf der Geraden g liegen, und geben Sie gegebenenfalls den Wert des zugehörigen Parameters an, um zu den Punkten zu gelangen.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, A(3|2), B(–1|7)

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, A(–1|0), B(2|3)

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, A(3|1|6), B(2|3|1)

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, A(1|2|4), B(6|2|9)

Aufgabe 7.39 (vZ32fw)

Geben Sie zu den Geraden durch die Punkte A und B, A und C sowie B und C jeweils eine Parametergleichung an.

a) A(2|7), B(1|4), C(–2|5) b) A(0|5|–4), B(6|3|1), C(9|–9|0) c) A(8|–1|1), B(4|5|–2), C(1|1|1)

Aufgabe 7.40 (kQpCkE)

Geben Sie zwei verschiedene Parametergleichungen der Geraden g an, die durch die Punkte A und B verläuft.

a) A(7|–3|–5), B(2|0|3) b) A(0|0|0), B(–6|13|25) c) A(12|–19|9), B(7|–3|–2)

Aufgabe 7.41 (KCpXFQ)

Zeichnen Sie die Geraden g_1 bis g_3 in ein zweidimensionales und die Geraden g_4 bis g_6 in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $g_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $g_6: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Abstand Punkt-Gerade

Gesucht ist der **Abstand** d(Q;g) vom Punkt Q(10|4|5) zur Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie der zugehörige **Lotfußpunkt** F.

Da Sie den Lotfußpunkt noch nicht exakt kennen, nehmen Sie zunächst an, er liegt irgendwo auf der Geraden g und hat die Koordinaten F(–3 – 2t | 4 + t | 1 + 2t). Unser Ziel ist es nun, den Koeffizienten t so zu bestimmen und somit den Punkt F so zu verschieben, dass der Verbindungsvektor von F zu Q orthogonal zur Geraden g ist.

Für den **Verbindungsvektor** gilt also:

$$\overrightarrow{FQ} = \vec{q} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3-2t \\ 4+t \\ 1+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13+2t \\ -t \\ 4-2t \end{pmatrix}$$

Den Koeffizienten t wählen Sie für den Vektor $\overrightarrow{FQ}$ nun so, dass er zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden g **orthogonal** ist. Es muss demnach gelten:

$$\overrightarrow{FQ} \cdot \vec{u} = 0 \qquad 0 = \begin{pmatrix} 13+2t \\ -t \\ 4-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-26-4t) + (-t) + (8-4t) = -26-4t-t+8-4t = -18-9t$$

woraus t = –2 folgt.
Eingesetzt in F ergibt dies den **Lotfußpunkt** F(1|2|–3).

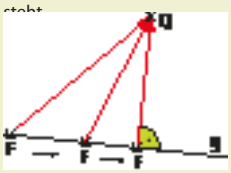
Für den **Abstand** Gerade-Punkt müssen Sie nur noch die Länge des Vektors $\overrightarrow{FQ}$ bestimmen:

$\overrightarrow{FQ} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, damit erhalten Sie $|\overrightarrow{FQ}| = \sqrt{81+4+64} = \sqrt{149} = \mathbf{12{,}2}$

Für den Abstand des Punktes Q zur Geraden g gilt also d(Q;g) = 12,2.

Lotfußpunkt

Der Lotfußpunkt ist der Punkt auf der Geraden, dessen Verbindungsvektor mit Q orthogonal zur Geraden steht.



YouTube

Formel

Mit dem Punkt P und der Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}$ kann der Abstand Punkt-Gerade auch mit folgender Formel bestimmt werden:

$$d(P,g) = \frac{|(\vec{p} - \vec{a}) \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

Aufgabe 7.42 (9Wrktn)

Berechnen Sie den Abstand des Punktes Q zur Geraden g.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, Q(5|–8)

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, Q(–1|0)

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, Q(2|3|–1)

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, Q(–3|1|11)

Aufgabe 7.43 (1sPfBX)

Betrachten Sie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten zweier Punkte P und Q, die auf der Geraden g liegen.
b) Liegen die Punkte A(1|0|–7) und B(7|–5|14) auf der Geraden g?

Aufgabe 7.44 (dcpwK9)

Geben Sie je zwei Gleichungen der Geraden an, auf der die Punkte A und B liegen.

a) A(4|7), B(7|4)

b) A(1|2|3), B(3|2|1)

Aufgabe 7.45 (MKdK62)

Geben Sie für ein räumliches Koordinatensystem Gleichungen für die drei Geraden an, welche die Koordinatenachsen beschreiben.

Aufgabe 7.46 (rk6R8c)

Welche besonderen Geraden werden durch die Parametergleichungen beschrieben?

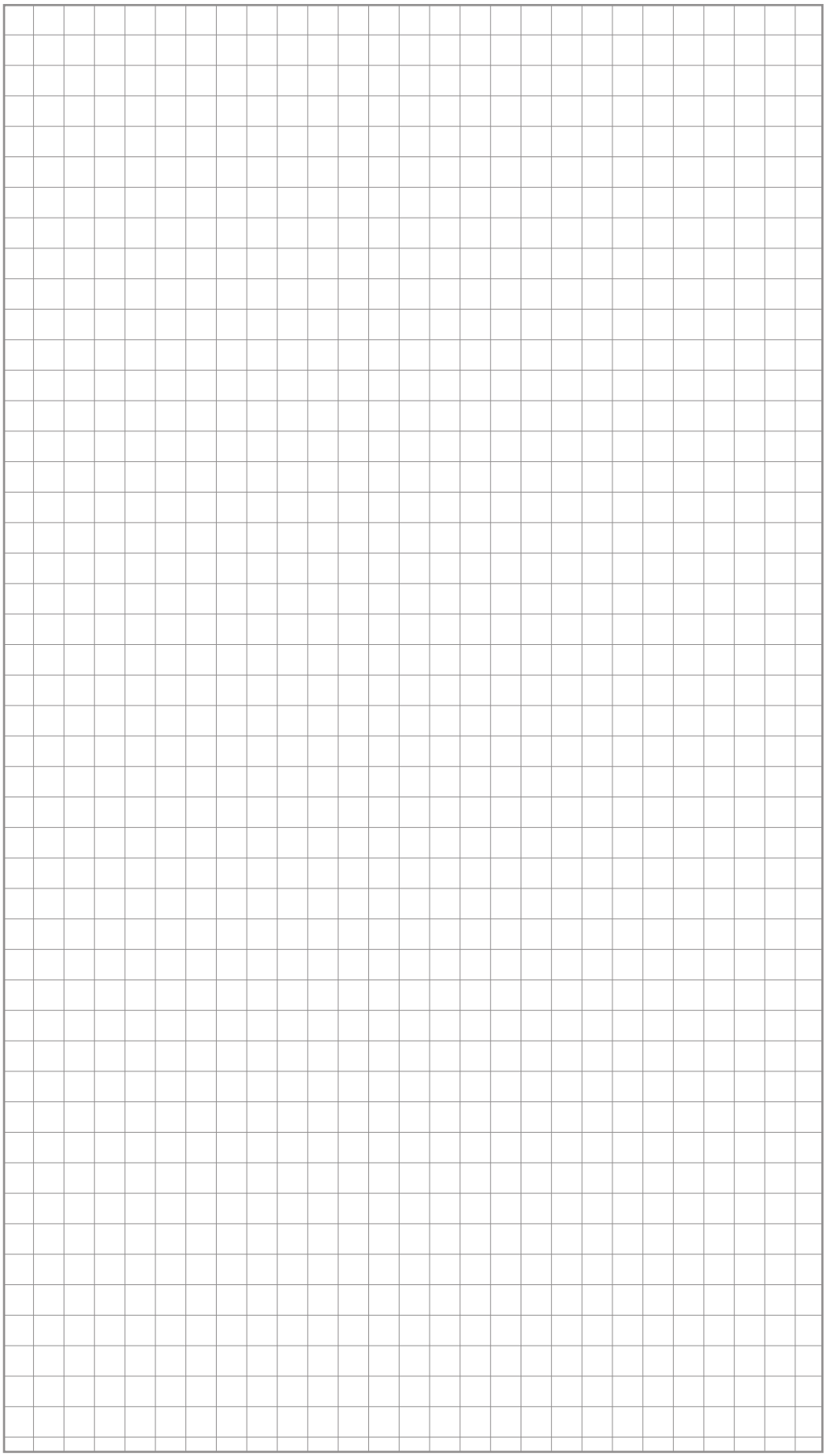
a) $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

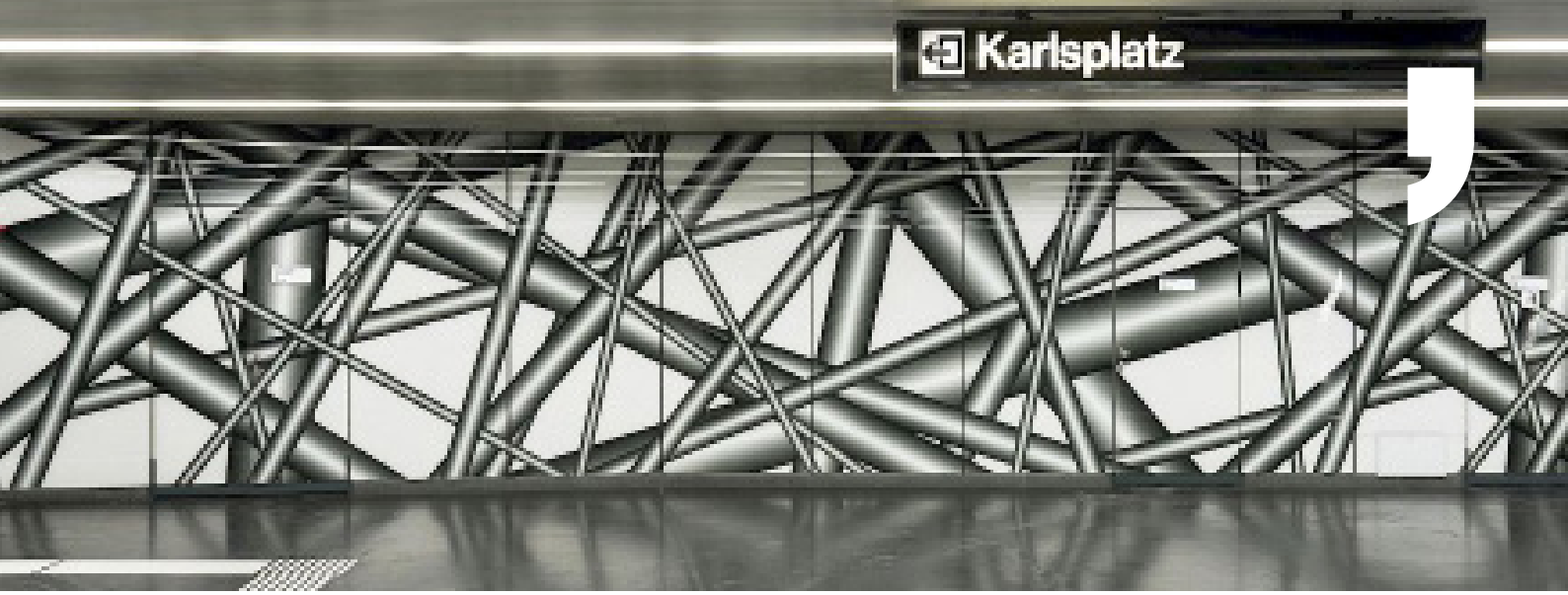
c) $g: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hilfestellung

Sollten Sie bei den vorherigen Aufgaben Hilfe benötigen, können Sie dies hier notieren:



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.7 LAGEBEZIEHUNG VON GERADEN IM RAUM

Wenn Sie sich an das Kapitel 3.6 "Lagebeziehung von Geraden" bei den lineare Funktionen erinnern, wissen Sie, dass Geraden im Zweidimensionalen einen Schnittpunkt haben, parallel oder identisch sein können.
Das können Geraden im Raum natürlich auch, doch hier kommt noch eine vierte Möglichkeit der gegenseitigen Lage hinzu: sie können windschief zueinander sein.

Zwei Geraden im Raum können …

1) … sich **schneiden**:
   Sie haben genau einen gemeinsamen Punkt, ihren Schnittpunkt.
2) … zueinander **parallel** sein:
   Sie haben dieselbe Richtung (die Richtungsvektoren müssen Vielfache voneinander sein), aber keinen gemeinsamen Punkt.
3) … **identisch** sein:
   Sie haben unendlich viele gemeinsame Punkte, weshalb ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.
4) … zueinander **windschief** sein:
   Sie sind nicht parallel zueinander, besitzen aber auch keinen gemeinsamen Punkt. Sie laufen aneinander vorbei.



So wie bei der Untersuchung der Lagebeziehung linearer Funktionen setzen Sie auch hier die Geradengleichungen $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ gleich, was zu einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen mit zwei Unbekannten führt. Anhand der Anzahl der Lösungen kann dann entschieden werden, welcher der oben genannten vier Fälle auf die beiden untersuchten Geraden zutrifft.

Anzahl der Lösungen geben Lage an
Die Gleichung $\vec{p} + r \cdot \vec{u} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$ besitzt …
… genau *eine Lösung*, dann haben die Geraden g und h **einen Schnittpunkt**.
… *keine Lösung* aber $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind *Vielfache* voneinander, dann sind g und h **parallel**.
… *unendlich viele Lösungen*, dann sind die Geraden g und h **identisch**.
… *keine Lösung*, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind *keine Vielfache* voneinander, dann sind g und h **windschief**.

ⓘ

YouTube

Bei den folgenden vier Beispielen handelt es sich eigentlich um immer die gleiche Rechnung. Erst im letzten Schritt (der Stufenform) erkennen Sie die Lage der Geraden.

Ⓑ **Beispiel (Schnittpunkt)**
Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

1. Gleichsetzen der Parameterdarstellungen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Allgemeine Hilfe zum Lösen von LGS, siehe Seite 121.

2. Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 1 + 2r = 2 + t \\ 2 + 4r = 1 + t \\ 3 + r = 8 + 2t \end{array} \quad \text{und durch Umformen folgt daraus} \quad \begin{array}{r} 2r - t = 1 \\ 4r - t = -1 \\ r - 2t = 5 \end{array}$$

3. Als Matrixschreibweise erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{array}\right)$$

Erst hier erkennen Sie die gegenseitige Lage.

4. Durch Umformung in Stufenform erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bestimmen Sie die Lösungen anhand der letzten Matrix selbstständig.

Damit hat das Gleichungssystem die **einzigen Lösungen** $r = -1$ und $t = -3$. Die Geraden g und h schneiden sich. Setzen Sie in die Parameterdarstellung von g die Zahl –1 für r bzw. von h die Zahl –3 für t ein, erhalten Sie den Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$. Der **Schnittpunkt** ist S(–1|–2|2).

Ⓑ **Beispiel (parallel)**
Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\6\\1{,}5\end{pmatrix}$

1. Gleichsetzen der Parameterdarstellungen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\6\\1{,}5\end{pmatrix}$$

2. Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 1 + 2r = 3t \\ 2 + 4r = 1 + 6t \\ 3 + r = 4 + 1{,}5t \end{array} \quad \text{und durch Umformen folgt daraus} \quad \begin{array}{r} 2r - 3t = -1 \\ 4r - 6t = -1 \\ r - 1{,}5t = 1 \end{array}$$

3. Als Matrixschreibweise erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & -1 \\ 1 & -1{,}5 & 1 \end{array}\right)$$

Erst hier erkennen Sie die gegenseitige Lage.

4. Durch Umformung in Stufenform erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung. Die Richtungsvektoren sind jedoch **Vielfache** voneinander (mit dem Faktor 1,5). Daher sind g und h **parallel** zueinander.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Beispiel (identisch) Ⓑ

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$

1. Gleichsetzen der Parameterdarstellungen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$$

2. Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 1 + 2r = 2 + 4t \\ 2 + 4r = 6 + 8t \\ 3 + \ \ r = 4 + 2t \end{array} \quad \text{und durch Umformen folgt daraus} \quad \begin{array}{r} 2r - 4t = 2 \\ 4r - 8t = 4 \\ r - 2t = 1 \end{array}$$

3. Als Matrixschreibweise erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 2 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

4. Durch Umformung in Stufenform erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Erst hier erkennen Sie die gegenseitige Lage.

Damit hat die ursprüngliche Vektorgleichung unendlich viele Lösungen, d. h. die Geraden g und h haben **unendlich** viele gemeinsame Punkte, sind also **identisch**.

Beispiel (windschief) Ⓑ

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

1. Gleichsetzen der Parameterdarstellungen:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

2. Daraus ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} 1 + 2r = 2 + t \\ 2 + 4r = 5 + t \\ 3 + \ \ r = 7 + t \end{array} \quad \text{und durch Umformen folgt daraus} \quad \begin{array}{r} 2r - t = 1 \\ 4r - t = 3 \\ r - t = 4 \end{array}$$

3. Als Matrixschreibweise erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

4. Durch Umformung in Stufenform erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

Erst hier erkennen Sie die gegenseitige Lage.

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung und auch die Richtungsvektoren sind **keine Vielfachen** voneinander. Daher sind die Geraden g und h **windschief** zueinander.

Aufgabe 7.47 (6Ys474)

Die Geraden g und h schneiden sich. Berechnen Sie den Schnittpunkt.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.48 (HLarsx)

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechnen Sie ggf. die Koordinaten des Schnittpunktes S.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.49 (tiTY8u)



Die Schnittpunkte der Geraden g, h und i sind die Eckpunkte des Dreiecks ABC. Berechnen Sie die Koordinaten von A, B und C.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$; $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}$

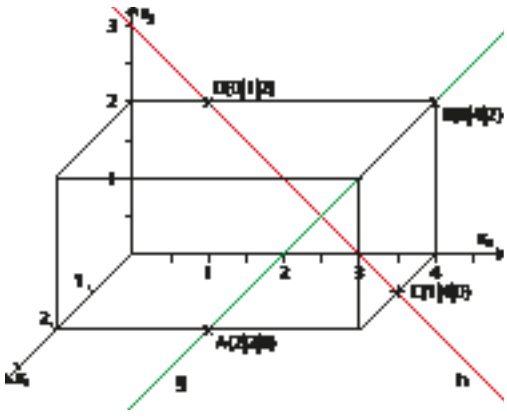
Aufgabe 7.50 (jrNxkm)

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der folgenden Geraden

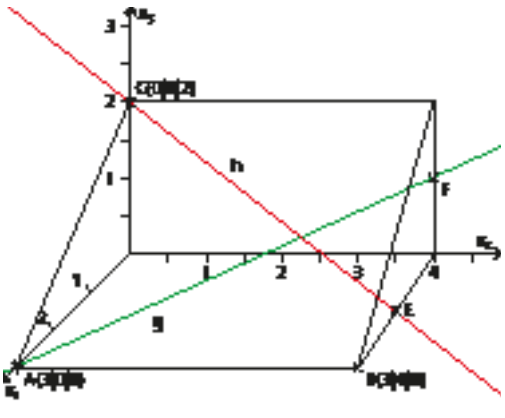
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.51 (wEGRh6)

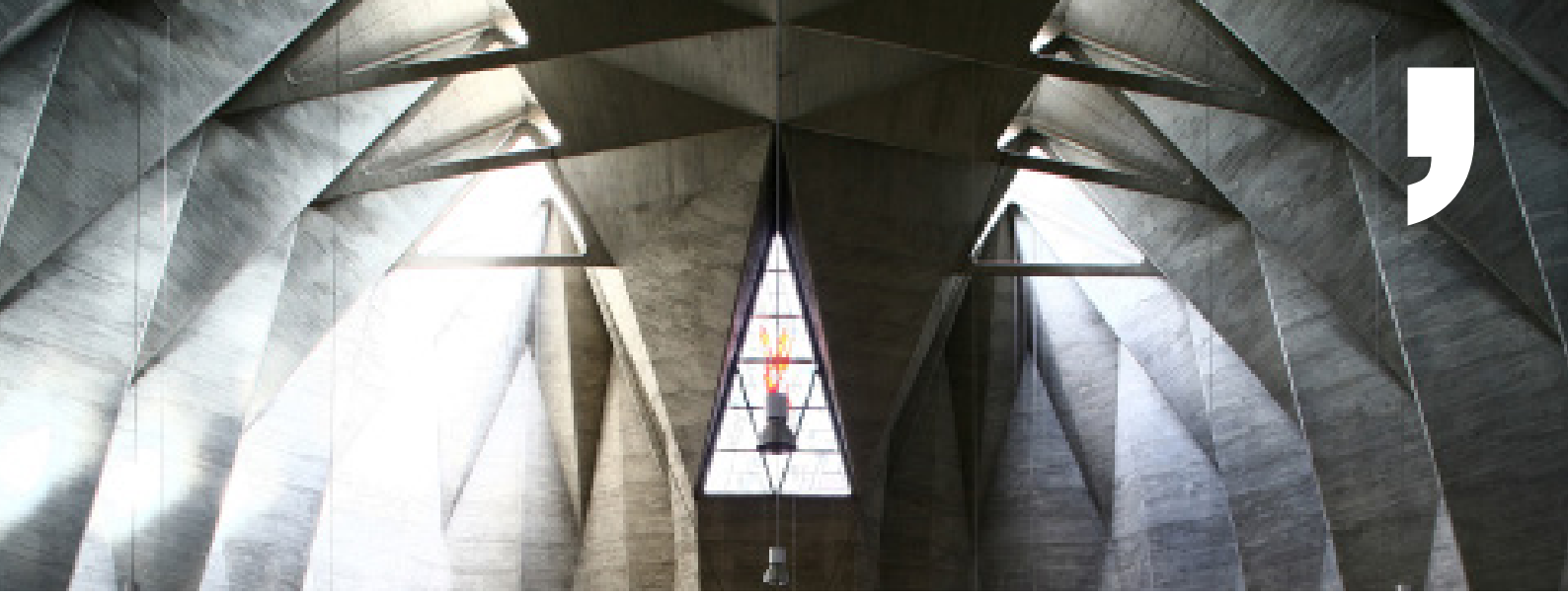
a) Geben Sie den Schnittpunkt von g und h an, sofern sich die Geraden schneiden.



b) Die Punkte E und F sind Kantenmitten. Geben Sie, falls vorhanden, den Schnittpunkt von g und h an.

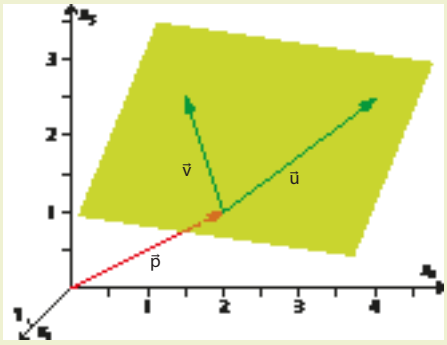


DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.8 EBENENGLEICHUNG

Mit Hilfe von Vektoren haben Sie nun auch die Möglichkeit, nicht nur Geraden, sondern auch Ebenen im Raum zu beschreiben.



Dazu benötigen Sie einen **Stützvektor** (hier $\vec{p}$) und zwei **Spannvektoren**. Der Stützvektor geht, genau wie bei Geraden auch, vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der Ebene. Von diesem Punkt ausgehend spannen die beiden Spannvektoren (hier $\vec{u}$ und $\vec{v}$) die Ebene im Raum auf.

Ebenengleichung in Parameterform
Jede Ebene lässt sich durch eine Gleichung der Form

$$E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

beschreiben. Hierbei ist $\vec{p}$ ein Stützvektor und $\vec{u}$, $\vec{v}$ sind zwei Spannvektoren. Die Spannvektoren dürfen keine Vielfachen voneinander sein.

ⓘ

Merke
Statt "Ebenengleichung in Parameterform" sagen Sie auch kurz "Parametergleichung"

Beispiel (Parametergleichung mit drei Punkten aufstellen)
Es seien die folgenden Punkte einer Ebene gegeben: A(1|3|2), B(2|0|1) und C(3|2|2).
Da Sie als Stützvektor nun den Vektor wählen können, der entweder zu A, oder zu B, oder zu C verläuft, haben Sie grundsätzlich die Möglichkeit, verschiedene Parametergleichungen aufzustellen, welche die selbe Ebene beschreiben.

Ⓑ

YouTube

Sie entscheiden sich hier z. B. für den Stützvektor zu A und erhalten somit $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Daraus ergeben sich die Spannvektoren $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sie erhalten also die Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Alternative Parametergleichungen mit dem Stützvektor zu B und C sähen z. B. so aus:

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ⓑ **Beispiel (Parametergleichung mit zwei sich schneidenden Geraden aufstellen)**

Gegeben sind die sich schneidenden Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Den Schnittpunkt selbst müssen Sie gar nicht zwingend ausrechnen. Wichtig ist aber, dass Sie wissen, dass sich die Geraden schneiden (das LGS also eine Lösung hat). Sobald Sie dies wissen, können Sie für den Stützvektor der Ebene einen der beiden Stützvektoren der Geraden g oder h verwenden. Und als Spannvektoren die Richtungsvektoren der Geraden.

Sie erhalten also als Parametergleichung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

Ⓑ **Beispiel (Parametergleichung mit zwei parallelen Geraden aufstellen)**

Gegeben sind die parallelen Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$

Als Stützvektor wählen Sie einen der beiden Stützvektoren von g oder h und als einen Spannvektor den Richtungsvektor der selben Geraden. Der Richtungsvektor der zweiten Gleichung eignet sich aufgrund der Parallelität nicht für den zweiten Spannvektor. Man wählt stattdessen den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ der beiden Stützvektoren von g und h.

Es ist $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$ und damit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$

Ⓑ **Beispiel (Parametergleichung mit einem Punkt und einer Geraden aufstellen)**

Gegeben ist ein Punkt $A(2|-1|1)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

Sie wählen als Stütz- und ersten Spannvektor der Ebene die entsprechenden Vektoren der Gerade g und für den zweiten Spannvektor den Verbindungsvektor von $\overrightarrow{PA}$.

Es ist $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ und somit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.52 (uW8LUu)

Die Ebene ist festgelegt durch A, B und C. Geben Sie jeweils zwei verschiedene Parametergleichungen an.

a) $A(2|0|3)$, $B(1|-1|5)$, $C(3|-2|0)$
b) $A(0|0|0)$, $B(2|1|5)$, $C(-3|1|-3)$
c) $A(1|1|1)$, $B(2|2|2)$, $C(-2|3|5)$
d) $A(2|5|7)$, $B(7|5|2)$, $C(1|2|3)$

Aufgabe 7.53 (aH2EfM)

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$.

a) Liegen die Punkte $A(8|3|4)$, $B(1|1|0)$, $C(4|0|11)$ in der Ebene E?
b) Bestimmen Sie für p eine Zahl so, dass der Punkt P in der Ebene liegt.
$P_1(4|1|p)$; $P_2(p|0|7)$; $P_3(p|2|-2)$; $P_4(0|p|p)$

Aufgabe 7.54 (4hxGTf)

Prüfen Sie, ob sich die beiden Geraden g_1 und g_2 schneiden. Geben Sie, falls möglich, eine Parametergleichung der Ebene an, die durch die Geraden g_1 und g_2 festgelegt wird.

$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Ebenengleichung in Koordinatenform ⓘ

Neben der Parameterdarstellung einer Ebene gibt es auch noch die Schreibweise in der sogenannten Koordinatenform. Anhand dieser kann zum einen sehr leicht überprüft werden, ob ein Punkt in der Ebene liegt oder nicht und zum anderen kann der Normalenvektor der Ebene direkt abgelesen werden (also der Vektor, der orthogonal zur Ebene steht).

Die **Koordinatengleichung** einer Ebene lautet: $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = a$
Sind bei zwei Koordinatengleichungen n_1, n_2 und n_3 Vielfache voneinander, so beschreiben sie die selbe Ebene.

Der zugehörige **Normalenvektor** zur Koordinatenform lautet: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Beispiel (von der Parametergleichung zur Koordinatengleichung) Ⓑ

Die Parametergleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll in die Koordinatenform umgewandelt werden. Die Umwandlung erfolgt in zwei kleinen Schritten:

1. Für den Normalenvektor bilden Sie das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren:

   $$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 4-2 \\ -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Dadurch erhalten Sie schon mal die folgende Koordinatenform:
   $E: -2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = a$

2. Was noch fehlt, ist der Wert für a. Dafür müssen Sie lediglich einen Punkt der Ebene in die Koordinatenform einsetzen und auf a umstellen. Sie wissen, dass der Punkt, auf den der Stützvektor zeigt, in der Ebene liegt, daher setzen Sie diesen ein und erhalten:

   $$\begin{aligned} a &= -2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Damit ist die Koordinatengleichung gegeben durch: $\mathbf{E: -2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = -3}$

Kreuzprodukt
Sollten Sie hier eine Wiederholung benötigen, schauen Sie sich Seite 225 nochmals an.

Punktprobe ⓘ

Anhand der Koordinatenform einer Ebene können Sie leicht feststellen, ob ein beliebiger Punkt in der gegebenen Ebene liegt oder nicht. Dazu muss der Punkt in die Koordinatengleichung eingesetzt werden. Ist die Gleichung erfüllt, liegt der Punkt in der Ebene.

Beispiel Ⓑ

Gegeben seien die Punkte $A(1|-4|7)$ und $B(2|3|-1)$ sowie die Ebene $E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$.

Setzen Sie den Punkt A in E ein, erhalten Sie $3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 7 = 3 - 8 + 7 = 2$
Das Ergebnis entspricht dem Ergebnis der Koordinatengleichung, weshalb der Punkt in der Ebene liegt.

Setzen Sie den Punkt B in E ein, erhalten Sie $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-1) = 6 + 6 - 1 = 11 \neq 2$
Das Ergebnis entspricht nicht dem Ergebnis der Koordinatengleichung, weshalb der Punkt nicht in der Ebene liegt.

ⓘ **Von der Koordinatengleichung zur Parametergleichung**
Der umgekehrte Weg von der Koordinatengleichung zur Parametergleichung wählen Sie durch Ausprobieren drei Punkte, welche die Koordinatengleichung erfüllen und bestimmen mit Hilfe dieser Punkte die Ebenengleichung in Parameterform (wie in dem Beispiel "Parametergleichung mit drei Punkten" drei Seiten zuvor).

Ⓑ **Beispiel (von der Koordinatengleichung zur Parametergleichung)**
Die Ebenengleichung $E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6$ soll in die Parametergleichung umgewandelt werden. Die Punkte A(1|–1|1), B(0|0|3) und C(2|0|2) erfüllen die obige Gleichung.

Daraus ergibt sich die Parametergleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.55 (8VCdEC)
Welche der Punkte A(1|–2|3), B(–5|4|0), C(–4|3|–2) liegen in der Ebene E?
a) $E: x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$ b) $E: 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 6$ c) $E: x_1 + x_2 - x_3 = -1$

Aufgabe 7.56 (p5PmGq)
Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatengleichung der Ebene E.
a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.57 (XnZjvs)
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung …
a) … der x_2x_3-Ebene b) … der x_1x_3-Ebene

Aufgabe 7.58 (k68x8f)
Die Punkte A, B, C legen eine Ebene fest. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
a) A(0|2|–1), B(6|–5|0), C(1|0|1)
b) A(7|2|1), B(4|1|3), C(1|3|2)
c) A(1|2|–1), B(6|–5|11), C(3|2|0)
d) A(9|3|–3), B(8|4|–9), C(11|13|–7)

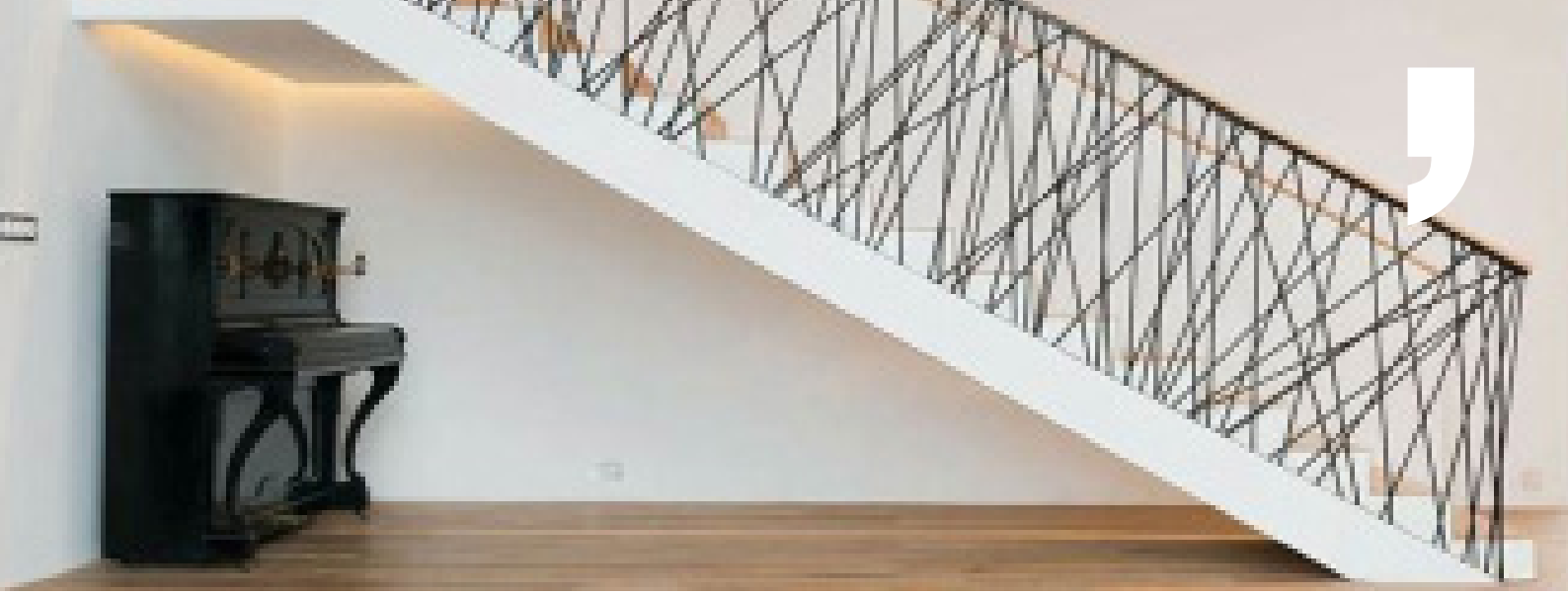
Aufgabe 7.59 (hsGf2V)
Gegeben sind die folgenden Ebenengleichungen:
$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass die gegebenen Gleichungen identisch sind, indem Sie von beiden Ebenen eine Koordinatengleichung bestimmen.

Aufgabe 7.60 (qXg7dV)
Bestimmen Sie jeweils eine Parametergleichung der Ebene E und geben Sie den Normalenvektor an.
a) $E: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4$
b) $E: -3x_1 + x_2 + 2x_3 = -6$
c) $E: x_1 + 2x_2 = 3$
d) $E: 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$
e) $E: x_1 - x_3 = -2$
f) $E: 2x_2 = -3$

Aufgabe 7.61 (sz8aUC)
Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat die Ebene E?
a) $E: x_3 = 0$ b) $E: x_1 = 5$ c) $E: x_2 = -3$ d) $E: x_3 = 4$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.9 LAGEBEZIEHUNG VON GERADEN UND EBENEN

Drei Möglichkeiten für die Lage

Bei der Betrachtung der Gegenseitigen Lage einer Geraden g und einer Ebene E müssen drei Fälle unterschieden werden:

1) g und E haben genau einen Punkt gemeinsam, g und E schneiden sich also. Dieser Schnittpunkt wird als **Durchstoßpunkt** bezeichnet.
2) g und E haben keinen Punkt gemeinsam, dann ist g **parallel** zu E und liegt nicht in E.
3) g und E haben unendlich viele gemeinsame Punkte, **g liegt in E**.

Bei der Bestimmung des gemeinsamen Punktes von g und E besitzt die zugehörige Gleichung bzw. das zugehörige Gleichungssystem im jeweiligen Fall

- genau eine Lösung (Durchstoßpunkt)
- keine Lösung (parallel)
- unendlich viele Lösungen (liegt in E)

Beispiel (Durchstoßpunkt mit Parametergleichung) Ⓑ

Gegeben sind $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$

Sie erhalten durch Gleichsetzen $\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$

das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3+2t &=& 4-2r+3s \\ 4+t &=& 2+r+s \\ 7-t &=& 2+3r-4s \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} -2r+3s-2t &=& -1 \\ r+s-t &=& 2 \\ 3r-4s+t &=& 5 \end{array}$$

und in Matrixschreibweise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 16 & -32 \end{array}\right)$$

Somit ist $r = 1$, $s = -1$, $t = -2$. Setzen Sie t in die Gleichung von g ein (oder r und s in die Gleichung von E), so erhalten Sie den Durchstoßpunkt $D(-1|2|9)$.

Vollziehen Sie die Lösung des LGS selbstständig nach.

Beispiel (Durchstoßpunkt mit Koordinatengleichung) Ⓑ

Gegeben sind $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $E: -7x_1 + x_2 - 5x_3 = -36$.

Die Geradengleichung ergibt $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = 4 + t$ und $x_3 = 7 - t$. Eingesetzt in die Ebenengleichung erhalten Sie $-7(3 + 2t) + (4 + t) - 5(7 - t) = -36$, woraus $t = -2$ folgt. Setzen Sie t in die Geradengleichung ein, erhalten Sie als Durchstoßpunkt $D(-1|2|9)$.

Ⓑ **Beispiel (Parallelität)**

Gegeben sind $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $E: x_2 + x_3 = 6$.

Gehen Sie wie in dem vorherigen Beispiel vor, ergibt sich $(4 + t) + (7 - t) = 6$. Hieraus folgt $0 \cdot t + 11 = 6$, also $11 = 6$, d. h. es gibt keine Lösung. Damit haben g und E keinen gemeinsamen Punkt: g und E sind parallel.

Aufgabe 7.62 (n4YT3R)

Untersuchen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte von g und E. Bestimmen sie gegebenenfalls den Durchstoßpunkt.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}7\\8\\6\end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}22\\-18\\-7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.63 (vz6ktu)

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene E und der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt, falls sich g und E schneiden:

a) $E: 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 16$
b) $E: 5x_2 - 7x_3 = 13$
c) $E: x_1 + x_2 - x_3 = 1$
d) $E: 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$
e) $E: x_1 + x_2 - x_3 = 7$
f) $E: x_1 + x_2 - x_3 = 8$
g) $E: 3x_1 - x_3 = 10$
h) $E: 3x_1 - x_3 = 12$
i) $E: 4x_1 - 5x_2 = 11$

Aufgabe 7.64 (hJJAWA)

Die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$ und die Gerade g schneiden sich.

Bestimmen Sie jeweils den Durchstoßpunkt.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\9\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.65 (Vn2iYA)

Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte von $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

und g in Abhängigkeit von a.

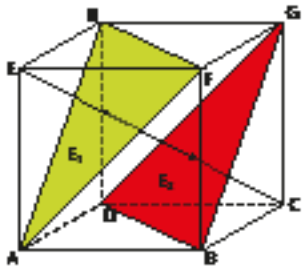
a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\a^2\end{pmatrix}$
e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1-a\\-a^2\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\7-a\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\a\\3\end{pmatrix}$
d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\a^2\end{pmatrix}$
f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\a-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}a+1\\-a-1\\-a^2-2\end{pmatrix}$

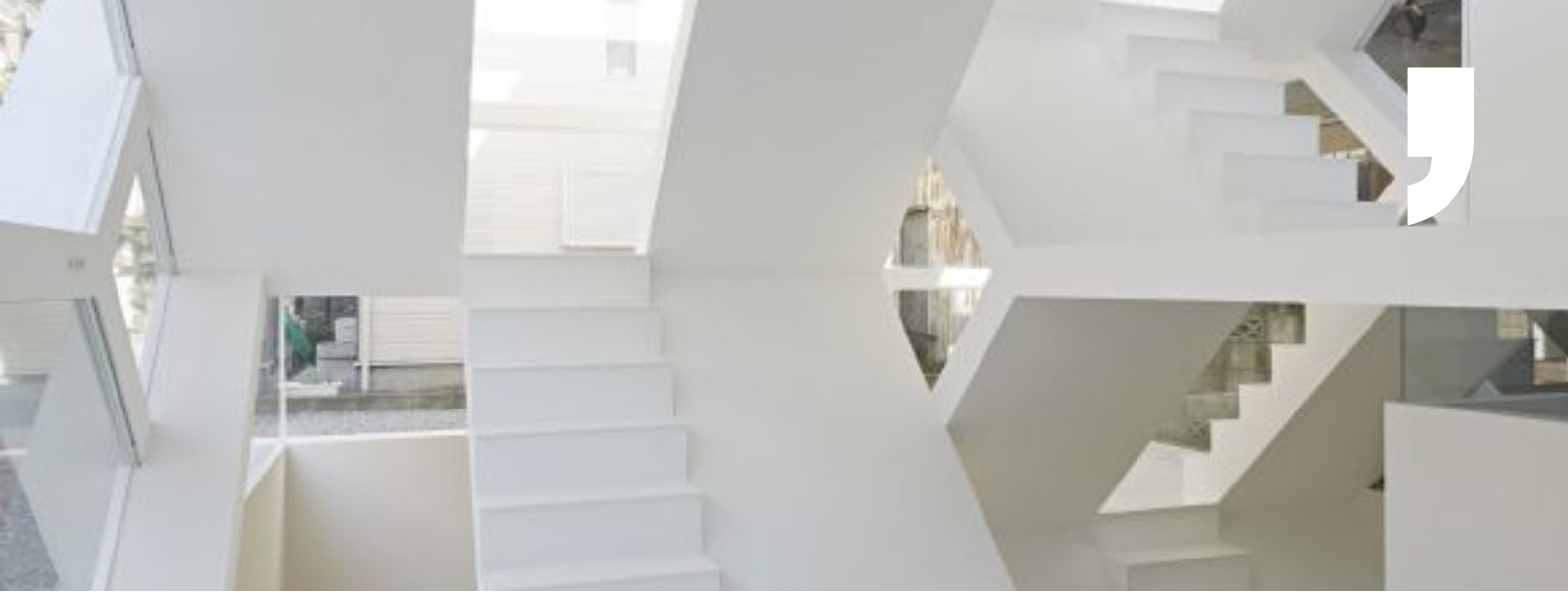
Aufgabe 7.66 (7fW5UL)

Der Würfel hat die Eckpunkte A(0|0|0), B(0|8|0), C(–8|8|0) und E(0|0|8).
Die Ebene E_1 ist durch die Punkte A, F und H, die Ebene E_2 durch die Punkte B, D und G festgelegt.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Gerade durch C und E mit den Ebenen E_1 und E_2.
b) Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel sind.
c) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Ebenen.



DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.10 LAGEBEZIEHUNG VON EBENEN

Drei Möglichkeiten für die Lage

Bei der Betrachtung der gegenseitigen Lage von zwei Ebenen E_1 und E_2 müssen Sie drei Fälle unterscheiden:

1) Gibt es gemeinsame Punkte von E_1 und E_2, dann liegen diese auf einer Geraden, der sogenannten **Schnittgeraden** von E_1 und E_2.
2) Haben E_1 und E_2 keine Punkte gemeinsam, dann sind E_1 und E_2 **parallel** zueinander.
3) Haben E_1 und E_2 unendlich viele Punkte gemeinsam, dann sind E_1 und E_2 **identisch**.

Beispiel (Schnittgerade mit zwei Parametergleichungen)

Gegeben sind die folgenden beiden Ebenen, deren Schnittgerade bestimmt werden soll:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$$

Durch Gleichsetzen der Ebenengleichungen erhalten Sie folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} 1 + r + 3s = -1 + u - 2v \\ 3 - 2r + s = 5 + u + v \\ 2 + 4s = 2 + 2u + 3v \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} r + 3s - u + 2v = -2 \\ -2r + s - u - v = 2 \\ 4s - 2u - 3v = 0 \end{array}$$

Umgestellt und in Matrixschreibweise sowie in Stufenform umgewandelt erhalten Sie:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 33 & -8 \end{array}\right)$$

Anhand der letzten Zeile lesen Sie $2u + 33v = -8$ ab und somit gilt $u = -16{,}5v - 4$.
Setzen Sie dies in die Gleichung E_2 ein, erhalten Sie

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + (-16{,}5v - 4) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-16{,}5\\-16{,}5\\-33\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-4\\-8\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-18{,}5\\-15{,}5\\-30\end{pmatrix}$$

Um die Dezimalzahlen in dem Richtungsvektor weg zu bekommen, können Sie auch $v = -2t$ setzen und erhalten somit die Gleichung der Schnittgeraden von E_1 und E_2.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-6\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}37\\31\\60\end{pmatrix}$$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Ⓑ **Beispiel (Schnittgerade mit Parameter- und Koordinatengleichung)**
Gegeben sind die folgenden beiden Ebenen, deren Schnittgerade bestimmt werden soll:

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$$

Aus E_1 ergibt sich $x_1 = 1 + r + 3s$, $x_2 = 3 - 2r + s$ und $x_3 = 2 + 4s$. Eingesetzt in die Ebenengleichung erhalten Sie $(1 + r + 3s) - 2(3 - 2r + s) + 3(2 + 4s) = 1$, woraus $r = -2{,}6s$ folgt.

Setzen Sie r in E_1 ein, erhalten Sie als Geradengleichung $g_S: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0{,}4\\6{,}2\\4\end{pmatrix}$.

Ⓑ **Beispiel (Schnittgerade mit zwei Koordinatengleichungen)**
Gegeben sind die beiden folgenden Ebenen, deren Schnittgerade bestimmt werden soll:
$E_1: 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5$ und $E_2: x_1 - x_2 - 4x_3 = 3$

Hier können Sie direkt ein Gleichungssystem in Matrixschreibweise aufstellen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & -2 & 5\\1 & -1 & -4 & 3\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c}3 & -1 & -2 & 5\\0 & 2 & 10 & -4\end{array}\right)$$

Damit erhalten Sie aus der zweiten Zeile $2x_2 + 10x_3 = -4$ und somit $x_2 = -5x_3 - 2$.

Dieses x_2 kann nun in die erste Zeile eingesetzt werden und anschließend auf x_1 umstellen:

$3x_1 - (-5x_3 - 2) - 2x_3 = 5 \qquad x_1 = -x_3 + 1$

Somit erhalten Sie den sogenannten Lösungsvektor $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_3 + 1\\-5x_3 - 2\\x_3\end{pmatrix}$.

Auch wenn Sie es vielleicht nicht direkt sehen, sind Sie schon fertig. Um nun noch eine offensichtliche Geradegleich daraus zu machen, ersetzen Sie das x_3 durch ein t und stellen die einzelnen Zahlen nach vorne:

$\vec{x} = \begin{pmatrix}1 - t\\-2 - 5t\\t\end{pmatrix}$ woraus sich die Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\-5\\1\end{pmatrix}$ ergibt.

Aufgabe 7.67 (tP6Ny2)
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen E_1 und E_2. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden.

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\8\end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-8\\9\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\-3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\-6\end{pmatrix}$ und $E_2: 2x_1 + x_2 + x_3 = 3$

c) $E_1: x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$ und $E_2: 6x_1 + x_2 - x_3 = -7$

d) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-8\\6\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}7\\-4\\0\end{pmatrix}$

e) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $E_2: x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 7$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.11 ABSTAND PUNKT-EBENE

So, wie Sie einen Abstand von einem Punkt zu einer Geraden bestimmen können (über den Lotfußpunkt), so können Sie selbstverständlich auch den Abstand von einem Punkt P zu einer Ebene E bestimmen. Dazu bestimmen Sie eine Gerade durch den Punkt P, die im Lotfußpunkt orthogonal auf der Ebene steht. Diese Gerade nennen Sie **Lotgerade**.

Beispiel (mit Parametergleichung) Ⓑ
Gegeben sind der Punkt $P(2|0|1)$ und die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}8\\-1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$.

1) Bestimmung der Lotgeraden:
Die Lotgerade ist orthogonal zur Ebene. Das heißt, der Richtungsvektor der Lotgeraden liegt orthogonal zu den beiden Spannvektoren der Ebene.

Das der Normalenvektor einer Ebene mit Hilfe des Kreuzprodukts der beiden Spannvektoren bestimmt werden kann, wissen Sie bereits aus Kapitel 7.8.

Ebenen-Normalenvektor
siehe auch Kapitel 7.8

$$\begin{pmatrix}8\\-1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich zusammen mit dem Punkt P die Lotgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$.

2) Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene (Lotfußpunkt)

Durchstoßpunkt
siehe auch Kapitel 7.9

Der Durchstoßpunkt ergibt sich aus $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}8\\-1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$.

Sie erhalten den Lotfußpunkt $F\left(\frac{7}{3} \mid \frac{8}{3} \mid -\frac{1}{3}\right)$.

3) Berechnung des Abstandes vom Punkt P zum Lotfußpunkt F

Betrag eines Vektors
siehe auch Kapitel 7.4

$$d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{\left(\tfrac{7}{3} - 2\right)^2 + \left(\tfrac{8}{3}\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{3} - 1\right)^2} = 3$$

Damit beträgt der Abstand vom Punkt zur Ebene 3 LE.

Alternativ können Sie die Ebene auch in Koordinatenform umwandeln und dann mit folgender Rechnung fortfahren.

Beispiel (mit Koordinatengleichung) Ⓑ
Bei gegebenem Punkt $P(x_1|x_2|x_3)$ und der Ebene $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = a$ wird der

Ebenen-Normalenvektor
siehe auch Kapitel 7.8

Abstand Punkt-Ebene mit folgender Gleichung bestimmt: $d(E,P) = \dfrac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - a}{|\vec{n}|}$

Wenn der Punkt $P(5|-2|0)$ und die Ebene $E: -x_1 + 4x_2 + 19x_3 = 10$ gegeben sind, ergibt sich für den Abstand Punkt-Ebene folgendes:

$$d = \frac{-1 \cdot 5 + 4 \cdot (-2) + 19 \cdot 0 - 10}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 19^2}} = \frac{-5 - 8 - 10}{\sqrt{1 + 16 + 361}} = \frac{-23}{\sqrt{378}} = -1{,}183$$

Da ein negativer Abstand in diesem Sinne nicht existieren kann, bilden Sie hier in der Regel noch den Betrag und erhalten damit einen Abstand von d = 1,183.

Aufgabe 7.68 (6RupeC)
Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E.

a) $P(-1|7|9)$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P(12|-16|8)$ und $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $P(3|-1|7)$ und $E: 3x_2 + 4x_3 = 0$

d) $P(-2|0|3)$ und $E: 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 13$

Aufgabe 7.69 (3Hd6nX)
Gegeben Sind die Punkte $A(0|2|0)$ und $B(5|-1|-2)$ sowie die Ebenen $E: x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und B parallel zur Ebene E bzw. zur Ebene F ist.
b) Bestimmen Sie den Abstand der Geraden durch A und B zur Ebene E bzw. zur Ebene F.

Aufgabe 7.70 (rSXxmv)
Die Grundfläche einer Pyramide liegt in der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Die Spitze der Pyramide ist $S(10|10|15)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung einer zur Grundfläche orthogonalen Geraden durch die Spitze der Pyramide.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Höhenfußpunktes.

Aufgabe 7.71 (zpAUmZ)
Eine Gerade g durch $A(2|3|-1)$ ist orthogonal zur Ebene E. Bestimmen Sie sowohl g, als auch den Abstand zwischen A und E.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $E: 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 5$

e) $E: x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1$

f) $E: 4x_2 + 5x_3 = 3$

Aufgabe 7.72 (tmYk7i)
Gegeben ist der Punkt $A(-2|1|-3)$ und die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt A auf die Ebene E.
b) Welcher Punkt B der Lotgeraden hat denselben Abstand von der Ebene E wie der Punkt A? Bestimmen Sie seine Koordinaten. Müssen Sie dazu den Abstand berechnen?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

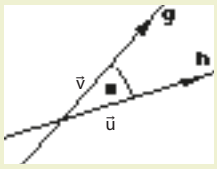
7.12 WINKEL GERADE-GERADE-EBENE-EBENE

Die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren haben Sie bereits in Kapitel 7.5 kennengelernt. Die Berechnung von Winkeln zwischen Geraden und Geraden, Geraden und Ebenen sowie Ebenen und Ebenen ist durchaus ähnlich, hat aber dennoch ein paar Besonderheiten.

ⓘ

Winkel Gerade-Gerade

Der Schnittwinkel α zwischen zwei sich schneidenden Geraden g und h ist der spitze Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.



Es gilt: $\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Ⓑ

Beispiel (Winkel Gerade-Gerade)

Den spitzen Winkel zwischen den Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

erhalten Sie demnach durch folgende Rechnung:

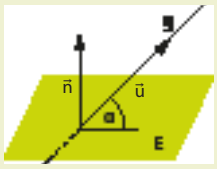
$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|3 + 2 + 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5}} \approx 0{,}8367$$

$\alpha = \cos^{-1}(0{,}8367) \approx \mathbf{33{,}21°}$

ⓘ

Winkel Gerade-Ebene

Der Schnittwinkel α zwischen einer Geraden g und einer Ebene E ist der Komplementärwinkel des spitzen Winkels zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden.



Es gilt: $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}$

Ⓑ

Beispiel (Winkel Gerade-Ebene)

Sofern g einen Durchstoßpunkt in E hat, erhalten Sie den Winkel zwischen der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ und der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ durch folgende Rechnung:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-21 - 8 + 6|}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{7^2 + 8^2 + 6^2}} = \frac{|-23|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{149}} = \frac{23}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{149}} \approx 0{,}5681$$

$\alpha = \sin^{-1}(0{,}5681) \approx \mathbf{34{,}618°}$

Normalenvektor
Zur Bestimmung des Normalenvektors einer Ebene siehe auch Seite 225 bzw. 237.

ⓘ **Winkel Ebene-Ebene**

Der Schnittwinkel α zwischen zwei Ebenen E und F ist der spitze Winkel zwischen ihren Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$.



Es gilt: $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$

Ⓑ **Beispiel (Winkel Ebene-Ebene)**

Den Winkel zwischen den Ebenen E: $\begin{pmatrix}-6\\-3\\-3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\-6\end{pmatrix}$ und F: $2x_1 + x_2 + x_3 = 3$

erhalten Sie durch folgende Rechnung:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-2+2+1|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$$

$\alpha = \cos^{-1}(0{,}1667) \approx$ **80,404°**

Aufgabe 7.73 (Fa6FXH)

Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4\\-2\\6\end{pmatrix}$ h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4\\-4\\10\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.74 (76giQQ)

Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen Gerade und Ebene.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$

b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ E: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 11$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}7\\-2\\1\end{pmatrix}$ E: $x_1 - 4x_3 - 5 = 0$

Aufgabe 7.75 (77ziJR)

Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

c) E: $5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$ F: $10x_1 + 7x_2 - 12x_3 - 45 = 0$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



7.13 VERMISCHTE ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 7.76 (RWFAHu)

Berechnen Sie die folgenden Vektoradditionen und Skalarmultiplikationen.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\vec{x} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.77 (dEGcQh)

Bestimmen Sie die Beträge der gegebenen Vektoren.

a) $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$

b) $|\vec{b}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \end{pmatrix} \right|$

c) $|\vec{c}| = \left| \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} \right|$

Aufgabe 7.78 (WAw3Sv)

Bestimmen Sie den Abstand zwischen den gegebenen Punkten.

a) $A(2|-1|3)\,;\, B(4|1|2)$

b) $A(-4|2|5)\,;\, B(2|5|3)$

c) $A(0|1|1)\,;\, B(2|8|-2)$

Aufgabe 7.79 (FUUkNx)

Geben Sie den entsprechenden Einheitsvektor an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.80 (AjAfr4)

Bestimmen Sie das Skalarprodukt der gegebenen Vektorenpaare und geben Sie an, ob die Vektoren orthogonal zueinander sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 22 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

h) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\,;\, \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

○ **Aufgabe 7.81 (5wHfkM)**

Geben Sie den Normalenvektor der folgenden Vektorenpaare an.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}$

e) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

f) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\10\\100\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\10\end{pmatrix}$

g) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$

h) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

i) $\vec{a}=\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\6\end{pmatrix}$

○ **Aufgabe 7.82 (s5qkiw)**

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den gegebenen Vektoren.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-4\\9\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix};\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$

○ **Aufgabe 7.83 (eJeL3N)**

Geben Sie die Geradengleichung an, die durch die beiden Punkte P und Q verläuft.

a) P(1|5|–4), Q(0|2|2)

b) P(0|2|–2), Q(1|1|1)

c) P(0|1|–1), Q(5|1|1)

○ **Aufgabe 7.84 (TPyf3k)**

Überprüfen Sie, ob die Punkte auf den Geraden liegen.

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-5\\-7\end{pmatrix}$; A(8|–13|–15) ; B(–7|12|20) ; C(2|–3|13)

b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-10\\8\\3\end{pmatrix}$; D(–37|28|17) ; E(–23|–20|–1) ; F(28|–12|18)

◒ **Aufgabe 7.85 (8rFHCA)**

Bestimmen Sie den Abstand von der Geraden zum angegebenen Punkt.

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$ und A(5|5|7)

b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ und P(–5|2|–1)

c) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ und Q(11|10|9)

d) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-4\end{pmatrix}$ und R(2|3|5)

○ **Aufgabe 7.86 (3TiQVz)**

Welche Lagebeziehung haben die gegebenen Geraden zueinander. Bestimmen Sie gegebenenfalls einen Schnittpunkt.

a) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$

b) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

○ **Aufgabe 7.87 (Z12H1T)**

Geben Sie eine Ebenengleichung an, die durch die Punkte P, Q und R definiert ist.

a) P(9|2|–2) ; Q(1|0|1) ; R(3|2|1)

b) P(1|2|–1) ; Q(0|0|1) ; R(5|2|5)

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 7.88 (BMBmTU)

Wandeln Sie entweder in Parameter- oder Koordinatenform um.

a) $E: 4x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$ b) $E: x - 2y - 2z = -4$ c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.89 (K78bii)

Überprüfen Sie, ob die gegebenen Punkte in der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ liegen.

a) P(2|2|5) b) Q(4|3|6) c) R(0|1|1) d) S(0|1|4)

Aufgabe 7.90 (Bhk7EA)

Überprüfen Sie die gegebenen Geraden und Ebenen auf deren Lagebeziehung und geben Sie falls möglich einen Durchstoßpunkt an.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$

d) $E: 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$

e) $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$

f) $E: -x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 7.91 (e7ih7a)

Überprüfen Sie die Lagebeziehung der gegebenen Ebenengleichungen.

a) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

b) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$

d) $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

$E_2: 3x_1 + 3x_2 - x_3 = -12$

e) $E_1: 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2$
$E_2: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$

f) $E_1: 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 8$
$E_2: -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4$

g) $E_1: x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$
$E_2: 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2$

h) $E_1: x_1 + 5x_3 = 8$
$E_2: x_1 + x_2 + x_3 = 1$

○ **Aufgabe 7.92 (VtNUmL)**

Ein Flugzeug fliegt auf geradem Weg mit konstanter Geschwindigkeit von A(2|4|1) nach B(5|2|2) und benötigt dafür eine Minute. Die Koordinaten wurden in km angegeben.

a) Wie lautet die Gleichung der Geraden in Parameterform, welche die Flugbahn beschreibt und welche Bedeutung hat der Vektor $\vec{x}$ in Abhängigkeit vom Parameter t?
b) Nach wie vielen Minuten von Punkt A aus ist es 5 km hoch und wie wären dann die Koordinaten?
c) Eine Nebelwand ist durch die Gleichung E: $x_2 + 2x_3 = 8$ gegeben. Trifft das Flugzeug die Nebelwand? Wenn ja, in welchem Punkt?
d) Wie weit fliegt es an der Bergspitze in P(10|3|3) vorbei (minimaler Abstand)?
e) Wo wäre es gestartet, wenn die Flugbahn insgesamt als eine Gerade gesehen werden könnte?

◒ **Aufgabe 7.93 (fHLbA3)**

Es werden zwei Schächte in einen Berg gebohrt. Der erste Schacht verläuft durch A(0|0|4) und B(2|1|3,8) und der zweite verläuft durch C(a|4|3,6) und geht senkrecht nach unten. Alle Angaben sind in km gegeben und die x_3-Komponente gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an.

a) Wie muss a gewählt werden, damit sich die Schächte treffen und wo treffen sich die beiden Schächte?
b) Unter welchem Winkel treffen sich die Schächte?
c) In welchem Punkt befinden Sie sich im ersten Schacht, wenn Sie 2,5 km über dem Meeresspiegel sind?

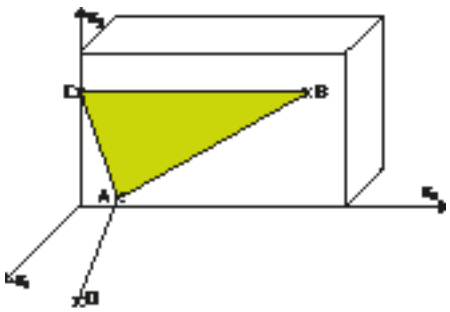
● **Aufgabe 7.94 (gY7gi2)**

Eine Lampe in Punkt L(15|8|0) strahlt einen Punkt P(10|10|1) an.

a) Wo trifft der Lichtstrahl durch den Punkt P auf die Wand, die in der x_2x_3-Ebene liegt und in welchem Winkel trifft der Lichtstrahl auf die Wand?
b) Wenn der Lichtstrahl an der Wand aus a) reflektiert werden würde, wie würde eine Gleichung der Geraden in Parameterform lauten, die diesen reflektierten Lichtstrahl enthält?

◒ **Aufgabe 7.95 (7xaG5i)**

Ein Teil der Spielwiese eines Kindergartens soll mit einem dreieckigen Sonnensegel aus UV-undurchlässigem Stoff überdacht werden. Die Wiese liegt in der x_1x_2-Ebene. Das Sonnensegel wird in den Eckpunkten C(0|0|3) und B(0|6|3) an der Hauswand, die in der x_2x_3-Ebene liegt, befestigt (siehe Skizze). Vom dritten Eckpunkt A(4|3|2) des Segels aus wird ein Seil in Richtung des Vektors



$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ gespannt und im Punkt D auf der Wiese befestigt (1 LE entspricht 1 m).

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segels.
c) Bestimmen Sie den Punkt D, in dem das Seil auf der Wiese befestigt wird.
d) Berechnen Sie den Winkel, den das Seil mit der Wiesenfläche bildet.
e) Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der das Sonnensegel liegt.
f) Weisen Sie nach, dass das Seil und das Segel in einer gemeinsamen Ebene liegen.
g) Zur Dekoration soll eine 2 m lange Leine mit Fähnchen angebracht werden. Diese soll an einer Öse im Punkt E(1,6|4,8|0) auf der Wiese und in einem Punkt der Kante $\overline{AB}$ des Sonnensegels befestigt werden. Prüfen Sie, ob das möglich ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 7.96 (BZKuEf)

a) Zeichnen Sie in ein dreidimensionales Koordinatensystem die folgenden Punkte: A(4|1|3), B(2|6|–2), C(–3|5|1) und D(0|5|–3)

b) Zeichnen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$.

c) Wie kann $\overrightarrow{BC}$ durch $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ ausgedrückt werden?

Aufgabe 7.97 (HYdQJP)

Ein Quader hat die Eckpunkte A(6|0|0), C(0|4|0), H(0|0|3).

a) Zeichnen Sie den Quader in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die restlichen Punkte.

b) Zeichnen Sie die Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ in das Koordinatensystem ein.

Aufgabe 7.98 (4hZVxy)

Stellen Sie eine Parameterform der Geraden auf, die durch die beiden Punkte verläuft.

a) A(5|4|1), B(3|3|2)

b) C(–3|4|–1), D(–1|3|1)

c) P(0|–3|9), Q(4|3|7)

d) R(2|4|8), S(4|5|7)

Aufgabe 7.99 (nz3YT4)

Geben Sie eine Parameterform der Ebene E an, welche bestimmt ist durch:

a) A(2|4|1), B(1|2|–1), C(3|–4|–2)

b) A(2|–3|2), B(0|3|2), C(3|0|–2)

c) P(0|1|–1), g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) P(–1|1|1), g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

h) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.100 (9xZcyB)

Geben Sie die Koordinatenform der Ebene an.

a) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.101 (Xhn1qu)

Wandeln Sie die gegebene Koordinatenform in die Parameterform um.

a) E: $2x_1 + x_2 - x_3 = 6$

b) E: $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12$

c) E: $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

d) E: $x_1 + 3x_3 = 6$

e) E: $2x_2 - 3x_3 = 12$

f) E: $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6$

Aufgabe 7.102 (6kNxux)

Bestimmen Sie die gegenseitige Lage.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $E: 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 7$

g) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $E: -x_1 + x_2 + x_3 = 2$

h) $E_1: 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 2$, $E_2: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$

i) $E_1: 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 8$, $E_2: -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4$

j) $E_1: 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2$, $E_2: x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

k) $E_1: x_1 + x_2 + 3x_3 = 4$, $E_2: 2x_1 + x_2 - x_3 = -2$

Aufgabe 7.103 (MPs8gT)

Bestimmen Sie die Abstände der beiden Punkte.

a) A(2|−1|3), B(4|1|2) b) C(−4|2|5), D(2|5|3) c) P(0|1|1), Q(3|8|−2)

Aufgabe 7.104 (Bx9uby)

Bestimmen Sie die angegebenen Winkel.

a) Winkel zwischen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Winkel zwischen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Winkel zwischen $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) Winkel zwischen $E_1: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$ und $E_2: 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12$

e) alle Innenwinkel im Dreieck ABC mit A(4|1|3), B(2|6|−2) und C(−3|5|1)

f) alle Innenwinkel im Parallelogramm ABCD mit den Eckpunkten A(−2|1|2), B(2|5|4), C(4|−1|7) und D(0|−5|5)

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 7.105 (uPiDin)

Sind die folgenden Vektoren orthogonal zueinander?

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

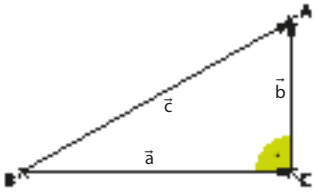
Aufgabe 7.106 (kP76S5)

Bestimmen Sie …

a) … D so, dass ABCD mit A(4|1|3), B(2|6|–2), C(–3|5|1) ein Parallelogramm ist.
b) … A so, dass ABCD mit B(2|2|–1), C(3|4|1), D(7|0|3) ein Rechteck ist.
c) … C so, dass ABCD mit A(–2|1|5), B(4|4|3), D(–4|7|8) ein Quadrat ist.

Aufgabe 7.107 (rrLKuX)

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gemäß der folgenden Figur.

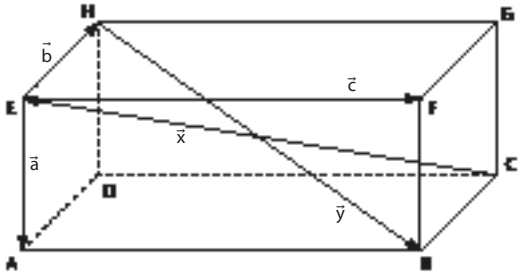


Welche Aussagen sind falsch? (Begründen Sie kurz)

a) $|\vec{c}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$
b) $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$
c) $C = \vec{a} + \vec{b}$
d) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$
e) $|\vec{c}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$
f) $|\vec{a}| + |\vec{b}| > |\vec{c}|$

Aufgabe 7.108 (MHx9Hh)

In der unten stehenden Zeichnung ist das Drahtmodell eines Quaders dargestellt.
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind eingezeichnet. Beschreiben Sie durch zwei Vektorgleichungen, wie der Vektor $\vec{x} = \overrightarrow{CE}$ und wie der Vektor $\vec{y} = \overrightarrow{HB}$ durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zusammengesetzt werden können.



Aufgabe 7.109 (QrQxFc)

Welchen Abstand d hat der Punkt P(8|6) vom Ursprung O?

Aufgabe 7.110 (wqUPJZ)

Gegeben seien die folgenden Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Berechnen Sie den Vektor $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$.

Aufgabe 7.111 (XPD9Eb)

Gegeben sind die zwei Punkte P(–1|2) und Q(7|–4). Bestimmen Sie …

a) … den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$.
b) … den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ und dessen Länge.
c) … den Einheitsvektor von $\overrightarrow{PQ}$.
d) … die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overrightarrow{PQ}$.
e) … den Vektor $\overrightarrow{PM}$.

○ **Aufgabe 7.112 (hnu3Qt)**

Verdoppeln Sie die Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus, so erhalten Sie den Punkt C. Wie lauten die Koordinaten des Punktes C, wenn folgende Punkte gegeben sind?

a) A(2|2), B(4|–2)

b) A(2|2|–1), B(4|–2|7)

◒ **Aufgabe 7.113 (8MAhjG)**

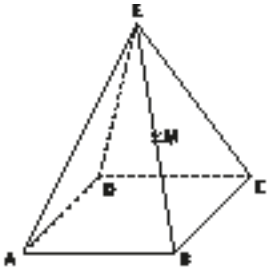
Von der Pyramide ABCDE kennen Sie die Koordinaten von den Eckpunkten. M ist der Mittelpunkt der Kante BE.
A(4|0|0), B(4|3|0), C(0|3|0), D(0|0|0), E(2|1,5|10)

a) Bestimmen Sie den Ortsvektor zum Punkt M.

b) Berechnen Sie die Vektorsumme $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}$.

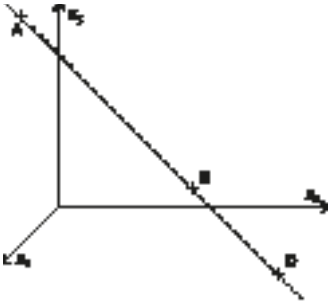
c) Bestimmen Sie die Koordinanten des Diagonalschnittpunktes S des Rechtecks ABCD.

d) Bestimmen Sie die Höhe der Pyramide.



○ **Aufgabe 7.114 (b1rmnZ)**

Gegeben sind die zwei Punkte A(2|0|6) und B(3|5|2). Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes D der Geraden AB mit der x_1x_2-Ebene.



◒ **Aufgabe 7.115 (Fgpx38)**

Berechnen Sie den Abstand der Punkte zur gegebenen Ebene.

a) E: $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$; P(1|2|4)

b) E: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3$; P(1|0|3)

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$; P(1|0|5)

○ **Aufgabe 7.116 (LpFVNd)**

Stellen Sie die Parametergleichungen der Ebenen durch die folgenden Punkte auf.

a) P(1|2|3), Q(3|–2|1), R(2|1|–3)

b) U(7|8|0), V(11|13|17), W(–19|–23|–29)

c) A(3|4|–2), B(–1|–3|5), C(–5|–10|11)

○ **Aufgabe 7.117 (WX2gsJ)**

Geben Sie die Koordinatenform der in 7.116 berechneten Ebenengleichungen an.

◒ **Aufgabe 7.118 (kBihLt)**

Bestimmen Sie den Abstand der Punkte zur Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

a) P(5|6) b) Q(1|–7) c) R(–6|–1) d) S(8|–3)

◒ **Aufgabe 7.119 (s7s1r5)**

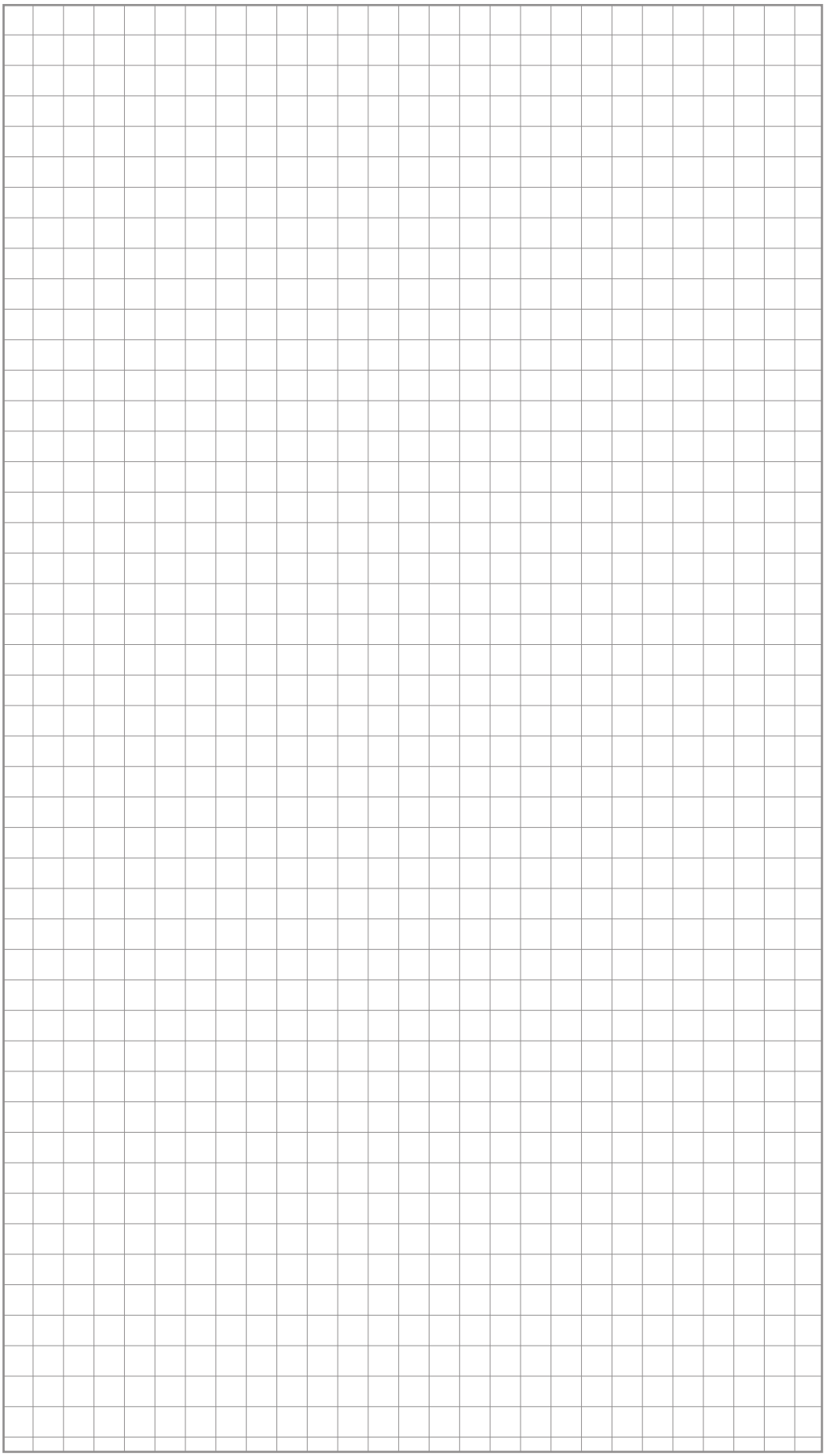
Bestimmen Sie den Abstand der Punkte zur Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$

a) P(–3|–1|7) b) Q(4|4|–2) c) R(1|–2|4) d) S(–4|–2|–2)

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Hilfestellung

Sollten Sie bei den vorherigen Aufgaben Hilfe benötigen, können Sie dies hier notieren:



7.14 CHECKLISTE – VEKTORGEOMETRIE

Mit der Checkliste können Sie als Vorbereitung auf die Klausur überprüfen, welche grundlegenden Themenbereiche der Unterrichtsreihe Sie gut können bzw. wo Sie noch unsicher sind. Wenn Sie die Checkliste erfolgreich bearbeitet haben, sollten Sie in der Klassenarbeit auf jeden Fall eine ausreichende Leistung erzielen.

	Meine Kompetenzen (bitte kreuzen Sie entsprechend an):	Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
1	Ich kann das grundlegende Konzept von Vektoren erläutern.				
2	Ich kann die Begriffe Gegenvektor, Verbindungsvektor und Ortsvektor beschreiben.				
3	Ich kann Vektoren in ein dreidimensionales Koordinatensystem einzeichnen.				
4	Ich kann mit zwei- und dreidimensionalen Vektoren rechnen (Vektoraddition und Skalarmultiplikation).				
5	Ich kann den Betrag eines Vektors (zwei- und dreidimensional) bestimmen.				
6	Ich kann zu einem Vektor den Einheitsvektor angeben.				
7	Ich kann das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnen und kenne die Bedeutung des Ergebnisses.				
8	Ich kann den Normalenvektor zu zwei gegebenen Vektoren berechnen.				
9	Ich kann den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen.				
10	Ich kann eine Geradengleichung im Raum mit Hilfe von zwei Punkten angeben, zeichnen und diese mit den Begriffen "Stützvektor" und "Richtungsvektor" beschreiben.				
11	Ich kann eine Punktprobe mit einem Punkt und einer Geraden durchführen.				
12	Ich kann den Abstand von einem Punkt zu einer Geraden bestimmen.				
13	Ich kann zwei gegebene Geraden auf alle vier Lagebeziehungen hin überprüfen und ggf. den Schnittpunkt bestimmen.				

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

		Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
14	Ich kann eine Ebenengleichung bestimmen und diese mit den Begriffen "Stützvektor" und "Spannvektor" beschreiben.				
15	Ich kann eine Ebenengleichung in Parameterform in eine Ebenengleichung in Koordinatenform umwandeln.				
16	Ich kann aus der Ebenengleichung in Koordinatenform den Normalenvektor zur Ebene ablesen.				
17	Ich kann eine Ebenengleichung in Koordinatenform in eine Ebenengleichung in Parameterform umwandeln.				
18	Ich kann Ebenen und Geraden auf ihre drei möglichen Lagebeziehung hin überprüfen und ggf. einen Durchstoßpunkt bestimmen.				
19	Ich kann zwei Ebenen auf ihre drei möglichen Lagebeziehungen hin überprüfen und ggf. eine Schnittgerade bestimmen.				
20	Ich kann den Abstand eines Punktes zu einer Ebene berechnen.				
21	Ich kann Winkel zwischen zwei Geraden berechnen.				
22	Ich kann Winkel zwischen zwei Ebenen berechnen.				
23	Ich kann das Kreuzprodukt bestimmen.				

Hilfestellung

Beim Durchgehen der Checkliste sind noch folgende Fragen aufgetaucht:

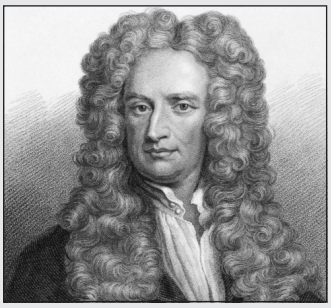
DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



8.1 LAPLACE-EXPERIMENTE

Pierre Simon Laplace

Die elementarsten Zufallsexperimente sind diejenigen, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Solch ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**. Pierre Simon Laplace (1749–1827) war Astronom, Physiker und Mathematiker. Auf ihn geht die Definition der "klassischen Wahrscheinlichkeit" zurück. Kurz gefasst sagt die Definition:
Die Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse eines Laplace-Experiments lassen sich berechnen, indem Sie die "günstigen Fälle" durch die "möglichen Fälle" teilen.



Definition

Gehören zu einem **Ereignis E** mehrere Ergebnisse, so wird die **Wahrscheinlichkeit P** dieses Ereignisses festgelegt als $P(E) = \frac{\text{Anzahl der zu E gehörigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$.

Diese Berechnung ist vom Prinzip her analog zur relativen Häufigkeit aus der Statistik (siehe Kapitel 2.1 "Absolute und relative Häufigkeiten" auf Seite 35).

Beispiel

Beim Würfeln gibt es sechs mögliche Ergebnisse. Das Zufallsexperiment "Werfen eines Würfels" hat die **Ergebnismenge S** = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Das Ereignis "Es wird eine 2 gewürfelt" hat also die Wahrscheinlichkeit $P(E) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$.
Das entspricht rund 16,7 %.
Das Ereignis "Es wird eine gerade Zahl gewürfelt" hat die Wahrscheinlichkeit $P(E) = \frac{3}{6} = 0{,}5$.
Das entspricht 50 %.

Spezielle Ereignisse sind das sichere und das unmögliche Ereignis

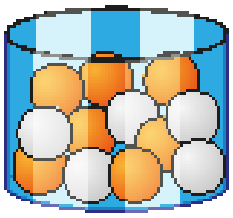
Sicheres Ereignis: Beim Zufallsexperiment *Zweimaliges Werfen eines Würfels* ist das Ereignis "Summe der beiden Augenzahlen ist kleiner oder gleich 12" ein sicheres Ereignis!
Unmögliches Ereignis: Beim Zufallsexperiment *Zweimaliges Werfen eines Würfels* ist das Ergebnis "Summe der beiden Augenzahlen ist gleich Null" unmöglich. Genauso, wie bei dem Experiment *Würfeln eines normalen Würfels* eine 7 zu würfeln.

Gegenereignis

Das Gegenteil eines Ereignisses nennen Sie **Gegenereignis**. Von dem Ereignis eines Würfelwurfes "A: Die Zahl ist kleiner als 3" ist das Gegenereignis gegeben durch "$\bar{A}$: Die Zahl ist größer oder gleich 3" oder "$\bar{A}$: Die Zahl ist größer als 2".

sprich: "A quer"

Aufgabe 8.1 **(pFgNXg)**
Aus einer Klasse mit 15 Schülerinnen und 10 Schülern soll per Los ein Gewinner ermittelt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin gezogen wird?



Aufgabe 8.2 **(yWtxan)**
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus der links abgebildeten Urne blind eine rote Kugel zu ziehen? Wie groß die Chance für eine weiße Kugel?

Aufgabe 8.3 **(fRbCyf)**
Die PIN für eine Bankkarte besteht aus vier Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die letzte Ziffer durch 4 teilbar ist?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die erste Ziffer eine Primzahl?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle vier Ziffern gleich sind?
d) Ist es wahrscheinlicher, dass die PIN 1234 oder 5439 lautet?

YouTube

Aufgabe 8.4 **(Twh9pj)**
Zur Fußball-Weltmeisterschaft 2018 in Russland gab es bei einer Lebensmittelkette Tütchen mit insgesamt 34 verschiedenen Sammelbildern der deutschen Nationalmannschaft einschließlich Trainern und Maskottchen Paule. In jedem Tütchen war ein Bild.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, gleich in der ersten Tüte Paule zu bekommen?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist einer der acht Abwehrspieler in einer Tüte?
c) Welche Einflussfaktoren spielen neben der Anzahl der Sammelbilder noch eine Rolle bei der Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Motiv zu erhalten?

Aufgabe 8.5 **(QfVcMj)**
In einer Schublade liegen 8 leere und 12 volle Batterien.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird zufällig eine volle Batterie gezogen?
b) Es werden zwei volle Batterien benötigt. Eine volle wurde bereits genommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim nächsten Zug wieder eine volle Batterie genommen wird?

Aufgabe 8.6 **(iqFQfy)**
Beim Lotto 6 aus 49 werden von den 49 Kugeln nacheinander 6 Kugeln gezogen.
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste Kugel die Zahl 3 trägt.
b) Beim ersten Zug wurde die Zahl 3 nicht gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie im zweiten Zug gezogen wird?
c) Auch im zweiten Zug wurde die 3 nicht gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird sie nun im dritten Zug gezogen?

Aufgabe 8.7 **(bjY64L)**
Ein Kasten enthält neun Kugeln mit den Zahlen 1 bis 9. Eine Kugel wird gezogen und die Zahl notiert. Betrachtet werden die folgenden Ereignisse: Die gezogene Zahl …
1. … ist eine Primzahl.
2. … ist gerade.
3. … ist kleiner oder gleich 5.
4. … ist durch 5 teilbar.
5. … ist größer als 8.
6. … ist eine Quadratzahl.

a) Geben Sie die Ergebnismengen jeweils in aufzählender Schreibweise an.
b) Welche Wahrscheinlichkeiten ergeben sich jeweils?

Aufgabe 8.8 **(DsErde)**
Eine Urne enthält Kugeln mit den Zahlen 3, 1, 5, 2, 6, 4, 7. Geben Sie die Ergebnismenge an für die folgenden Ereignisse:
a) Ziehen einer Kugeln und Feststellen ihrer Ziffer.
b) Ziehen von zwei Kugeln mit einem Griff und Feststellen der Summe ihrer Ziffern.
c) Ziehen von zwei Kugeln mit einem Griff und Feststellen des Produktes ihrer Ziffern.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



8.2 WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNG

Definition ⓘ

Alle möglichen **Ergebnisse** eines Zufallsexperimentes bilden die **Ergebnismenge S**. Durch die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** sind die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse festgelegt. Dabei gilt:

1. Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Ergebnis ist größer oder gleich Null.
2. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse ergibt 1 (bzw. 100 %).

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses gibt an, welche relative Häufigkeit Sie für das Ergebnis bei vielen Versuchswiederholungen in etwa erwarten können.

Beispiel Ⓑ



Es gibt Situationen und Experimente, bei denen der Ausgang oder das Ergebnis vom Zufall abhängt. Häufig ist es möglich, die Chancen solcher Ergebnisse einzuschätzen. Beim Glücksrad rechts wird der Zeiger gedreht. Es hängt vom Zufall ab, wo er stehen bleibt. Alle möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperiments bilden die Ergebnismenge S = {gelb; grün; blau}. Da die Hälfte der Kreisscheibe blau ist, erwarten Sie bei Wiederholungen dieses Zufallsversuches etwa bei der Hälfte aller Drehungen das Ergebnis "blau". Für die Ergebnisse "gelb" und "grün" erwarten Sie jeweils den Anteil $\frac{1}{4}$. Man bestimmt aufgrund der geometrischen Form des Glücksrades die Wahrscheinlichkeiten P und schreibt P(blau) = $\frac{1}{2}$ = 0,5 sowie P(gelb) = P(grün) = $\frac{1}{4}$ = 0,25. Die Summe der bestimmten Wahrscheinlichkeiten beträgt 1.

Man nennt eine solche Tabelle **Wahrscheinlichkeitsverteilung**. Bei 200 Drehungen können Sie erwarten, dass "blau" etwa 100-mal und "gelb" und "grün" jeweils etwa 50-mal auftreten.

Farbe	blau	gelb	grün
festgelegte Wahrscheinlichkeit	0,5	0,25	0,25
Summe der Wahrscheinlichkeiten	1,0		

Die Tabelle zeigt die Ergebnisse einer solchen Versuchsreihe. Die relativen Häufigkeiten stimmen recht gut mit den festgelegten Wahrscheinlichkeiten überein.

Farbe	blau	gelb	grün
absolute Häufigkeit	102	43	55
relative Häufigkeit	0,51	0,215	0,275

Es gibt weitere **Zufallsgeräte**, bei denen Sie die Wahrscheinlichkeit der möglichen Ergebnisse aufgrund der Geometrie oder der Anzahlen festlegen können.

Die Wahrscheinlichkeit einen roten Tischtennisball zu ziehen, beträgt $\frac{4}{10} = 40\,\%$. Beim Wetten würden Sie eher auf "weiß" setzen.
Die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln beträgt für jede Augenzahl $\frac{1}{6} \approx 16{,}7\,\%$. Beim Wetten würden Sie keine bestimmte Augenzahl bevorzugen.





Aufgabe 8.9 **(MJ6B6j)**

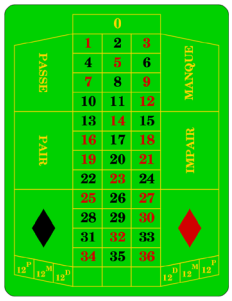
a) Geben Sie für jedes Glücksrad die Ergebnismenge und eine Tabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung an.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jeweils eine gerade Zahl erzielt?







Aufgabe 8.10 **(HrdRSL)**



a) Beim Roulette gibt es verschiedene Spielstrategien. So können Sie z. B. auf rot bzw. schwarz setzen oder auf gerade bzw. ungerade. Formulieren Sie die Ergebnismengen.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel auf ein rotes Feld fällt?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel auf eine Zahl unter 10 fällt?

Aufgabe 8.11 **(QLzuTe)**

a) Geben Sie für jeden der beiden Würfel die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augenzahlen beim Werfen an.
b) Jeder Würfel wird 300-mal geworfen. Wie oft erwarten Sie jeweils eine Zahl unter "5"?





Aufgabe 8.12 **(bQ7svf)**

Nehmen Sie an, dass alle Tage des Jahres als mögliche Geburtstage gleich wahrscheinlich sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, der nicht in einem Schaltjahr geboren ist,

a) am 12. Januar, b) im März, c) am 29. Februar

Geburtstag hat.

Aufgabe 8.13 **(7HzyTd)**

Welche Begründung ist gerechtfertigt, welche annähernd gerechtfertigt, welche falsch?

a) Es gibt zwölf Monate, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person im Januar Geburtstag hat, $\frac{1}{12} \approx 8{,}3\,\%$.
b) Es gibt sieben Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in diesem Jahr an einem Sonntag Geburtstag hat, $\frac{1}{7} \approx 14{,}3\,\%$.
c) Es gibt sieben Wochentage, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass der 1. Advent auf einen Montag fällt, $\frac{1}{7} \approx 14{,}3\,\%$.
d) Ein Bierdeckel hat zwei Seiten. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass er beim Werfen auf die Oberseite fällt, $\frac{1}{2} = 50\,\%$.

Aufgabe 8.14 **(795pGT)**

Das nebenstehende Glücksrad wird einmal gedreht. Geben Sie die Ergebnismengen und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung an, wenn Sie …

a) … auf die Zahlen achten, b) … auf die Farben achten.



Aufgabe 8.15 **(B78LLL)**

Eine Lostrommel enthält 400 Lose. Die Hälfte sind Nieten, 80 % des Restes ergeben Trostpreise, die übrigen Lose sind Gewinne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das erste Los …

a) … ein Gewinnlos, b) … ein Trostpreis, c) … eine Niete, d) … keine Niete?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



8.3 DAS GESETZ DER GROSSEN ZAHL

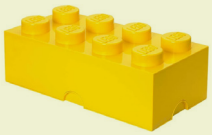
Empirisches Gesetz der großen Zahl

Bei einem Zufallsexperiment gibt die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses an, welche relative Häufigkeit Sie für das Ergebnis bei Versuchswiederholungen etwa erwarten können. Diese Eigenschaft können Sie bei einem Zufallsversuch ausnutzen, bei dem die Wahrscheinlichkeiten nicht direkt aufgrund der Symmetrien zu ermitteln sind.

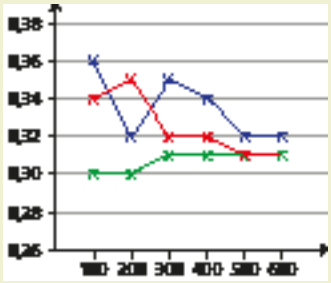
Wenn Sie ein Zufallsexperiment sehr oft durchführen, stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten für die Ergebnisse. Aufgrund relativer Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen können Wahrscheinlichkeitsverteilungen festgelegt werden. Dabei achten Sie auf mögliche Symmetrien und darauf, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten 100 % ergibt.

Beispiel

Wenn Sie z. B. einen Legostein werfen, kennen Sie die Wahrscheinlichkeit, dafür dass die sechs "Noppen" oben liegen nicht. Mithilfe von langen Wurfserien können Sie diese aber schätzen. Die Tabelle zeigt die relativen Häufigkeiten von drei solchen Wurfserien sowie ein zugehöriges Diagramm.



Anzahl der Würfe	relative Häufigkeit für "Noppen oben"		
	Serie 1	Serie 2	Serie 3
100	0,30	0,36	0,34
200	0,30	0,32	0,35
300	0,31	0,35	0,32
400	0,31	0,34	0,32
500	0,31	0,32	0,31



Man erkennt, dass die relativen Häufigkeiten mit zunehmender Wurfanzahl weniger schwanken.

Bei einer weiteren Serie von 500 Würfen wurden die relativen Häufigkeiten für alle Seiten des Legosteins ermittelt. Bei der Festlegung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung können weitere Überlegungen einfließen. So machen Sie die Annahme, dass aufgrund der Symmetrie des Legosteins die Seiten L_1 und L_2 sowie K_1 und K_2 gleich wahrscheinlich sind. Durch Mittelwertbildung erhalten Sie z. B. eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche die Symmetrie berücksichtigt.

Seite	L_1	L_2	K_1	K_2	N	U
H	58	44	2	3	155	238
h (in %)	12	8,8	0,4	0,6	31	48

Seite	L_1	L_2	K_1	K_2	N	U
Wahrscheinlichkeit (in %)	10	10	0,5	0,5	31	48

L_1/L_2 = lange Seite 1 und 2
K_1/K_2 = kurze Seite 1 und 2
N = Noppen
U = Unterseite

Aufgabe 8.16 (ciXgWB)

Wenn Sie eine Flügelmutter auf den Seiten weiß bzw. schwarz markieren, gibt es beim "Würfeln" drei Ergebnisse. Geben Sie aufgrund der Häufigkeiten unten eine plausible Wahrscheinlichkeitsverteilung an.



weiß	schwarz	Boden
210	186	72

Aufgabe 8.17 (ECD7pA)

Zum Beispiel bedeutet das Verhältnis 1 : 2 : 4 für die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$ und $\frac{4}{7}$.

In einer Urne liegen Kugeln, die jeweils einen der Buchstaben a, b, c und d tragen. Es wurde sehr oft eine Kugel gezogen, der Buchstabe notiert und alle Kugeln wieder durchmischt. Hierbei stellen Sie fest, dass a, b, c und d im Verhältnis 7 : 4 : 6 : 8 gezogen wurden. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

Aufgabe 8.18 (VLqMWz)

Die Tabelle zeigt die Ergebnisse von Blutgruppenuntersuchungen bei verschiedenen Populationen.

a) Legen Sie für jede Population eine mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung fest.

b) Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Gesamtbevölkerung an.

	0	A	B	AB
Deutsche	9.376	10.918	3.725	1.670
Japaner	5.269	6.671	3.862	1.752
Isländer	501	289	86	24
Inuit	149	119	0	2
Indianer	110	9	5	0

Aufgabe 8.19 (vwwgyF)

Nina wirft einen Reißnagel 250-mal und erhält 177-mal Kopf, Mike erhielt in 500 Würfen 322-mal Kopf und Sebastian in 750 Würfen 466-mal Kopf.
Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten in Prozent und beurteilen Sie die drei möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Ergebnisse *Kopf* und *Seite*.



Aufgabe 8.20 (LGPU4T)

Bei drei Würfeln wird vermutet, dass die "3" zu häufig vorkommt.

1. Würfel A wird 30-mal geworfen und es erscheint 8 mal die "3".
2. Bei Würfel B kommt bei 300 Würfen 80-mal die "3".
3. Würfel C zeigt bei 3000 Versuchen 800-mal die "3".

Begründen Sie, bei welchem Würfel Sie annehmen, dass er "falsch" ist.

Aufgabe 8.21 (p2GrE6)

Am 01.01.2021 waren in Deutschland 43.431.124 Pkw angemeldet. Mike steht an der Straße und beobachtet Autos. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist …

a) … der nächste Pkw von der Marke Skoda?

b) … der nächste Pkw von einem baden-württembergischen Hersteller?

c) … der nächste Pkw kein VW?

d) … der Anfangsbuchstabe der nächsten Pkw-Marke ein M oder ein O?

e) … der 7. vorbeifahrende Pkw von der Marke Skoda? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus a) und erklären Sie Ihre Beobachtung.

Marke	Anzahl
Audi	3.929.834
BMW	5.393.346
Ford	4.716.318
Mercedes	5.633.493
Opel	7.038.521
Skoda	1.917.179
Toyota	1.875.105
VW	12.927.328

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



8.4 EREIGNISSE UND SUMMENREGEL

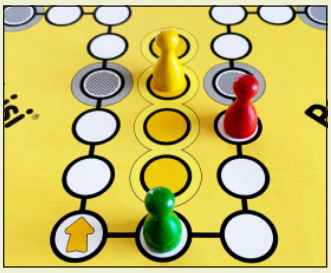
Definition ⓘ

Die **Summenregel** besagt, dass Sie die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ergebnisses erhalten, indem Sie die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse addieren.

Alle Ergebnisse, die nicht im Ergebnis E liegen, bilden das **Gegenereignis $\overline{E}$** von E.
Daher gilt: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

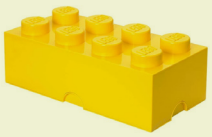
Beispiel Ⓑ

Die rote Figur soll die grüne Figur überholen. Dazu muss eine der drei Augenzahlen 4, 5 oder 6 gewürfelt werden. Zusammengefasst wird also das Ereignis E: "Augenzahl größer als 3" mit der Ergebnismenge S = {4; 5; 6} betrachtet. Für jedes Ergebnis des Laplace-Experiments ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.
Für die Wahrscheinlichkeit P vom Ereignis E gilt daher
$P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \triangleq 50\,\%$.



Verwenden Sie zum Würfeln den Legostein aus dem Beispiel von Seite 263, so ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Überholen. Es gilt:
P(E) = P(4) + P(5) + P(6)
= 31 % + 0,5 % + 10 % = 41,5 %

Seite	L_1	L_2	K_1	K_2	N	U
Würfelwert	1	6	2	5	4	3
Wahrscheinlichkeit (in %)	10	10	0,5	0,5	31	48



Beispiel Ⓑ

Mike kauft Nina eine Tüte Schokolinsen. In der Tüte sind 300 Schokolinsen enthalten. Davon sind 132 blau, 102 gelb und der Rest rot. Nun soll die Wahrscheinlichkeit für die erste gezogene Linse bei folgenden Ereignissen bestimmt werden:
E: "rote Linse" F: "blaue oder rote Linse" G: "keine rote Linse"

Dazu bestimmen Sie zunächst die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Linsen:
Für die blaue Linse erhalten Sie eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{132}{300} = 44\,\%$.
Für die gelbe Linse erhalten Sie eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{102}{300} = 34\,\%$.
Für die rote Linse erhalten Sie eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{300 - 132 - 102}{300} = \frac{66}{300} = 22\,\%$.

Somit können Sie die Wahrscheinlichkeiten für die gegebenen Ereignisse bestimmen:
P(E) = 22 %
P(F) = 44 % + 22 % = 66 %
$P(G) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - 22\,\% = 78\,\%$

Aufgabe 8.22 (4ZNmKW)

a) Bestimmen Sie für das Glücksrad die Wahrscheinlichkeit für die Ergebnisse "blau", "gelb" und "grün".

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: "gelb oder blau".



Farbe	Wahrscheinlichkeit
blau	21 %
gelb	46 %
grün	33 %

c) Lösen Sie b) nochmal, aber nun mit den Wahrscheinlichkeiten aus der Tabelle.

Aufgabe 8.23 (YEdw5A)

In der Bonbondose von Mike und Nina sind noch fünf Karamellbonbons, drei Vitamin-, vier Himbeer-, sieben Zitronen- und elf Pfefferminzbonbons.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Mike ein Bonbon seiner Lieblingssorten Karamell oder Zitrone, wenn er ohne hinzuschauen ein Bonbon aus der Dose nimmt?

b) Nina hat Lust auf Himbeere oder Pfefferminze. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie ein Bonbon dieser Sorte, wenn Mike ihr den Vortritt lässt?

c) Was kann sich bei b) ergeben, wenn Mike zuerst ein Bonbon nimmt?

Aufgabe 8.24 (NKNQyg)

Beim Spiel *Mensch ärgere dich nicht* ist der Spieler mit den gelben Figuren am Zug. Mit welcher Wahrscheinlichkeit …



a) … schlägt er eine andere Figur?

b) … erreicht er sein Haus?

c) … geschieht keins von beiden?

Aufgabe 8.25 (etm8Q3)

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schwangere ihr Kind an einem Samstag oder Sonntag zur Welt bringt. Welche Annahme machen Sie?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, an einem Tag geboren zu werden, in dem der Buchstabe "s" vorkommt?

c) Heutzutage werden am Wochenende nicht mehr so viele Kinder geboren wie früher, weil der Geburtstermin durch Medikamente beeinflusst werden kann. Wie verändern sich dadurch die Ergebnisse in a) und b)?

Aufgabe 8.26 (NYibDi)

Bei einer Umfrage zum täglichen Fernsehkonsum ergab sich diese Tabelle.

Tageskonsum	≤ 1 Std.	> 1 bis 2 Std.	> 2 bis 3 Std.	> 3 bis 4 Std.	> 4 Std.
Anteil	10,4 %	20,1 %	33,2 %	19,8 %	16,5 %

a) Beim Jahrgangsstufenfest sind 98 Personen anwesend. Wie viele Personen sind schätzungsweise darunter, die mehr als zwei Stunden täglich fernsehen?

b) Welche Annahme machen Sie bei der Berechnung in Teil a)?

Aufgabe 8.27 (3jTGFi)

Zeichnen Sie ein Glücksrad, mit den Farben blau, gelb und grün, bei dem der Zeiger …

a) … mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % auf "gelb" oder "blau",

b) … mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % auf "gelb" oder "grün",

c) … mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % auf "blau" oder "grün" stehen bleibt.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



8.5 MEHRSTUFIGE ZUFALLSEXPERIMENTE

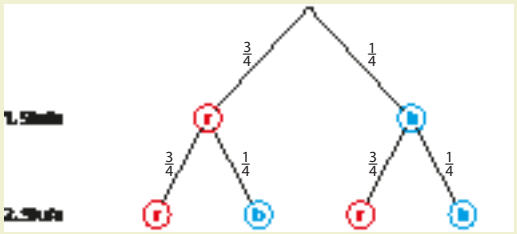
Situationsbeschreibung
Mike und Nina tanzen sehr gerne. In ihrer Tanzschule *ADTV – Tanzschule Thiele* in Schwerte sind an einem bestimmten Trainingsabend noch fünf weitere Paare anwesend. An diesem Abend werden für zwei Tanzrunden die Partner ausgelost.
Mike möchte natürlich gerne mit seiner großen Liebe Nina tanzen. Können Sie ihm sagen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass er beide Runden mit ihr tanzt?

Definition: Wahrscheinlichkeiten mit einem Baumdiagramm bestimmen
Die **Pfadregel** besagt, dass Sie die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis erhalten, indem Sie die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades *multiplizieren*.
Die **Summenregel** besagt, dass Sie die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses E erhalten, indem Sie die Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse *addieren*.

Beispiel
Es gibt Zufallsexperimente, die aus mehreren Stufen bestehen, z. B. das mehrmalige Drehen eines Glücksrads. Hierbei gilt die Abfolge der Einzelergebnisse als Ergebnis.



Zweimaliges Drehen des Glücksrades ist ein **mehrstufiges Zufallsexperiment**. Die Ergebnisse erhalten Sie mit einem **Baumdiagramm**. Die Ergebnismenge können Sie als Menge in der Form S = {rr, rb, br, bb} notieren. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten werden bestimmt, indem Sie die Wahrscheinlichkeiten längs des dazu gehörigen Pfades multiplizieren (**Pfadregel**), z. B. $P(rb) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.



E	rr	rb	br	bb
P(E)	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Dabei werden die Anteile von Anteilen bestimmt (hier $\frac{1}{4}$ von $\frac{3}{4}$).

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung stellt Sie übersichtlich in einer Tabelle dar.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E = {rr, rb, br} bestimmen Sie mit der **Summenregel**:
$P(E) = P(rr) + P(rb) + P(br) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$.

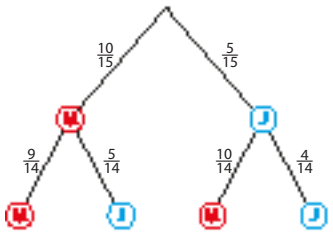
Da bei diesem Beispiel in E nur das Ergebnis {bb} fehlt, könnten Sie die Wahrscheinlichkeit schneller über das Gegenereignis $\overline{E} = \{bb\}$ erhalten, denn es gilt: $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Aufgabe 8.28 (N1BZJa)

Beantworten Sie Mikes Frage aus der Situationsbeschreibung.

Aufgabe 8.29 (nvQ7d8)

In einem Kasten sind 15 Zettel mit den Namen von zehn Schülerinnen und fünf Schülern. Zwei Zettel werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen.

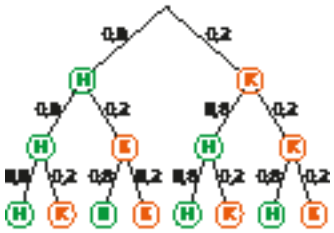


a) In dem gegebenen Baumdiagramm sehen Sie an dem jeweiligen Pfad zu M drei verschiedene Wahrscheinlichkeiten (im Gegensatz zu dem Beispiel auf Seite 267, bei dem für "rot" immer die gleiche Wahrscheinlichkeit gegeben war). Erklären Sie dies plausibel.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Namen von einem Jungen und einem Mädchen gezogen werden (also das Ereignis E = {MJ, JM}).

Aufgabe 8.30 (jraFVD)

Versuchsreihen haben gezeigt, dass ein Medikament mit 80 % Wahrscheinlichkeit heilende Wirkung zeigt. Ein Arzt behandelt drei Patienten mit diesem Medikament. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.



a) A: alle Patienten werden geheilt

b) B: nur ein Patient wird geheilt

c) C: mindestens ein Patient wird geheilt

Aufgabe 8.31 (QEMhLw)

Eine Schale enthält vier rote und drei blaue Kugeln. Es werden blind zwei Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit …

a) … sind es zwei rote,

b) … ist eine blau und eine rot,

c) … ist mindestens eine rote dabei,

d) … ist höchstens eine blaue dabei?

Aufgabe 8.32 (tiusP7)

Von einem Medikament ist bekannt, dass es in $\frac{3}{4}$ aller Fälle eine Krankheit heilt. Drei Patienten werden damit behandelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis und beschreiben Sie jeweils das Gegenereignis in Worten.

a) A: Es wird kein Patient geheilt

b) B: Genau ein Patient wird geheilt

c) C: Nur ein Patient wird nicht geheilt

d) D: Höchstens 2 Patienten werden geheilt



Aufgabe 8.33 (1qGDyX)

Das Glücksrad wird dreimal gedreht. Geben Sie die Ergebnismenge an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die gegebenen Ereignisse? Erstellen Sie dazu ein Baumdiagramm.

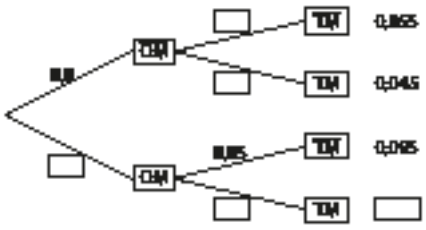
a) A: Gelb erscheint dreimal

b) B: Gelb erscheint mindestens einmal

c) C: Blau erscheint genau einmal

d) D: Blau erscheint mindestens zweimal

Aufgabe 8.34 (Ssqn6C)



Das Baumdiagramm gibt die Wahrscheinlichkeit von Mängeln bei der Produktion von Toastern wieder. Dabei wird zunächst auf optische, dann auf technische Mängel untersucht.

a) Füllen Sie die leeren Felder im Baumdiagramm aus.

b) Wie viel Prozent der Toaster werden nur mit einem optischen Mangel günstiger verkauft?

c) Wie viel Prozent der Toaster haben keine Mängel?

d) Wie viel Prozent der Toaster werden aufgrund von technischen Mängeln aussortiert?

Abkürzungen
OM: optischer Mangel
TM: technischer Mangel
$\overline{\text{OM}}$: kein optischer Mangel
$\overline{\text{TM}}$: kein technischer Mangel

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



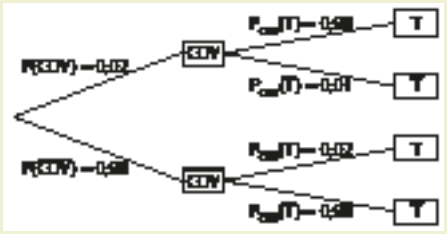
8.6 BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

Situationsbeschreibung
Mike und Nina möchten nach dem Corona-Lockdown ein paar Tage in die Niederlande. Dort dürfen sie aber nur nach einem negativen Test einreisen. Nun besteht aber die Gefahr, dass Mike positiv getestet wird, obwohl er sich nicht infiziert hat. Dann hätte das Gesundheitsamt den beiden unbegründeterweise einen Strich durch die Rechnung gemacht.
Andersherum kann es auch passieren, das Mike negativ getestet wird, obwohl er sich infiziert hat. Das ist natürlich schlecht für die Niederlande, weil Mike dort weitere Personen anstecken kann.

Definition
Die Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ bezeichnet die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ergebnis B unter der Voraussetzung, dass Ereignis A schon eingetreten ist.
Das Ergebnis B ist also von dem Ergebnis A abhängig. Man spricht daher von einer bedingten Wahrscheinlichkeit

ⓘ
Sie haben die bedingte Wahrscheinlichkeit schon in Aufgabe 8.29 a) beschrieben.

Beispiel
Ein PCR-Test[8] ist das sicherste Verfahren, um eine aktuelle Sars-CoV-2-Infektion zu bestätigen oder auszuschließen. Bei diesen Tests wird in mindestens 99 % der Fälle ein Corona-Infizierter als infiziert erkannt und in 98 % der Fälle wird ein Nicht-Infizierter als nicht infiziert erkannt[9].
Zur Zeit sind rund 2 % der deutschen Bevölkerung mit SARS-CoV-2 infiziert[10].



Abkürzungen: COV bedeutet mit Sars-CoV-2 infiziert, $\overline{\text{COV}}$ nicht mit Sars-CoV-2 infiziert; T steht für einen positiven Test und $\overline{\text{T}}$ für einen negativen Test.

Gegeben ist das Ereignis E: "ein Nichtinfizierter wird positiv getestet".
Die formale Schreibweise für die bedingte Wahrscheinlichkeit beispielsweise von T unter der Bedingung $\overline{\text{COV}}$ lautet nun $P_{\overline{\text{COV}}}(T) = 0{,}02$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nichtinfizierter positiv getestet wird, ist mit der Pfadregel gegeben durch: $P(E) = P(\overline{\text{COV}}; T) = P(\overline{\text{COV}}) \cdot P_{\overline{\text{COV}}}(T) = 0{,}98 \cdot 0{,}02 = 0{,}0196 \mathrel{\hat{=}} 1{,}96\,\%$.

Ⓑ

YouTube

Aufgabe 8.35 (ybC54J)
Geben Sie zu jedem Ende des obigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mike in die Niederlande einreisen darf, da er negativ getestet wurde, obwohl er infiziert ist?

8 englische Bezeichnung *Polymerase Chain Reaktion*, auf deutsch *Polymerasekettenreaktion*
9 vgl. https://www.netdoktor.de/krankheiten/coronavirus-infektion/wie-zuverlaessig-sind-corona-tests, abgerufen am 26.12.2020
10 vgl. https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Fallzahlen.html, abgerufen am 26.12.2020

Aufgabe 8.36 (DcT7jw)

Bei einer Wahl wird Partei A von 40 % der Wählerinnen und Wähler gewählt. Von Wählern der Partei A sind 30 % junge Wähler (18 bis 30 Jahre). Bei den Wählern der anderen Parteien liegt der Anteil der jungen Wähler bei 20 %.

a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm zu diesen Daten.

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit von Ereignis E: "Wähler wählt nicht Partei A und ist älter als 30 Jahre" in formaler Schreibweise an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für E.

Aufgabe 8.37 (vmVWJj)

In einem Zoo sind 60 % der Tiere Säugetiere (S). Von den Säugetieren haben 80 % vier Beine (vierB). Bei den anderen Tieren sind es 10 %, die vier Beine haben.

a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm, das den Schachverhalt wiedergibt.

b) Lesen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_S(\overline{\text{vierB}})$ ab.

c) Lesen Sie am Baumdiagramm ab: Welches Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 0,36?

Aufgabe 8.38 (xy9rNg)

Anmerkung
Diese Befragungsstrategie führt dazu, das bei peinlichen Fragen das Befragungsergebnis die tatsächlichen Verhältnisse wiedergibt. Der Befragte weiß nämlich im Einzelfall nicht, ob ein "Ja" ehrlich ist oder durch die Münze hervorgebracht wurde.

Eine Befragung wird durchgeführt um herauszufinden, wie hoch der Anteil derjenigen ist, die schon mindestens einmal in einem Geschäft gestohlen haben. Dafür wird zunächst eine Münze geworfen, die derjenige, der die Befragung durchführt, nicht sehen kann. Zeigt sie Wappen (W), soll der Befragte die Wahrheit sagen; zeigt sie Zahl (Z), soll der Befragte mit "Ja" antworten. Bei der Befragung sagen 45,5 % "Nein" und 54,5 % "Ja".
Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms den Anteil derjenigen, die mindestens einmal geklaut haben, also P(W,J).
Hinweis: Unterscheiden Sie auf der ersten Stufe zwischen "W" und "Z". Überlegen Sie dann, wie groß die Summe der beiden zu "J" führenden Pfade sein muss.

YouTube

ACHTUNG
Aufgabenteil c) ist für Sie evtl. nur sehr schwer zu lösen! Schauen Sie sich ggf. das Lösungsvideo dazu an.

Aufgabe 8.39 (UCWANJ)

Die Schokoladenmaschinen einer Schokoladenfabrik arbeiten unterschiedlich gut. Maschine A produziert 30 % der Schokolade und davon sind 97 % einwandfrei. Maschine B produziert ihre Produkte zu 99 % einwandfrei.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Maschine A eine beanstandete Schokolade produziert.

b) Wie viel Prozent der Schokoladen sind nicht einwandfrei?

c) Betrachten Sie die Gesamtproduktion an Schokoladen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine beanstandete Schokoladen von Maschine A produziert?

Aufgabe 8.40 (qdhuLP)

Ein Auto hat zwei voneinander unabhängige Bremskreise. Der eine funktioniert mit 99 %, der andere mit 98 % Wahrscheinlichkeit.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide zugleich defekt?

ⓘ

Definition

YouTube

Eine Alternative zum Baumdiagramm ist die **Vierfeldertafel**. Dabei werden die Wahrscheinlichkeiten für ein zweistufiges Zufallsexperiment mit den Ereignissen A und B in einer Tabelle dargestellt.

In der Summenspalte bzw. -zeile stehen Wahrscheinlichkeiten für A und B (und für ihre Gegenereignisse). In den anderen Feldern stehen die Pfadwahrscheinlichkeiten.

	A	$\overline{A}$	Summe
B	$P(B; A)$	$P(\overline{A}; B)$	**P(B)**
$\overline{B}$	$P(\overline{B}; A)$	$P(\overline{A}; \overline{B})$	$\mathbf{P(\overline{B})}$
Summe	**P(A)**	$\mathbf{P(\overline{A})}$	**1**

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten sind hierbei gegeben durch:

z. B. $P_A(B) = \frac{P(A; B)}{P(A)}$ oder $P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A}; B)}{P(B)}$

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Beispiel Ⓑ

Für die Corona-Test-Situation ergibt sich aufgrund der Werte, die Sie in Aufgabe 8.35 ausgerechnet haben, die folgende Vierfeldertafel. In den Feldern stehen dabei jeweils die Anteile aller Personen, d. h. in der Zelle P(COV; T) steht die Wahrscheinlichkeit für den Pfad COV-T.

	COV	$\overline{\text{COV}}$	Summe
T	P(COV; T) = 0,0198	P($\overline{\text{COV}}$; T) = 0,0196	**P(T) = 0,0394**
$\overline{\text{T}}$	P(COV; $\overline{\text{T}}$) = 0,0002	P($\overline{\text{COV}}$; $\overline{\text{T}}$) = 0,9604	**P($\overline{\text{T}}$) = 0,9606**
Summe	**P(COV) = 0,02**	**P($\overline{\text{COV}}$) = 0,98**	**1 = P(T) + P($\overline{\text{T}}$) = P(COV) + P($\overline{\text{COV}}$)**

Aufgabe 8.41 (yuBwaM)

Gegeben ist eine Vierfeldertafel.

	U	$\overline{\text{U}}$	Summe
F	0,3	0,2	
$\overline{\text{F}}$	0,4		
Summe		**0,3**	**1**

a) Vervollständigen Sie diese.
b) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm und beschriften Sie dieses.
c) Fassen Sie die Informationen in Worte. Dabei sollen die Ereignisse so interpretiert werden: F: weiblich, U: wöchentlich mehr als 7h Hausaufgaben (Sie benötigen dafür die bedingten Wahrscheinlichkeiten).

Aufgabe 8.42 (wqeJfw)

In einer Klasse sind 14 Mädchen und 12 Jungen. Von den Jungen sind 8 im Sportverein, von den Mädchen 10.

a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm.
b) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel.
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zufälliger Auswahl eines Mädchens, dass sie nicht im Sportverein ist?

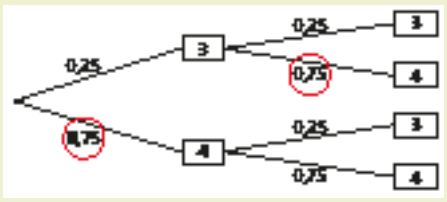
Definition 1 ⓘ

Zwei Ergebnisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn $P(A) = P_B(A)$ gilt. Dann ist auch $P(B) = P_A(B)$.
Wenn $P(A) \neq P_B(A)$ gilt, dann sind die Ereignisse A und B **stochastisch abhängig**.

Beispiel 1 Ⓑ

Ein Glücksrad wird zwei mal gedreht. Untersuchen Sie die Ereignisse A: "3 beim ersten Drehen" und B: "4 beim zweiten Drehen" auf stochastische Abhängigkeit.





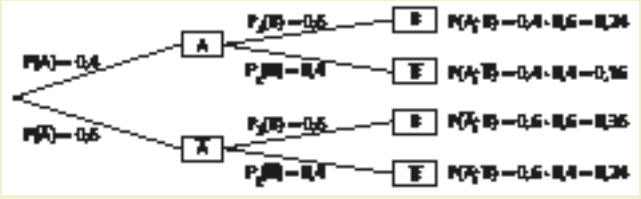
$P(4) = P_3(4) = 0{,}75$ stochastisch unabhängig

Definition 2 ⓘ

Zwei Ergebnisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn $P(A) \cdot P(B) = P(A; B)$

Beispiel 2 (stochastisch unabhängig) Ⓑ

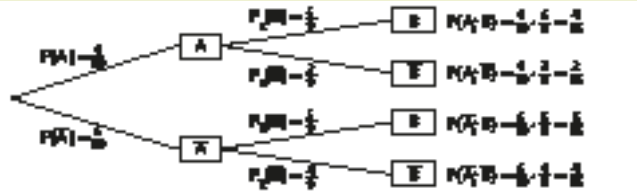
Aus einer Urne mit 4 weißen und 6 roten Kugeln werden zwei Kugeln gezogen.
A: "Eine weiße Kugel im ersten Zug." B: "Keine weiße Kugel im zweite Zug."
Stellen Sie dieses Zufallsexperiment **mit Zurücklegen** in einem Baumdiagramm dar:



Für die Überprüfung auf stochastische Unabhängigkeit, benötigen Sie
$P(A) = 0{,}4$,
$P(B) = P(A; B) + P(\overline{A}; B) = 0{,}24 + 0{,}36 = 0{,}6$ und
$P(A; B) = 0{,}24$.

Sie überprüfen nun, ob $P(A) \cdot P(B) = P(A; B)$ und erhalten: $0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$
Somit sind die Ereignisse A und B *stochastisch unabhängig*.

Ⓑ **Beispiel 3 (stochastisch abhängig)**
Stellen Sie dieses Zufallsexperiment **ohne Zurücklegen** in einem Baumdiagramm dar:



Für die Überprüfung auf stochastische Unabhängigkeit, benötigen Sie
$P(A) = \frac{4}{10}$,
$P(B) = P(A; B) + P(\overline{A}; B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15}$ und
$P(A; B) = \frac{4}{15}$.

Sie überprüfen nun, ob $P(A) \cdot P(B) = P(A; B)$ und erhalten: $\frac{4}{10} \cdot \frac{9}{15} = \frac{6}{25} \neq \frac{4}{15}$
Somit sind die Ereignisse A und B *stochastisch abhängig*.

Aufgabe 8.43 (uq57V2)
In einem Skatspiel mit 32 Karten gibt es 4 Buben. 2 Karten werden gezogen.
Ereignis A ist "Bube im ersten Zug".
Ereignis B ist "Kein Bube im zweiten Zug".
Untersuchen Sie die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit, …
a) … wenn die gezogene Karte nicht zurückgelegt wird.
b) … wenn die gezogene Karte zurückgelegt wird.

Aufgabe 8.44 (9n7yNw)
Beim Qualitätstest von Bauteilen wurde festgestellt, dass die Fehler A und B auftreten können. Fehler A tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % auf, Fehler B mit 15 %. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten beider Fehler ist 6 %. Untersuchen Sie das Auftreten von Fehler A und B auf stochastische Abhängigkeit.

Hilfestellung
Sollten Sie bei den vorherigen Aufgaben Hilfe benötigen, können Sie dies hier notieren:

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



8.7 KOMBINATORIK

Situationsbeschreibung
Mike verbringt im Sommer viele Wochenende auf dem Sportplatz. Dort trainiert er mit fünf Arbeitskollegen für einen 100-Meter-Lauf. Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es für den Zieleinlauf? Wie viele verschiedene Kombinationen von Dreiergruppen sind für die ersten drei Plätze möglich?
Diese Möglichkeiten auszuzählen ist ziemlich aufwendig, weshalb schlaue Mathematiker eine Methode entdeckt haben, dies zu berechnen.

Definition
Mit den Hilfsmitteln der Kombinatorik bestimmen Sie Anzahlen unter unterschiedlichsten Bedingungen. Sie unterscheiden im Folgenden zwischen einer Ziehung **mit Betrachtung der Reihenfolge (Permutation)** und eine Ziehung **ohne Betrachtung der Reihenfolge (Kombination)**.
Bei der Ziehung von k Elementen aus einer Menge von n Elementen gibt es je nach Zählmodell die folgenden Anzahlen von Möglichkeiten:

Das Ziehen **ohne Zurücklegen mit Betrachtung der Reihenfolge** (Permutation):

$$P_n(k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Das Ziehen **ohne Zurücklegen ohne Betrachtung der Reihenfolge** (Kombination):

$$C_n(k) = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Aussprache
Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ (sprich: "n über k") ist **kein Vektor**, sondern ein Ausdruck der Kombinatorik.

Erläuterung: Ziehen ohne Zurücklegen mit Betrachtung der Reihenfolge
Bei einem sportlichen Wettkampf ist es nicht nur wichtig, wer die ersten drei sind, sondern auch, wer erster, wer zweiter und wer dritter wird. Bei 8 Startern bedeutet dies, dass für die erste Position 8 Personen zur Auswahl stehen, für die zweite nur noch 7 Personen und für die dritte 6 Personen. Da jede Möglichkeit mit jeder anderen verknüpfbar ist, müssen die Anzahlen multipliziert werden. Also ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen (Permutationen) berechenbar mit $P_8(3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.
$P_8(3)$ bedeutet also: Anzahl der Reihenfolgen für die Auswahl von 3 Elementen aus einer Menge mit 8 Elementen ohne Zurücklegen gezogener Elemente.

Erläuterung: Ziehen ohne Zurücklegen ohne Betrachtung der Reihenfolge
Wenn drei Schokoriegel unter 21 Personen verlost werden, ist es nur wichtig, welche drei Personen einen bekommen und nicht in welcher Reihenfolge sie ihn bekommen. Nach den Überlegungen von oben würde es $21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$ verschiedene Reihenfolgen für die Auswahl geben. Weiterhin gibt es aber $P_3(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ verschiedene Reihenfolgen für jede ausgewählte Dreiergruppe. Es muss also durch die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten der Dreiergruppen untereinander geteilt werden, um die Anzahl der verschiedenen Kombinationen zu bekommen. Darum gibt es $C_{21}(3) = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1330$ verschiedene Kom-

binationen von Dreiergruppen. $C_{21}(3)$ bedeutet: Anzahl der verschiedenen Dreiergruppen, die aus einer Menge mit 21 Elementen ohne Zurücklegen gezogen werden können. Wegen der häufigen Verwendung einer solchen Rechnung schreiben Sie in der Regel $\binom{21}{3}$ und meinen damit die Anzahl der Kombinationen.

Ⓑ **Beispiel**

Am Ende jeden Jahres werden immer 5 Mitarbeiter aus einer Menge von 25 Mitarbeitern ausgewählt, die das Jahresabschluss-Frühstück organisieren müssen.

Wenn die Reihenfolge der Ziehung wichtig ist (weil z. B. der zuerst gezogene immer die Brötchen holt, der zweite immer die Getränke etc.), müssen Sie sich für das Zählmodell "Ziehen mit Reihenfolge und ohne Zurücklegen" entscheiden und erhalten:

$$P_{25}(5) = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 = 6.375.600$$

Wenn die Reihenfolge der Ziehung nicht wichtig ist (weil die Mitarbeiter alle gemeinsam einkaufen gehen), müssen Sie sich für das Zählmodell "Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen" entscheiden und erhalten:

$$C_{25}(5) = \binom{25}{5} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 53.130$$

Mit Reihenfolge gibt es also rund 6,4 Millionen Möglichkeiten und damit 120 mal mehr Möglichkeiten als ohne Reihenfolge mit rund 53 Tausend Möglichkeiten.

Aufgabe 8.45 (3FuBHb)

Beantworten Sie Mikes Fragen aus der Situationsbeschreibung.

Aufgabe 8.46 (uuKshi)

Damenwahl
Mit Damenwahl wird eine Umkehrung der gewöhnlichen Aufforderungs-Reihenfolge beim Paartanz bezeichnet, nicht der Herr spricht die Dame an, sondern die Dame den Herrn.

In Mikes und Ninas Tanzschule ist Damenwahl. Es sind 10 Männer und 10 Frauen anwesend.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Reihenfolgen für die Wahl der 10 Männer.
b) Drei Frauen wollen nicht tanzen. Wie viele Reihenfolgen sind jetzt möglich für die Auswahl der 7 Männer?
c) Den Frauen und Männern ist die Reihenfolge egal. Wie viele Kombinationen sind dann für die Situation aus den Teilaufgaben a) und b) möglich? Erklären Sie das überraschende Ergebnis für die Situation aus Teilaufgabe a).

Aufgabe 8.47 (C8pGir)

Vor der Tür der Anmeldung einer Arztpraxis stehen 15 Patienten.

a) Wie viele Reihenfolgen für die Behandlung der Patienten gibt es?
b) Die Praxis hat 3 Behandlungsräume. Wie viele Dreier-Kombinationen gibt es für den ersten Patientenaufruf?
c) Wie viele Reihenfolgen sind es, wenn zunächst 8 Frauen drankommen?



Aufgabe 8.48 (fYK5xz)

In einer Tüte sind 13 verschiedene Bonbons. Davon dürfen vier Kinder je eins mit geschlossenen Augen ziehen.

a) Wie viele Reihenfolgen für die Ziehung der vier Bonbons gibt es?
b) Wie viele Kombinationen sind es?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



8.8 BERNOULLI-EXPERIMENTE

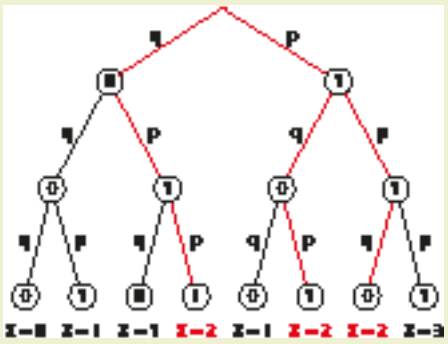
Situationsbeschreibung
Mike und Nina haben im Garten einen Bastketballkorb hängen. Nina trifft 60 % ihrer Freiwürfe und Mike trifft 80 % seiner Freiwürfe.
Worauf würden Sie eher wetten – dass Nina oder dass Mike genau zwei Freiwürfe verwandelt?

Definition
Eine **Bernoulli-Kette** der Länge n besteht aus n unabhängigen **Bernoulli-Experimenten** mit den Ergebnissen 1 ("Treffer") und 0 ("Niete").
Beschreibt die **Zufallsgröße X** die Anzahl der Treffer und ist p die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer, so erhalten Sie die Wahrscheinlichkeit für k Treffer mit der **Bernoulli-Formel**:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X heißt **Binomialverteilung**. X heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p.

Erläuterung: Definition
Bei vielen Zufallsversuchen interessieren nur zwei Ereignisse wie "Erfolg" bzw. "Treffer" (kurz "1") oder "Misserfolg" bzw. "Niete" (kurz "0"). Man spricht dann von Bernoulli-Experimenten. Wenn Sie ein Bernoulli-Experiment n-mal wiederholen, wobei die Durchführungen voneinander unabhängig sind, sprechen Sie von einer Bernoulli-Kette der Länge n. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Erfolge. Ihre Werte liegen zwischen 0 und n.



Ein Multiple-Choice-Test enthält drei Fragen mit jeweils vier Antworten, von denen nur eine richtig ist. Wenn ein Kandidat rein zufällig eine Antwort ankreuzt, liegt eine Bernoulli-Kette der Länge 3 vor. Ist die Antwort richtig, gilt das als Erfolg ("1"), sonst als Misserfolg ("0"). Die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg beträgt $p = \frac{1}{4}$, für einen Misserfolg $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$
Zahl der Pfade	$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} = 3$	$\binom{3}{2} = 3$	$\binom{3}{3} = 1$

Die Zufallsgröße X, welche die Zahl der richtigen Antworten angibt, berechnen Sie mit der Pfadregel. Die Wahrscheinlichkeit für zwei richtige Antworten erhalten Sie z. B. so:

$$P(X = 2) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{3-2} = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{9}{64} \approx 0{,}1406 \triangleq 14{,}06\ \%.$$

ⓘ

YouTube



ⓘ

Zum Baumdiagramm
0 = Antwort falsch
1 = Antwort richtig
$q = \frac{3}{4}$
$p = \frac{1}{4}$

Denn zu dem Ereignis "X = 2" gehören drei Ergebnisse, deren Wahrscheinlichkeit jeweils $p^2 \cdot q$ beträgt. Die Anzahl der Pfade mit den zwei Treffern bei drei Durchführungen bezeichnen Sie mit $\binom{3}{2}$. Diese Pfade sind rot markiert.
Wenn der Test n Fragen enthält, können Sie P(X = k) mithilfe eines Teilbaumes bestimmen. Jeder Pfad mit k Treffern hat die Wahrscheinlichkeit $p^k \cdot q^{n-k}$, mit q = 1 – p. Somit gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

wobei der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ die Anzahl der Pfade mit k Treffern angibt.

Ⓑ **Beispiel**

Beim Würfeln wünschen Sie sich hohe Augenzahlen "5 oder 6". Man würfel 5-mal. Mit der Bernoulli-Formel können Sie nun beispielsweise folgende Wahrscheinlichkeiten bestimmen:

1. Es werden genau dreimal hohe Augenzahlen gewürfelt.
2. Es werden mindestens dreimal hohe Augenzahlen gewürfelt.
3. Es werden höchstens zweimal hohe Augenzahlen gewürfelt.

X: Anzahl der Würfe mit hohen Augenzahlen. Für Erfolg: $p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

1. $P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{5-3} = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243} \approx 0{,}1646 \mathrel{\hat{=}} 16{,}46\,\%$

   Mit einer Wahrscheinlichkeit von 16,46 % fallen genau dreimal hohe Augenzahlen.

Merke
P(X ≥ 3) =
P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)

2. $P(X \geq 3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{17}{81} \approx 0{,}2099 \mathrel{\hat{=}} 20{,}99\,\%$

   Mit einer Wahrscheinlichkeit von 20,99 % fallen mindestens dreimal hohe Augenzahlen.

3. $P(X \leq 2) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{64}{81} \approx 0{,}7901 \mathrel{\hat{=}} 79{,}01\,\%$

   Mit einer Wahrscheinlichkeit von 79,01 % fallen höchstens zweimal hohe Augenzahlen.

Aufgabe 8.49 (ix8v4w)

Eine Münze wird sechsmal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen …

a) … genau drei Wappen, b) … mindestens 3 Wappen, c) … höchstens 3 Wappen?

Aufgabe 8.50 (FAk65T)

Bei einem Test gibt es acht Fragen mit je drei Antworten, von denen eine richtig ist. Nina kreuzt jeweils zufällig eine Antwort an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie …

a) … genau vier richtige Antworten,
b) … mindestens vier richtige Antworten,
c) … höchstens drei richtige Antworten,
d) … mehr als vier richtige Antworten?

Aufgabe 8.51 (Pg2NhY)

Beim maschinellen Abfüllen von Halbliter-Flaschen wird der Sollwert 500 cm^3 in der Regel nicht genau eingehalten. Der Hersteller garantiert aber, dass 98 % der Flaschen mindestens 495 cm^3 enthalten. Von den abgefüllten Flaschen wird eine Stichprobe von 20 Flaschen entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) … genau zwei Flaschen weniger als 495 cm^3 enthalten,
b) … höchstens zwei Flaschen weniger als 495 cm^3 enthalten?

Aufgabe 8.52 (F5iAaH)

Etwa 20 % einer Bevölkerung sind Linkshänder. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter zehn zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerung …

a) … kein Linkshänder ist,
b) … genau drei Linkshänder sind,
c) … mindestens ein Linkshänder ist.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



8.9 VERMISCHTE ÜBUNGSAUFGABEN

Aufgabe 8.53 (e8JSVf)

In einer Urne befinden sich 15 Kugeln. Diese sind nummeriert von 1 bis 15. Es wird zufällig eine Kugel entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

a) "Die gezogene Zahl ist eine Primzahl."
b) "Die gezogene Zahl ist durch drei teilbar."
c) "Die gezogene Zahl ist weder eine Primzahl noch durch drei teilbar."

Aufgabe 8.54 (Qg5TuF)

Ein Würfel wird zweimal nacheinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

a) "Es wird zweimal hintereinander eine Eins geworfen."
b) "Die Summe der Augenzahlen ist sieben."
c) "Beide Augenzahlen sind ungerade."

Aufgabe 8.55 (w47bmd)

Für die Halbfinalbegegnungen in einem Fußballturnier sollen die Spiele der letzten vier Mannschaften neu gelost werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der einzelnen möglichen Spielepaarungen?

Aufgabe 8.56 (jnU7wC)

Die Quadrate rechts zeigen das Spielfeld eines Bingospiels. Bei dieser Art von Bingo werden zwei Würfel geworfen. Die Augensumme der Würfel gibt jeweils die Bingozahl an und gewonnen hat derjenige, der als erstes sein komplettes Spielfeld gefüllt hat. Mike hat folgende Zahlen eingetragen:

12	4
1	11

a) Wie schätzen Sie Mikes Gewinnchancen auf einen Bingo ein?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die 4 ankreuzen zu können?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die 12 ankreuzen zu können?
d) Welche Zahlen würden Sie in das Bingofeld eintragen?

Aufgabe 8.57 (h9XHKN)

Nina hat die letzte Ziffer von der 10-stelligen Handynummer ihrer besten Freundin Vanessa vergessen. Sie tippt eine Ziffer ein.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zufällig gewählte Ziffer richtig ist.
b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, wenn Nina weiß, dass die richtige Ziffer gerade ist.

Aufgabe 8.58 (w5pLSH)

Aus einer Urne mit vier Kugeln (rot, gelb, blau, schwarz) wird zweimal ohne Zurücklegen gezogen. Geben Sie die Ergebnismengen an und zeichnen Sie ein passendes Baumdiagramm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zuerst rot und dann gelb gezogen wird?

○ **Aufgabe 8.59 (n6LVQi)**

Eine Münze wird zweimal geworfen. Mike fragt sich nun, ob zwei gleiche oder zwei verschiedene Ereignisse wahrscheinlicher sind. Was meinen Sie?

○ **Aufgabe 8.60 (DSWDG8)**

Bei einer Polizeikontrolle werden 5 % der Autos kontrolliert. Vier Urlauber fahren mit ihren Autos hintereinander in die Polizeikontrolle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) … alle vier kontrolliert werden?
b) … nur die ersten beiden Autos kontrolliert werden?
c) … keiner der vier kontrolliert wird?
d) … genau drei kontrolliert werden?

● **Aufgabe 8.61 (JSJtZD)**

Nach Einwurf eines Euros erhalten Sie von einem Glücksspielautomaten ein Los, auf das eine siebenstellige Zahl gedruckt ist, die nur aus den Ziffern 1 und 2 besteht (z. B. 2212112). Der Automat erzeugt die Ziffer 1 mit der Wahrscheinlichkeit 0,6 und die Ziffer 2 mit der Wahrscheinlichkeit 0,4. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

a) A: "Die aufgedruckte Zahl endet mit 111."
b) B: "Die aufgedruckte Zahl ist größer als 2221222."

◒ **Aufgabe 8.62 (SXKeUv)**

Bei einem Handballspiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter aufgrund von Verletzungen ausfällt, 1 %. Für die 6 Feldspieler beträgt die Wahrscheinlichkeit 7 %. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird während des Spiels keiner der 7 Spieler verletzt?

● **Aufgabe 8.63 (XjZVcX)**

Wie Oft müssen Sie würfeln, um mit 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine Eins zu erhalten? (Tipp: Gegenwahrscheinlichkeit!)

○ **Aufgabe 8.64 (Txv6qH)**

Eine Münze fällt zu 75 % auf Kopf und zu 25 % auf Zahl. Die Münze wird 2-mal geworfen.

a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm und geben Sie die Wahrscheinlichkeit für alle Kombinationsmöglichkeiten an.
b) In wie fern weicht die Münze von der "Norm" ab und was sagt das über die Münze aus?

○ **Aufgabe 8.65 (SAuQHD)**

Ein Glücksrad, das zu einem Viertel rot und zu drei Vierteln blau ist, wird zwei Mal gedreht.

a) Stellen Sie ein Baumdiagramm für das Zufallsexperiment auf.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei mal rot gedreht wird.
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal blau gedreht wird.

○ **Aufgabe 8.66 (D9eu6m)**

In einer Klasse sind 8 Mädchen und 12 Jungs. 3 Schüler werden nach vorne gerufen!

a) Stellen Sie ein Baumdiagramm auf.
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle, die vorne stehen, Jungs sind.

○ **Aufgabe 8.67 (gnYb1c)**

Mike macht auf seiner Geburtstagsfeier eine Tombola mit 20 Losen. Darunter befinden sich 2 Hauptgewinne und 8 Trostpreise.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die ersten beiden gezogenen Lose die beiden Hauptgewinne sind?
b) Wenn der Fall eintritt, dass in den ersten beiden Losen beide Hauptgewinne gezogen werden, wie wahrscheinlich ist es, dass das dritte Los ein Trostpreis ist?
c) Bestimmen Sie die Gesamtwahrscheinlichkeit des in b) beschriebenen Ereignisses.

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 8.68 (S6HYrj)

Ein Fahrradschloss zeigt 3 zufällig gewählte Ziffern zwischen 000 und 999. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

a) A: Alle drei Ziffern sind gleich.
b) B: Es kommen nur die Zahlen 4 und 8 vor.
c) C: Die erste und die dritte Zahl sind gleich.

Aufgabe 8.69 (H7Du4D)

In einem Barbecue Restaurant gibt es verschiedene Steaks zur Auswahl: Rumpsteak, Roastbeefsteak, Nackensteak und Rib-Eye-Steak. Dazu gibt es als Beilagen: Ofenkartoffeln, Pommes und Bratkartoffeln. Als Vorspeise kann Mike einen kleinen gemischten Salat oder einen kleinen grünen Salat wählen.

a) Wie viele verschiedene Gerichte hat Mike zur Auswahl?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Gericht mit Ofenkartoffeln als Beilage?

Aufgabe 8.70 (aWitHN)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zufällig eine dreistellige Zahl mit den Ziffern 1, 3, 5, 7 und 9 zu bilden, wenn …

a) … alle drei Ziffern gleich sein sollen?
b) … die Zahl kleiner als 700 sein soll?
c) … die Zahl durch 5 teilbar sein soll?

Aufgabe 8.71 (9FszSz)

Ninas Tochter Lilly-May möchte eine Halskette selbst basteln. Sie hat dazu genügend schwarze, weiße, gelbe und rote Perlen gekauft. Insgesamt will sie 8 Perlen auffädeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn die Farben zufällig gewählt werden?

a) A: In der Halskette kommt keine schwarze Perle vor.
b) B: Nur die ersten 4 Perlen sind weiß.
c) C: Es kommen immer abwechselnd nur schwarze und weiße Perlen vor.

Aufgabe 8.72 (sxt633)

Mikes dreijährige Nichte Pia baut aus gelben und blauen Bausteinen einen Turm. Sie stapelt dabei 10 Bausteine zufällig aufeinander. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn sie die Farben der Bausteine zufällig auswählt?

a) A: Alle Bausteine sind gelb.
b) B: Nur ein Baustein ist gelb.
c) C: Der erste und der letzte Baustein haben dieselbe Farbe.

Aufgabe 8.73 (u96kvz)

In einer Urne sind 8 nummerierte Kugeln (von 1 bis 8). Man zieht viermal nacheinander eine Kugel, notiert die Ziffer und legt sie zurück in die Urne. Die aufgeschriebenen Ziffern sind vierstellige Zahlen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse?

a) A: Es kommen nur die Ziffern 5 und 6 vor.
b) B: Die vierstellige Zahl ist durch 5 teilbar.
c) C: Es kommt keine 9 vor.
d) D: Die vierstellige Zahl ist durch 2 teilbar.

Aufgabe 8.74 (Bkjq7u)

Aus den Buchstaben des Wortes MATHELV werden nacheinander mit Zurücklegen 5 Buchstaben gezogen und der Reihe nach notiert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse?

a) A: Es entsteht das Wort MATHE.
b) B: Man erhält eine Buchstabenkombination die mit M beginnt.
c) C: Man erhält eine Buchstabenkombination die mit LV endet.
d) D: E kommt in der Kombination nicht vor.

◒ **Aufgabe 8.75 (aMb7NF)**

Auf wie viele Arten können sich …

a) … vier Menschen in einer Reihe aufstellen?
Einer von ihnen heißt Mike. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mike an der 2. Position steht?

b) … 12 Menschen in einer Reihe aufstellen?
Unter diesen 12 Menschen befinden sich auch Mike und Nina. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mike an der 1. und Nina an der 5. Position stehen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mike und Nina die letzten beiden Positionen einnehmen?

○ **Aufgabe 8.76 (2x4Sd9)**

Bei der Quizshow "Wer wird Millionär" muss ein Kandidat als schnellster vier Antworten in die richtige Reihenfolge bringen, um sich zu qualifizieren.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Nina die Reihenfolge durch bloßen Zufall errät?

○ **Aufgabe 8.77 (hwdHDi)**

Aus einer Klasse werden 5 Schüler ausgewählt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie an verschiedenen Wochentagen Geburtstag?

◒ **Aufgabe 8.78 (FKa4cZ)**

Bei einem Preisausschreiben gewinnen die drei Gewinner aus 10 verschiedenen Elektroartikeln je zufällig einen.
Einer dieser Elektroartikel ist eine Mikrowelle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Gewinner nicht die Mikrowelle bekommt?

◒ **Aufgabe 8.79 (cyXiTM)**

In einer Urne sind 4 schwarze und 6 weiße Kugeln. Es werden nacheinander 5 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

a) A: Man zieht nur weiße Kugeln.
b) B: Man zieht zuerst zwei schwarze, dann drei weiße Kugeln.
c) C: Die erste Kugel ist schwarz.
d) D: Man zieht abwechselnd schwarze und weiße Kugeln.

◒ **Aufgabe 8.80 (1vgVq9)**

Bei dem Spiel "Reise nach Jerusalem" scheidet in jeder Runde eine Person aus. Es nehmen 12 Personen teil, unter ihnen befinden sich Mike, Nina und Christian.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

a) A: Mike bleibt als letzter übrig.
b) B: Nina und Christian sind in der letzten Runde.
c) C: Mike fliegt in der 5. Runde raus.

○ **Aufgabe 8.81 (yt39rn)**

Die Ziffern der Zahl 1212125 werden zufällig neu angeordnet.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse?

a) A: Es entsteht wieder die ursprüngliche Zahl.
b) B: Die neue Zahl beginnt mit 111.
c) C: Es entsteht eine Zahl, in der dreimal hintereinander die 1 vorkommt.

● **Aufgabe 8.82 (mmcB8d)**

Mike bekommt die Aufgabe, n Autos nach ihrer Preisklasse zu ordnen. Als erstes soll er das günstigste nennen und dann in aufsteigender Reihenfolge bis zum teuersten kommen.
Wie groß muss n mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, die richtige Reihenfolge ohne Autokenntnisse zufällig zu erraten, kleiner als 0,005 % ist?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 8.83 (WFsuAi) ○

Berechnen Sie:

a) $\binom{10}{4}$ b) $\binom{30}{12}$ c) $\binom{25}{1}$ d) $\binom{66}{66}$

Aufgabe 8.84 (T1Ai1d) ◒

In einer Urne befinden sich 20 nummerierte Kugeln (Zahlen 1 bis 20). Es werden gleichzeitig 4 Kugeln aus der Urne gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

a) A: Alle Zahlen sind durch 2 teilbar.
b) B: Alle Zahlen sind durch 5 teilbar.
c) C: Die Summe der vier Zahlen ist kleiner als 13.
d) D: Das Produkt der vier Zahlen ist genau 20.

Aufgabe 8.85 (NmAQBY) ◒

In einer Urne sind 8 schwarze, 6 rote, und 4 gelbe Kugeln. Es werden 3 Kugeln gleichzeitig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse?

a) A: Alle Kugeln sind rot.
b) B: Alle Kugeln haben dieselbe Farbe.
c) C: Zwei Kugeln sind schwarz, eine ist gelb.
d) D: Es ist keine schwarze Kugel dabei.
e) E: Es ist mindestens eine Kugel gelb.
f) F: Von jeder Farbe ist eine Kugel dabei.

Aufgabe 8.86 (dJzQNY) ○

In einem Karton sind 25 Weingläser. Davon haben fünf Stück durch den Transport einen Sprung im Glas bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse, wenn drei Weingläser ohne hinzusehen herausgegriffen werden?

a) A: Alle drei Weingläser sind in Ordnung.
b) B: Genau ein Weinglas hat einen Sprung.
c) C: Genau zwei Weingläser haben einen Sprung.

Aufgabe 8.87 (vcPb5E) ○

Mike hat im Urlaub die Schweizerin Anke kennengelernt. Aus dem Urlaub zurück, fällt ihm auf, dass er gar nicht weiß, wo sie wohnt. Er weiß nur, dass sie ihr Zuhause irgendwo in der Schweiz hat. Christian behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, zufällig an eine Tür in der Schweiz zu klopfen (es gibt ungefähr 3,3 Millionen Haushalte in der Schweiz) und Anke wieder zu treffen größer ist als einen 6er im Lotto (6 aus 49) zu haben.

a) Was meinen Sie du dazu?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für genau 5 Richtige im Lotto?

Aufgabe 8.88 (PU9gti) ○

20 Personen treffen sich zum Fußball spielen. Unter ihnen auch Mike, Manni und Christian. Sie beschließen 4 gleich große Mannschaften zu bilden.

a) Wie viele verschiedene Mannschaften sind möglich?
b) Die erste Mannschaft wurde bereits zusammengestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mike, Manni und Christian in dieser Mannschaft sind?

Aufgabe 8.89 (H8U9Q9) ○

Ein Prüfling erhält 12 Themen, aus denen er 5 auswählen muss.

a) Wie viele Möglichkeiten hat er, die Themen auszuwählen?

Der Prüfling weiß nicht, dass 4 der 12 Themen überdurchschnittlich schwer sind.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 5 ausgewählten Themen genau 3 schwierige Themen sind?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ausgewählten Themen kein schwieriges Thema ist?

◒ **Aufgabe 8.90 (aAGKMa)**

Ein neues EDV-Programm soll zunächst in 10 Unternehmen getestet werden. 20 Unternehmen wollen an dem Test teilnehmen, 7 davon sind Speditionen.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten für die Unternehmen.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Auswahl keine Spedition ist?

● **Aufgabe 8.91 (dEMktm)**

Der Kader einer Fußballmannschaft besteht aus 8 Abwehrspielern, 6 Mittelfeldspielern, 5 Angriffsspielern und 3 Torhütern.

Der Trainer entscheidet sich für eine 4-3-3 Aufstellung. Das bedeutet, dass 4 Abwehrspieler, 3 Mittelfeldspieler, 3 Angriffsspieler und ein Torhüter auf dem Feld stehen.

a) Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, seine Mannschaft zusammenzustellen?

Der Trainer will beim heutigen Spiel seine Spieler zufällig zusammenstellen. Unter den Spielern sind auch Simon, Freddy, Mike, Matthias, Alex und Hakan. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

b) A: Simon und Freddy (Abwehrspieler) sind auf dem Feld.
c) B: Weder Mike noch Matthias stehen im Tor.
d) C: Simon und Freddy (Abwehrspieler) und Alex und Hakan (Angriffsspieler) stehen auf dem Feld.

● **Aufgabe 8.92 (gEk6HP)**

Der Japanisch-Kurs des Albert-Ludwig-Gymnasiums will einen Austausch zwischen Deutschland und Japan vornehmen. Zuerst wollen die deutschen Schüler die japanischen Schüler besuchen. Allerdings können nur 12 der 20 Japanisch-Kurs Mitglieder in einer Gastfamilie untergebracht werden. Von den Gastfamilien wollen 8 einen Jungen aufnehmen und nur 4 ein Mädchen. Dreiviertel der Japanisch-Kurs-Teilnehmer sind männlich.

a) Wie viele verschiedene Zusammenstellungen der 12er-Gruppe sind möglich?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die aus 20 Kursmitgliedern zufällig ausgewählten 12 Schüler auf die Gastfamilien in Japan zu verteilen?
c) Aus bisher ungeklärten Gründen hat eine Familie, die einen Jungen aufnehmen wollte, ihre Einladung zurückgezogen. Dafür sind aber 2 der Familien bereit, einen zweiten Jungen aufzunehmen. Wie viele Möglichkeiten gibt es nun, die 8 männlichen Gruppenmitglieder auf die für sie verbleibenden 7 Gastfamilien zu verteilen?

◒ **Aufgabe 8.93 (fV2Gpk)**

Zwei ideale Würfel werden geworfen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens 8 beträgt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens 8 beträgt, wenn du bereits weißt, dass mindestens einer der Würfel eine 4 zeigt?

◒ **Aufgabe 8.94 (XVrUuM)**

Von den 16-jährigen Jugendlichen in einer Stadt sind 49 % Mädchen und 51 % Jungen. Nach einer Befragung über die Freizeitangebote in der Stadt sagten 53 % der 16-jährigen Jugendlichen, dass die Freizeitangebote gut sind. Speziell von den 16-jährigen Jungen fanden nur 47 % die Freizeitangebote gut. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein 16-jähriger Jugendlicher, der die Freizeitangebote gut findet, ein Junge ist.

○ **Aufgabe 8.95 (PwhyPp)**

In einer Bevölkerungsgruppe sind 1 % an einer Krankheit erkrankt. Ein Test zeigt bei einem Erkrankten zu 90 % an, dass er tatsächlich krank ist und einem Gesunden, dass er zu 99 % gesund ist.

a) Stellen Sie das Problem als Baumdiagramm und als 4-Feldertafel dar.
b) Wenn das Testergebnis positiv ist, wie wahrscheinlich ist es dann, dass der Getestete krank ist?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 8.96 (zkjr4M)

In Beutel A befinden sich 2 weiße und 4 schwarze Kugeln. In Beutel B befinden sich 1 schwarze und 4 weiße Kugeln. Sie wählen zufällig einen Beutel aus und ziehen einmal.

a) Eine weiße Kugel wird gezogen. Wie wahrscheinlich ist, es, dass der Beutel A ausgewählt wurde?
b) Wie wahrscheinlich ist es, dass Beutel B genommen wurde?

Aufgabe 8.97 (mcGWDe)

Ein Schüler fährt an 70 % der Tage mit der S-Bahn zur Schule. In 60 % der Fälle ist er damit pünktlich. Insgesamt erscheint er an 65 % der Tage pünktlich zum Unterricht. An diesem Morgen war er pünktlich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er die Bahn genommen?

Aufgabe 8.98 (VxaM6P)

In einer Produktionsanlage werden Schalter von zwei Maschinen hergestellt. Maschine A produziert 40 % der Schalter, die zu 90 % funktionieren. Insgesamt sind 95 % der Schalter einwandfrei. Ein geprüfter Schalter ist defekt. Wie wahrscheinlich ist es, dass er von Maschine A stammt?

Aufgabe 8.99 (AsxAvn)

In einer Urne sind 5 rote Kugeln und 3 schwarze Kugeln. Die Kugeln werden einmal mit und einmal ohne Zurücklegen gezogen. Erklären Sie anhand dieser Zufallsexperimente stochastische Abhängigkeit und Unabhängigkeit.

Aufgabe 8.100 (Tcf96m)

A und B seien stochastisch unabhängig, es gelte P(A) = 0,4. Die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Eintreten von A und B beträgt 0,1. Wie groß ist P(B)?

Aufgabe 8.101 (bGVnrz)

Bei einer Umfrage in der Hamburger Fußgängerzone wurde der Bekanntheitsgrad von Stefan Raab ermittelt. 16 % der Befragten waren Männer, die Stefan Raab nicht kannten. In der Umfrage waren insgesamt 52 % Frauen. Aus der Menge der Befragten wird nun zufällig eine Person ausgewählt. Man geht davon aus, dass die beiden Ereignisse M: "Die Person ist ein Mann" und B: "Die Person kennt Stefan Raab" stochastisch unabhängig sind. Die Wahrscheinlichkeit von B ist der Bekanntheitsgrad von Stefan Raab.

a) Bestimmen Sie diesen in dieser Umfrage.
b) Würde die Umfrage einen kleineren, größeren oder einen gleich großen Bekanntheitsgrad liefern, wenn der Anteil der Frauen kleiner als 52 % wäre und wieder 16 % aller Befragten Männer sind, die Stefan Raab nicht kennen?
c) Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8.102 (rAfEUP)

In Mailand herrscht Aufregung. Die neuste Sommerkollektion eines berühmten Modeschöpfers ist erschienen. Alle sind begeistert. Laut Umfrage kennen 7 von 10 Personen bereits die neue Kollektion. 2 von 3 Befragten kannten die Frühlingskollektion des bekannten Modeschöpfers. 90 % der Befragten kennen wenigstens eine der beiden Kollektionen. Untersuchen Sie, ob die Kollektionen in Bezug auf die Bekanntheit stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 8.103 (yCR85T)

Statistiken einer Videothek haben gezeigt, dass 60 % der Kunden zu diesem Zeitpunkt aktuelle Kinofilme ausleihen (Zeitraum 10 Wochen) und 45 % der Kunden sich gerne die "älteren" Filme (Zeitraum älter als 10 Wochen) ausleihen. 15 % der Kunden leihen sich nur Videospiele aus. Untersuchen Sie, ob das Ausleihen der aktuellen Filme und das Ausleihen der älteren Filme stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 8.104 (zbzszw)

Studien gibt es ja wie Sand am Meer. Eine Studie beschäftigt sich z. B. mit dem Zusammenhang zwischen den Merkmalen B (Versuchsperson ist Brillenträger) und I (Versuchsperson hat eine gegenüber dem Bevölkerungsdurchschnitt erhöhte Intelligenz).
Bei 1000 Versuchspersonen ergibt sich diese Vierfeldertafel, wobei Sie die linke ergänzen und in die rechte die Wahrscheinlichkeiten eintragen.

	B	$\overline{B}$	Summe
I	110		
$\overline{I}$			400
Summe	200		1000

	B	$\overline{B}$	Summe
I			
$\overline{I}$			
Summe			

Aufgabe 8.105 (ntzW7m)

Eine Süßigkeiten-Packung enthält 240 Schokolinsen, von denen 75 % aus Vollmilchschokolade und der Rest aus Zartbitterschokolade besteht. Ein Viertel Linsen ist mit einem roten Zuckerguss versehen, und 30 Linsen sind zartbitter und haben keinen roten Zuckerguss. Erstellen Sie eine Vierfeldertafel und geben Sie an, wie viele Vollmilch-Schokolinsen rot sind?

Aufgabe 8.106 (aaLAqN)

An einer Schule findet ein Casting-Wettbewerb statt. Dabei müssen ein Junge und ein Mädchen immer zufällig zusammen im Duett singen. Bei den Jungen gelingt ein Auftritt in 65 % der Fälle nicht. Bei jedem vierten Auftritt singen beide Schüler gut. Von den Mädchen singen insgesamt 55 von 100 gut. Stellen Sie eine Vierfeldertafel auf und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auftritt sowohl von Seiten der Mädchen als auch von Seiten der Jungen nicht gelingt.

Aufgabe 8.107 (K2v6Xg)

Es werden Familien mit drei Kindern nach dem Geschlecht der Kinder befragt. Wie könnten passende Ergebnismengen formuliert werden, wenn die Reihenfolge bei der Geburt der Kinder berücksichtigt (nicht berücksichtigt) werden soll?

Aufgabe 8.108 (X7ygVK)

Bei einem Wurfversuch mit Toastbrotscheiben landete der Toast 298-mal auf der Butterseite und 241-mal auf der trockenen Seite. Legen Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung fest.

Aufgabe 8.109 (CbaQcW)

Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen beträgt 0,515. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt eine Familie mit fünf Kindern …

a) … nach vier Söhnen eine Tochter,
b) … nach vier Töchtern einen Sohn?

Aufgabe 8.110 (seujTn)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei fünf Würfen mit einem Würfel …

a) … mindestens eine 6 zu werfen,
b) … höchstens eine 4,
c) … die erste 6 beim fünften Wurf zu erzielen?

Aufgabe 8.111 (aGaXAD)

In einer Bäckerei ist gemäß langfristiger Erfahrungen der Verkaufsanteil von Mohnbrötchen (M) 18 %, von Rosinenbrötchen (R) 10 %, von Vollkornbrötchen (V) 25 %, von Baguettebrötchen (B) 5 %, von Croissants (C) 6 % und von normalen Brötchen (N) 36 %.

a) Bestimmen Sie das Ergebnis zu einen Pfad mit fünf Stufen eines zu dieser Aufgabe passenden Baumdiagramms.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die nächsten fünf verkauften Brötchen die Reihenfolge (M, B, N, N, C) haben?

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

Aufgabe 8.112 (qkMdF3)

Mike sagt: "Wenn ich schon eine 3 gewürfelt habe, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ich beim nächsten Mal wieder eine 3 würfel, kleiner als beim ersten Mal. Ich hatte eine 3, jetzt sind eher die anderen Zahlen dran."

a) Bestimmen Sie mit einem Baumdiagramm die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_3(3)$.
b) Sind Ereignis A: "3 beim 1. Wurf" und B: "3 beim 2. Wurf" stochastisch abhängig?
c) Nehmen Sie Stellung zu Mikes Einschätzung und begründen Sie Ihre Überlegung.

Aufgabe 8.113 (dV34bp)

Die Augenfarbe von 1000 Vätern und deren 1000 Söhnen wurde untersucht: 622 Väter haben helle Augen. Von deren Söhnen haben 471 helle Augen. Von den Vätern, die keine hellen Augen haben, haben 230 Söhne keine hellen Augen.
Untersuchen Sie mithilfe eines Baumdiagramms, ob die Ereignisse A: "Vater hat helle Augen" und B: "Sohn hat helle Augen" stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 8.114 (m1N5w3)

Sechs Patienten erhalten ein Medikament, das erfahrungsgemäß mit der Wahrscheinlichkeit 70 % die Krankheit heilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) … alle Patienten geheilt werden,
b) … genau fünf Patienten geheilt werden,
c) … mindestens ein Patient geheilt wird.

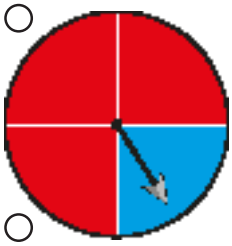
Aufgabe 8.115 (TTtjpa)

Mike und Nina haben lange Elfmeterschießen geübt. Ihre Trefferquote beträgt 80 % und 75 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) … Mike bei zehn Versuchen mindestens achtmal trifft,
b) … Nina bei sieben Versuchen genau fünfmal oder genau sechsmal trifft.

Aufgabe 8.116 (ztSwWu)

Das nebenstehende Glücksrad wird sechsmal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass …



a) … genau zweimal rot erscheint,
b) … höchstens zweimal rot erscheint,
c) … genau zweimal blau erscheint,
d) … mindestens zweimal blau erscheint?

Aufgabe 8.117 (D6m3eq)

Das Fritz-Henßler-Berufskolleg wird allgemein hin nur FHBK genannt. Bei einem Schulfest befinden sich in einem Kasten vier Zettel mit jeweils einer der Aufschriften "F", "H", "B" und "K". Ziehen Sie nacheinander die Buchstaben F - H - B - K, so erhalten Sie einen Gewinn.
Wie groß ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn Sie viermal …

a) … mit Zurücklegen ziehen,
b) … ohne Zurücklegen ziehen?

Aufgabe 8.118 (Tq3qdZ)

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Lotto 6 aus 49, sechs Richtige zu erzielen?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn zusätzlich noch die Superzahl (Ziffer von 0 bis 9) hinzugerechnet wird, den Jackpot zu knacken?

Aufgabe 8.119 (zBBa1V)

Fünf verschiedenfarbige Würfel werden geworfen.

a) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Sechs dabei ist?

Aufgabe 8.120 (T6k9Tb)

Aus dem 12-köpfigen Vorstand eines Tennisclubs sollen ein Präsident, ein Schriftführer und ein Kassenwart gewählt werden. Wie viele Wahlmöglichkeiten haben die Mitglieder des Clubs?

8.10 CHECKLISTE – STOCHASTIK

Mit der Checkliste können Sie als Vorbereitung auf die Klausur überprüfen, welche grundlegenden Themenbereiche der Unterrichtsreihe Sie gut können bzw. wo Sie noch unsicher sind. Wenn Sie die Checkliste erfolgreich bearbeitet haben, sollten Sie in der Klassenarbeit auf jeden Fall eine ausreichende Leistung erzielen.

	Meine Kompetenzen (bitte kreuzen Sie entsprechend an):	Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
1	Ich weiß was ein Laplace-Experiment ist und kann entsprechende Wahrscheinlichkeiten berechnen.				
2	Ich kann eine Ergebnismenge zu einem Ereignis angeben.				
3	Ich kann ein Gegenereignis $\overline{A}$ zu einem Ereignis A bestimmen.				
4	Ich kann die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Urne oder ein geometrisches Objekt (z. B. Glücksrad, Würfel) angeben.				
5	Ich kann sinnvolle Wahrscheinlichkeitsverteilungen für nichtgeometrische Objekte mit Hilfe hoher Versuchswiederholungen bestimmen.				
6	Ich kann Wahrscheinlichkeiten für "mehrere Ereignisse" (z. B. "es wird eine 3 oder 4 gewürfelt") mit Hilfe der Summenregel berechnen.				
7	Ich kann mehrstufige Zufallsexperimente mit einem Baumdiagramm darstellen.				
8	Ich kann die Wahrscheinlichkeit für mehrstufige Zufallsexperimente (z. B. "es wird erst eine 3 und dann eine 4 gewürfelt") mit Hilfe der Pfadregel berechnen.				
9	Ich kann den Begriff der "bedingten Wahrscheinlichkeit" in eigenen Worten erklären.				
10	Ich kann Ergebnisse von zweistufigen Zufallsexperimenten auch als Vierfeldertafel darstellen.				
11	Ich kann den Begriff der "stochastischen Unabhängigkeit" in eigenen Worten erklären.				
12	Ich kann Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit hin überprüfen.				

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

		Das kann ich und helfe anderen.	Da bin ich fast sicher und übe fleißig weiter.	Da bin ich unsicher und frage andere.	Das kann ich noch nicht und frage eine Lehrperson.
13	Ich kann die Begriffe "Permutation" und "Kombination" unterscheiden.				
14	Ich kann die Anzahl an Möglichkeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen mit Betrachtung der Reihenfolge (Permutation) berechnen.				
15	Ich kann die Anzahl an Möglichkeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen ohne Betrachtung der Reihenfolge (Kombination) berechnen.				
16	Ich kann den Begriff des Binomialkoeffizienten erläutern.				
17	Ich kann die Wahrscheinlichkeit für k Treffer mit der Bernoulli-Formel angeben.				

Hilfestellung

Beim Durchgehen der Checkliste sind noch folgende Fragen aufgetaucht:

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**



9.1 LÖSUNGEN – 1

Lösung 1.1

a) $\frac{6}{4}$ b) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{12}{8}$ d) $\frac{7}{5}$

Lösung 1.2

a) 14 b) 40 c) 28 d) 60

Lösung 1.3

a) $\frac{5}{8}$ e) $\frac{5}{12}$ i) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{3}{7}$ f) $\frac{3}{4}$ j) $\frac{4}{5}$
c) $\frac{3}{4}$ g) $\frac{2}{3}$ k) $\frac{4}{5}$
d) $\frac{3}{5}$ h) $\frac{4}{7}$ l) $\frac{4}{5}$

Lösung 1.4

a) $\frac{10}{15}$; $\frac{12}{15}$ e) $\frac{4}{9}$; $\frac{3}{9}$ i) $\frac{10}{45}$; $\frac{12}{45}$
b) $\frac{2}{8}$; $\frac{3}{8}$ f) $\frac{21}{24}$; $\frac{10}{24}$ j) $\frac{28}{36}$; $\frac{15}{36}$
c) $\frac{15}{18}$; $\frac{4}{18}$ g) $\frac{15}{20}$; $\frac{8}{20}$ k) $\frac{88}{120}$; $\frac{45}{120}$
d) $\frac{15}{35}$; $\frac{14}{35}$ h) $\frac{20}{24}$; $\frac{21}{24}$ l) $\frac{50}{140}$; $\frac{63}{140}$

Lösung 1.5

a) > d) = g) > j) <
b) = e) < h) = k) <
c) > f) < i) > l) =

Lösung 1.6

a) 40% ; 400‰ d) 35% ; 350‰
b) 70% ; 700‰ e) 52% ; 520‰
c) 25% ; 250‰ f) 22% ; 220‰

Lösung 1.7

a) $\frac{37}{100}$ c) $\frac{11}{100}$ e) $\frac{5}{8}$
b) $\frac{39}{50}$ d) $\frac{9}{20}$ f) $\frac{1}{20}$

Lösung 1.8

a) $\frac{47}{45}$ g) $\frac{13}{50}$ m) $\frac{61}{80}$
b) $\frac{29}{24}$ h) $\frac{19}{77}$ n) $\frac{1}{21}$
c) $\frac{1}{18}$ i) $\frac{47}{35}$ o) $\frac{23}{25}$
d) $\frac{17}{30}$ j) $\frac{77}{120}$ p) $\frac{19}{45}$
e) $\frac{49}{36}$ k) $\frac{1}{18}$ q) $\frac{81}{80}$
f) $\frac{67}{66}$ l) $-\frac{1}{40}$ r) $\frac{1}{75}$

Lösung 1.9

a) $\frac{83}{8}$ c) $\frac{211}{30}$ e) $\frac{163}{60}$ g) $-\frac{25}{12}$
b) $\frac{16}{3}$ d) $\frac{29}{8}$ f) $\frac{272}{45}$ h) $\frac{64}{15}$

Lösung 1.10

a) $\frac{15}{7}$ g) $\frac{36}{5}$ m) $\frac{27}{7}$
b) $\frac{16}{3}$ h) $\frac{60}{13}$ n) $\frac{99}{16}$
c) $\frac{14}{3}$ i) $\frac{28}{9}$ o) $\frac{8}{3}$
d) $\frac{15}{2}$ j) $\frac{11}{5}$ p) $\frac{26}{5}$
e) $\frac{14}{5}$ k) $\frac{20}{3}$ q) 15
f) $\frac{72}{11}$ l) $\frac{7}{4}$ r) $\frac{180}{19}$

Lösung 1.11

a) $\frac{3}{20}$ g) $\frac{4}{35}$ m) $\frac{13}{76}$
b) $\frac{4}{21}$ h) $\frac{35}{192}$ n) $\frac{6}{35}$
c) $\frac{5}{24}$ i) $\frac{18}{143}$ o) $\frac{42}{187}$
d) $\frac{7}{15}$ j) $\frac{16}{119}$ p) $\frac{11}{56}$
e) $\frac{5}{36}$ k) $\frac{22}{81}$ q) $\frac{5}{66}$
f) $\frac{12}{77}$ l) $\frac{7}{48}$ r) $\frac{13}{72}$

Lösung 1.12

a) $\frac{35}{64}$ d) $\frac{35}{24}$ g) $\frac{28}{3}$ j) $\frac{21}{200}$
b) $\frac{8}{105}$ e) $\frac{21}{16}$ h) $\frac{23}{4}$ k) $\frac{100}{63}$
c) $\frac{1}{5}$ f) $\frac{8}{3}$ i) $\frac{77}{20}$ l) $\frac{152}{15}$

Lösung 1.13

a) $\frac{8}{27}$ h) $\frac{7}{20}$ o) $\frac{25}{18}$
b) $\frac{2}{7}$ i) $\frac{35}{96}$ p) $\frac{2}{15}$
c) $\frac{4}{15}$ j) $\frac{35}{24}$ q) $\frac{9}{70}$
d) $\frac{5}{18}$ k) $\frac{10}{27}$ r) $\frac{3}{25}$
e) $\frac{10}{9}$ l) $\frac{5}{14}$ s) $\frac{1}{8}$
f) $\frac{7}{18}$ m) $\frac{1}{3}$ t) $\frac{1}{2}$
g) $\frac{3}{8}$ n) $\frac{25}{72}$

Lösung 1.14

a) $\frac{3}{28}$ g) $\frac{3}{8}$ m) 21
b) $\frac{5}{24}$ h) $\frac{5}{54}$ n) $\frac{15}{2}$
c) $\frac{7}{45}$ i) $\frac{2}{13}$ o) $\frac{72}{5}$
d) $\frac{1}{15}$ j) $\frac{2}{7}$ p) $\frac{40}{3}$
e) $\frac{1}{22}$ k) $\frac{7}{120}$ q) $\frac{28}{3}$
f) $\frac{9}{70}$ l) $\frac{11}{75}$ r) $\frac{55}{3}$

Lösung 1.15

a) $\frac{9}{10}$ g) $\frac{7}{9}$ m) $\frac{88}{63}$
b) $\frac{32}{21}$ h) $\frac{27}{35}$ n) $\frac{84}{125}$
c) $\frac{4}{15}$ i) $\frac{24}{35}$ o) $\frac{27}{16}$
d) $\frac{25}{28}$ j) $\frac{55}{52}$ p) $\frac{13}{15}$
e) $\frac{3}{4}$ k) $\frac{5}{18}$ q) $\frac{187}{180}$
f) $\frac{15}{11}$ l) $\frac{7}{12}$ r) $\frac{19}{24}$

Lösung 1.16

a) $\frac{9}{16}$ j) $\frac{12}{35}$ s) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{5}{4}$ k) $\frac{9}{10}$ t) $\frac{27}{40}$
c) $\frac{3}{7}$ l) 2 u) $\frac{15}{4}$
d) $\frac{2}{3}$ m) $\frac{24}{35}$ v) $\frac{25}{3}$
e) $\frac{9}{10}$ n) $\frac{16}{15}$ w) $\frac{20}{7}$
f) $\frac{3}{14}$ o) $\frac{36}{25}$ x) $\frac{40}{9}$
g) $\frac{10}{21}$ p) $\frac{27}{64}$ y) 6
h) $\frac{8}{49}$ q) $\frac{15}{16}$
i) $\frac{16}{63}$ r) $\frac{9}{28}$

Lösung 1.17

a) $\frac{21}{40}$ e) $\frac{60}{77}$ i) $\frac{9}{10}$
b) $\frac{58}{45}$ f) $-\frac{2}{9}$ j) $\frac{31}{120}$
c) $\frac{52}{63}$ g) $\frac{41}{160}$ k) $\frac{77}{116}$
d) $\frac{113}{264}$ h) $\frac{5}{36}$ l) $\frac{13}{120}$

Lösung 1.18

a) $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ g) $\frac{3}{10} < \frac{5}{12} < \frac{2}{3}$
b) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$ h) $\frac{1}{3} < \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$
c) $\frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{5}{12}$ i) $\frac{1}{4} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$
d) $\frac{2}{5} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$ j) $\frac{1}{6} < \frac{5}{9} < \frac{3}{4}$
e) $\frac{1}{4} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$ k) $\frac{3}{8} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6}$
f) $\frac{4}{9} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ l) $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

Lösung 1.19

a) $\frac{3}{8}$ b) 15 c) $\frac{3}{2}$

Lösung 1.20

a) $\frac{11}{10}$ d) $\frac{27}{8}$ g) $\frac{25}{2}$
b) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{41}{28}$ h) $\frac{17}{21}$
c) $\frac{7}{2}$ f) $\frac{19}{18}$

Lösung 1.21

a)	72	f)	45	k)	6
b)	31	g)	70	l)	63
c)	4	h)	3	m)	40
d)	75	i)	90	n)	–22
e)	36	j)	15	o)	38

Lösung 1.22

a) nein, da sonst die Multiplikation Vorrang hat
b) ja, da eh die Punkt-vor-Strich-Rechnung gilt
c) ja, da eh die Punkt-vor-Strich-Rechnung gilt
d) nein, da sonst die Multiplikation Vorrang hat
e) nein, da die Minusklammer die Vorzeichen verändert
f) ja, da eh die Punkt-vor-Strich-Rechnung gilt

Lösung 1.23

a) $(8 + 4) \cdot 3 = 36$
b) keine Klammer nötig
c) $(45 : 5 + 3) \cdot 2 = 24$
d) $(8 + 4) \cdot (4 – 2) = 24$
e) $30 – (5 + 2) \cdot 4 = 2$
f) $30 : ((2 + 3) \cdot 6) = 1$

Lösung 1.24

a)	$4x + y$	d)	$3b$
b)	$4a + 2b$	e)	$2t$
c)	m	f)	0

Lösung 1.25

a)	$8x$	i)	$x^2 + 5x$
b)	$10y$	j)	$17y – z$
c)	$9a$	k)	$7a^2 + 7a$
d)	$10b$	l)	$2m + 10n$
e)	$8x^2$	m)	$8x$
f)	$6m$	n)	$7y$
g)	$5a – 3b$	o)	$2a + 9b$
h)	$5x + 6y$		

Lösung 1.26

a)	$5x + 5$	i)	$12x + 7$
b)	$6y + 4$	j)	$7b + 8$
c)	$5a + 4$	k)	$6m + 2n$
d)	$7b + 8$	l)	$6a^2 + 5a$
e)	$2m + 2n$	m)	$13x^2 + 2x$
f)	$6x^2 + 3x + 4$	n)	$6y + 3z$
g)	$3y + 7$	o)	$15x – 2$
h)	$11a – 4$		

Lösung 1.27

a)	$24x$	f)	$12y$	k)	$24b$
b)	$21a$	g)	$10x$	l)	$8xy$
c)	$40y$	h)	$21z$	m)	$28x$
d)	$8x$	i)	$20xy$	n)	$15ab$
e)	$27ab$	j)	$20a$	o)	$16y$

Lösung 1.28

a)	x^2y	f)	$4a^3$	k)	$3x^2y^2$
b)	a^3	g)	$6x^2y$	l)	$2b^5$
c)	b^4	h)	$5x^2y$	m)	a^5
d)	$3x^3$	i)	z^5	n)	x^6
e)	y^4	j)	$7a^3b$	o)	$2b^6$

Lösung 1.29

a) $–11xy + 4x$
b) $–6ab + 2a – b$
c) $–14x^2y – 3x$
d) $–12xyz – 4xy + 3x$
e) $–3a^2 – 3a$
f) $–6b^3c – 4bc + b^2 + 7b$
g) $11x^2y – 4z$
h) $26ab^2 + a – 2b$
i) $–23xy + 4x + 8$
j) $6u^2v + 5uv – u$
k) $–23a^3b + 2ab$
l) $–12xy^2z + 3x^2y – y^2z$
m) $–3a^2b + ab + a$
n) $–5m^2n + 4mn$
o) $–15t^3 – 5t$

Lösung 1.30

a)	$4x + 20$	g)	$24a – 24b$
b)	$7a – 21$	h)	$3x^2 + 6x$
c)	$6y + 12$	i)	$2a^2 – 2a$
d)	$15x + 10$	j)	$8b^2 + 20b$
e)	$12b – 48$	k)	$5y^2 – 15y$
f)	$6x + 4$	l)	$8x + 12y$

Lösung 1.31

a)	$4{,}5x – 3y$	d)	$\frac{3}{2}a + \frac{3}{4}b$
b)	$\frac{8}{3}ab + 4a$	e)	$3x^2 – 1{,}5y$
c)	$11x – 6{,}6$	f)	$2a – b$

Lösung 1.32

a) $–3x + 4$
b) $–a – 2b + 5$
c) $–2y – z + 7$
d) $5x – 3y$
e) $–4a + b – 2$
f) $3x – 2y + 4$
g) $3x – 4y – 3$
h) $–2{,}5a – 4x + 5y$
i) $2x + 4y – 3$

Lösung 1.33

a)	$7x + 3y + 5$	f)	$8a – b + 2c$
b)	$3a + 17b – 8$	g)	$4x – 6y + 16$
c)	$12x + 2z + 4$	h)	$7x – y – 10$
d)	$y + 3z – 17$	i)	$–2a – 7b + 3$
e)	$10x – y – 9$		

Lösung 1.34

a)	6	c)	y ; 3	e)	7 ; 7b
b)	a ; 10	d)	8	f)	2;–0,5x

Lösung 1.35

a)	2x ; 3	c)	2y ; 1	e)	3s ; 1
b)	3a ; 2	d)	2b ; 1	f)	3x ; 4

Lösung 1.36

a)	$2x ; 1$	d)	$3ab ; 2$
b)	$2b ; 3a$	e)	$4y ; 3$
c)	$3y^2 ; 2$	f)	$2x^2 ; 3y$

Lösung 1.37

a)	$6(3x + 4)$	g)	$8x(2y – 1)$
b)	$10(2a – 3b)$	h)	$12(2m – 3n)$
c)	$2(18y – 7)$	i)	$3a(3b – 2)$
d)	$4x(2x + 3)$	j)	$15x(3xz – y)$
e)	$5(5s – 2t)$	k)	$8a^2(4a – 3)$
f)	$7a(2a + 3)$	l)	$9b(3b – 2)$

Lösung 1.38

a) $6b(2a^2 – 3ab + 1)$
b) $15x(2xy + 3y^2 – 1)$
c) $7ab(4a^2b – 2a + 1)$
d) $9x(x^2 – 3x + 2)$
e) $8z(2y^2 – 3yz + 1)$
f) $9b(4a^2b^2 + 6ab – 3)$
g) $8y(3x^2 – 2x + 1)$
h) $3a(6a^2 – 3ab + b)$
i) $10z(4x^2 + 2xz – 1)$
j) $9b(3b^2 – 2b + 1)$
k) $3n(4m^2 – 2m + 1)$
l) $15a(2ab^2 + b – 3)$

Lösung 1.39

a)	$\frac{1}{2}x(1 – \frac{1}{2}x)$	d)	$\frac{1}{2}xy(\frac{5}{3}x – 1)$
b)	$\frac{3}{5}ab(a – 2)$	e)	$\frac{3}{4}a(\frac{7}{6}b – 1)$
c)	$\frac{2}{3}y(y^2 – \frac{2}{3})$	f)	$\frac{1}{5}x(2x^2 – 1)$

Lösung 1.40

a) $2x^2 – 5x – 3$
b) $st – 2s + 4t – 8$
c) $2y^2 – 7y – 15$
d) $3a^2 – 2b^2 + 5ab$
e) $2x^2 – x – 10$
f) $3m^2 + m – 4$

Lösung 1.41

a) $2x^2 + \frac{5}{3}x - 2$
b) $2s^2 + \frac{13}{2}s - 6$
c) $\frac{5}{3}a^2 + \frac{4}{3}a - 4$
d) $3y^2 + \frac{1}{2}y - 1$
e) $\frac{3}{10}x^2 - x - 20$
f) $\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}a - 2$
g) $m^2 + \frac{11}{2}m - 3$
h) $\frac{4}{5}x^2 + x - 15$
i) $\frac{2}{3}b^2 + \frac{42}{5}b - 24$

Lösung 1.42

a) $x^2 + 2xy + y^2$
b) $4a^2 - 12ab + 9b^2$
c) $s^2 - t^2$
d) $x^2 + 8x + 16$
e) $y^2 + 10y + 25$
f) $x^2 - 4x + 4$
g) $4x^2 + 12x + 9$
h) $25a^2 - 40a + 16$
i) $4m^2 - 12mn + 9n^2$
j) $36s^2 - 24s + 4$
k) $49p^2 + 28p + 4$
l) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

Lösung 1.43

a) $x = 2$
b) $x = 7$
c) $x = 1{,}5$
d) $x = 4$
e) $x = 0{,}4$
f) $x = 2$
g) $x = 4$
h) $x = -4$
i) $x = \frac{5}{3}$
j) $x = 8$
k) $x = 3$
l) $x = 0{,}8$

Lösung 1.44

a) $x = 5$
b) $x = 6$
c) $x = 4{,}5$
d) $x = 7$
e) $x = 1$
f) $x = 8$
g) $x = -5$
h) $x = 1{,}2$
i) $x = 9$
j) $x = 8$
k) $x = 0{,}4$
l) $x = 6$
m) $x = 5$
n) $x = 3{,}8$
o) $x = \frac{11}{6}$

Lösung 1.45

a) $x = 12$
b) $x = 10$
c) $x = 9$
d) $x = 6$
e) $x = 9$
f) $x = 12$
g) $x = 14$
h) $x = 4{,}5$
i) $x = 2{,}5$
j) $x = 4{,}5$
k) $x = 9$
l) $x = 17{,}5$
m) $x = 8$
n) $x = 7$
o) $x = 6$
p) $x = 8$

Lösung 1.46

a) $x = 2$
b) $x = 4$
c) $x = 1$
d) $x = 3$
e) $x = 1{,}8$
f) $x = 5$
g) $x = 1$
h) $x = 4{,}5$

Lösung 1.47

a) $x = 2$
b) $x = 3{,}5$
c) $x = 6$
d) $x = 1$
e) $x = 2$
f) $x = \frac{7}{3}$
g) $x = 1$
h) $x = 2$
i) $x = 8$
j) $x = 1{,}5$
k) $x = \frac{10}{3}$
l) $x = 2$

Lösung 1.48

a) $x = 0$
b) $x = 3$
c) $x = \frac{5}{3}$
d) $x = \frac{9}{4}$
e) $x = 13$
f) $x = 2$
g) $x = 6$
h) $x = 3{,}5$
i) $x = 6$
j) $x = 1{,}2$
k) $x = 1{,}5$
l) $x = \emptyset$

Lösung 1.49

a) $x = 0$
b) $x = 7{,}6$
c) $x = \frac{23}{13}$
d) $x = 3{,}6$
e) $x = \frac{16}{3}$
f) $x = 4{,}5$
g) $x = \frac{5}{11}$
h) $x = 3{,}5$
i) $x = \frac{25}{3}$
j) $x = 4$

Lösung 1.50

a) $x = 12$
b) $x = 0$
c) $x = \emptyset$
d) $x = 0{,}5$
e) $x = \emptyset$
f) $x = \frac{11}{7}$
g) ∞
h) ∞
i) ∞
j) $x = -1$

Lösung 1.51

a) $x = \frac{11}{3}$
b) $x = -16$
c) $x = -6$
d) $x = 8{,}5$
e) $x = 6{,}2$
f) $x = -\frac{17}{3}$
g) $x = -\frac{53}{7}$
h) $x = 16$
i) $x = -\frac{71}{9}$

Lösung 1.52

a) $x = 1$
b) $x = 2{,}5$
c) $x = -1$
d) $x = \frac{11}{3}$
e) $x = 0$
f) $x = -6$
g) $x = 0$
h) $x = 7$

Lösung 1.53

a) $x = -3$
b) $x = \emptyset$
c) $x = 5$
d) $x = -\frac{2}{3}$

Lösung 1.54

a) 4,8 dm = 0,48 m
b) 40 dm = 400 cm = 4.000 mm
c) 0,12 cm^2 = 0,0012 dm^2
d) 900 cm^2 = 90.000 mm^2
e) 15 dm^3 = 15 l = 0,015 m^3
f) 80 dm^3 = 80.000 cm^3 = 80.000.000 mm^3
g) 0,02 l = 0,02 dm^3 = 20 cm^3
h) 24 h = 1.440 min = 86.400 sek
i) 150 min = 9.000 sek
j) 48 h = 2d
k) 288 h = 17.280 min = 1.036.800 sek

Lösung 1.55

a) 15.000 mm
b) 256 mm
c) 0,85 m
d) 520.000 mm^2
e) 98 cm^2
f) 4.750.000 mm^2
g) 0,18 m^3
h) 0,0000724 km^3
i) 18.900 min
j) 155.400 sek
k) 14,75 kg
l) 10.080 min

Lösung 1.56

a) $\frac{11}{15}$ m
b) $\frac{17}{6}$ l
c) $\frac{14}{5}$ l
d) 0,5 m^2
e) $\frac{9}{14}$ m

Lösung 1.57

a) $\frac{11}{12}$ m^3
b) 3 m^2
c) 2 ganz ; 0,25 übrig
d) $\frac{7}{4}$ m
e) $\frac{9}{10}$ verbaut; $\frac{1}{10}$ übrig

Lösung 1.58

a) rot: 0,01 m^3
   blau: 15.000.000 mm^3
b) 6 cm
c) Breite: 17 cm, Länge: 19 cm
d) Breite: 5 cm, Länge: 10 cm
e) 12 m

Lösung 1.59

a) 5 m ; 7 m
b) 18 m
c) 12 m
d) 3 m

Lösung 1.60

a) 11 l
b) 10 cm
c) 32 l
d) 10 cm
e) 22 m

Lösung 1.61

a) 23 m^2
b) 35
c) 4 m
d) 62 kg
e) 19 m

Lösung 1.62

a) 5700 g
b) 12 m
c) 28 Euro
d) 350 cm
e) 3,5 m^2
f) 9 Flaschen

Lösung 1.63

a) 3.000 kg
b) 1,85 m
c) 35 kg
d) 2160
e) 10.000
f) 426,2 cm

9.2 LÖSUNGEN – 2

Lösung 2.1

a) 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,5,5,6,7

	1	2	3	…
H	1	2	3	…
h	7,1%	14,3%	21,4%	…

b) 1,2,2,3,3,3,4,4,4,5,6,6,7,8,9,9

	1	2	3	…
H	1	2	3	…
h	6,3%	12,5%	18,8%	…

Lösung 2.2

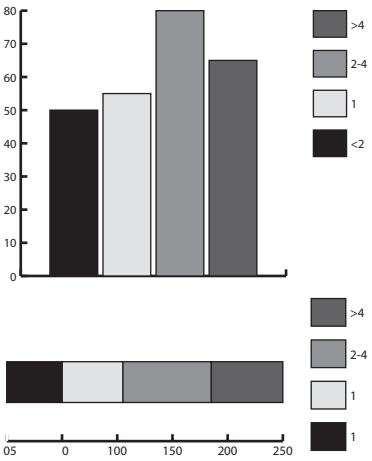
75; 150; 100; 120; 55

Lösung 2.3

a) 30 % d) 44,4 % g) 30 %
b) 60 % e) 50 % h) 200 %
c) 45 % f) 25 %

Lösung 2.4

	<1	1	2-4	>4
H	50	55	80	65
h	20%	22%	32%	26%



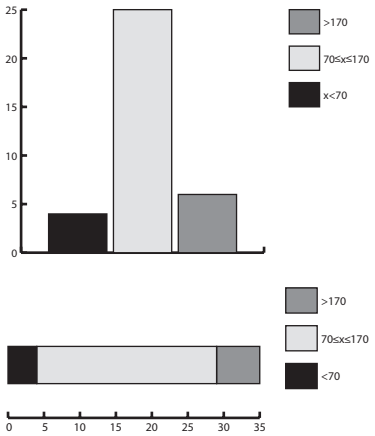
Lösung 2.5

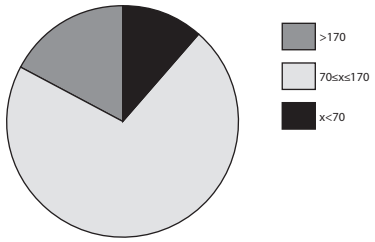
a) **x < 70:** 50, 55, 60, 65
70 ≤ x ≤ 170: 70, 75, 80, 80, 85, 85, 92, 95, 95, 98, 99, 100, 105, 110, 110, 115, 120, 120, 125, 130, 130, 140, 140, 150, 170
x **> 170:** 175, 200, 250, 295, 300, 310

b)

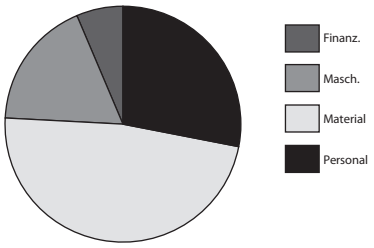
	x<70	70≤x≤170	>170
H	4	25	6
h	11,4%	71,4%	17,1%

c)





Lösung 2.6

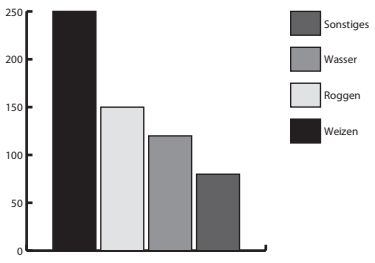


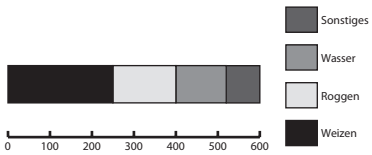
Lösung 2.7

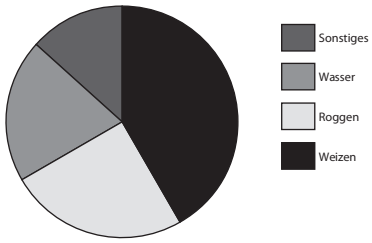
a)

	Wei.	Rog.	Was.	Son.
H	250	150	120	80
h	41,7%	25%	20%	13,3%

b)







Lösung 2.8

a) $\bar{x} = 18{,}22$; $\tilde{x} = 18$; $\bar{x}_d = Ø$
b) $\bar{x} = 12{,}55$; $\tilde{x} = 13$; $\bar{x}_d = 15$
c) $\bar{x} = 14{,}67$; $\tilde{x} = 14{,}5$; $\bar{x}_d = 17$
d) $\bar{x} = 32{,}4$; $\tilde{x} = 34{,}5$; $\bar{x}_d = Ø$

Lösung 2.9

a) $\bar{x} = 5.291.500$ (5,29 Mio.)
b) $\tilde{x} = 3.374.000$ (3,37 Mio.)
c) Jede Einwohnerzahl kommt genau einmal vor: $\bar{x}_d = Ø$

Lösung 2.10

a) $R = 6$; $\bar{x} = 6$; $\bar{d} = 2$; $s = 2{,}28$
b) $R = 4$; $\bar{x} = 6$; $\bar{d} = 1{,}2$; $s = 1{,}41$
c) $R = 8$; $\bar{x} = 6$; $\bar{d} = 2$; $s = 2{,}58$
d) $R = 9$; $\bar{x} = 5$; $\bar{d} = 2{,}57$; $s = 2{,}93$
e) $R = 5$; $\bar{x} = 7{,}5$; $\bar{d} = 1{,}5$; $s = 1{,}73$
f) $R = 11$; $\bar{x} = 9$; $\bar{d} = 4$; $s = 4{,}44$
g) $R = 7$; $\bar{x} = 5$; $\bar{d} = 1{,}71$; $s = 2{,}2$
h) $R = 10$; $\bar{x} = 15$; $\bar{d} = 2{,}67$; $s = 3{,}37$
i) $R = 4$; $\bar{x} = 7{,}63$; $\bar{d} = 1{,}13$; $s = 1{,}32$

Lösung 2.11

a) $\bar{x} = 70{,}5$; $s = 2{,}213$
b) 0,71 %
c) $\bar{x}_d = 71$; $\tilde{x} = 71$

Lösung 2.12

a)

Funktion	Anzahl	Gehalt
Teamleiter	6	4500
Sachbearb.	10	3000
Prokurist	1	9500
Geschäftsf.	1	13000

$R = 10000$
$\bar{x} = 4416{,}67$
$s = 2577{,}95$

b) Die Spannweite ist angesichts von Verantwortung, Qualifikation und Aufgaben gerechtfertigt, da ein Geschäftsführer hohe Verantwortung für Unternehmen und Belegschaft trägt.

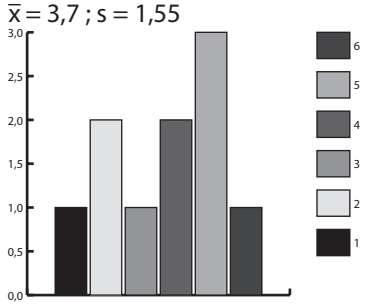
Lösung 2.13

a)

	1	2	3	…
H	1	2	1	…
h	10%	20%	10%	…

b) $\bar{x} = 3{,}7$; $s = 1{,}55$

c)



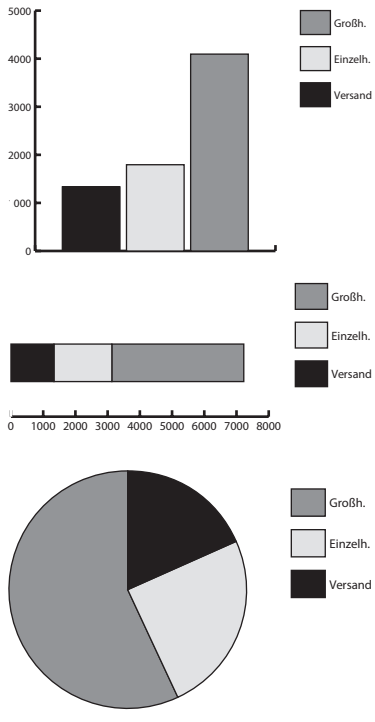
Lösung 2.14

a) $\bar{x} = 23$; $s = 0{,}02$

b) Ja, da die Waage mit einer Abweichung von 0,02 g unterhalb der Toleranzgrenze von 0,023 g (= 0,1 %) liegt.

Lösung 2.15

a)



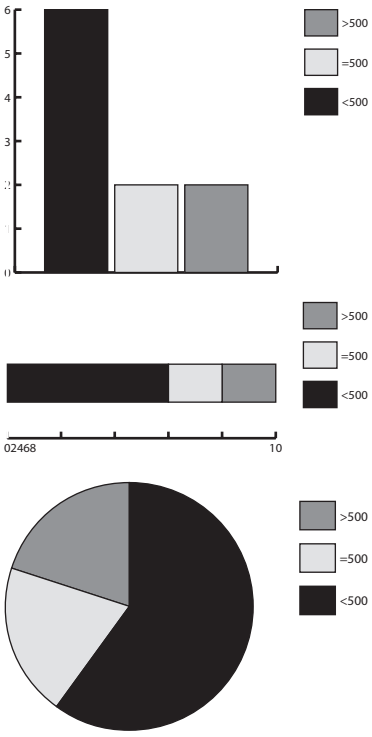
b) Versand: $\bar{x} = 333{,}75$; $s = 54{,}13$
Einzelh.: $\bar{x} = 449$; $s = 19{,}25$
Großh.: $\bar{x} = 1023{,}75$; $s = 66{,}37$
Der Einzelhandel hat am gleichmäßigsten verkauft, der Großhandel am ungleichmäßigsten.

Lösung 2.16

a) $\bar{x} = 495$; $s = 7{,}07$

b)

<500	=500	>500
6	2	2
60 %	20 %	20 %



c) Auch wenn nicht jede Schale exakt 500 g enthält, sollte das arithmetische Mittel mindestens 500 g betragen. Hier liegt es jedoch darunter.

Lösung 2.17

Maschine X: $\bar{x} = 500{,}42$; $s = 2{,}61$
Maschine Y: $\bar{x} = 500{,}16$; $s = 2{,}55$
Maschine Y zeigt die bessere Füllgenauigkeit: Der Mittelwert liegt näher bei 500 g, zudem ist die Streuung geringer.

Lösung 2.18

a) $\bar{x} = 859$; $d = 39{,}2$; $s = 42{,}47$

b) siehe Lösungs-PDF

Lösung 2.19

a) $\bar{x} = 1058$; $\bar{d} = 42$

b) $s = 50{,}06$

c) 4,73 %; Da der Variationskoeffizient (deutlich) unter 10 % liegt, ist die Streuung sehr gering.

Lösung 2.20

m: $\tilde{x} = 72$; $q_u = 68{,}5$; $q_o = 77{,}5$;
$x_{min} = 62$; $x_{max} = 85$
w: $\tilde{x} = 59{,}5$; $q_u = 56$; $q_o = 64$;
$x_{min} = 53$; $x_{max} = 67$
Boxplot: siehe Lösungs-PDF

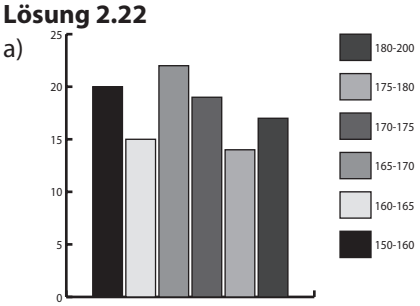
Lösung 2.21

a) $\tilde{x} = 13$; $q_u = 9$; $q_o = 24$; $x_{min} = 3$; $x_{max} = 42$; $\bar{x} = 16{,}5$

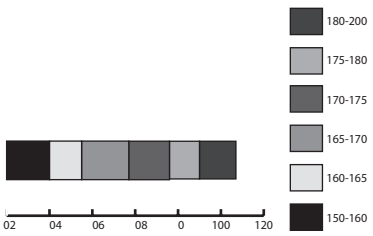
b) siehe Lösungs-PDF

Lösung 2.22

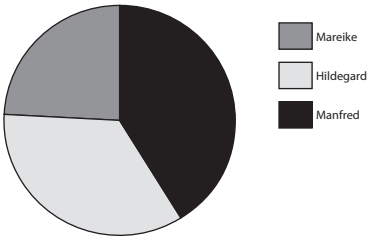
a)



b)



Lösung 2.23

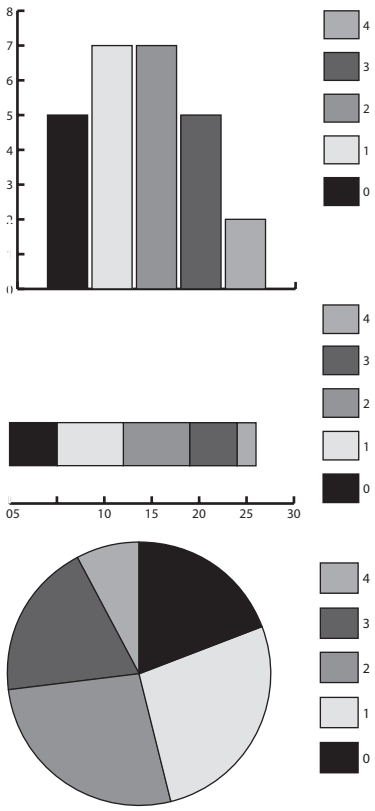


Lösung 2.24

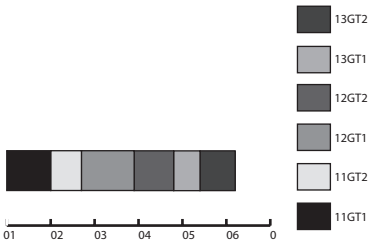
a)

	0	1	2	…
H	5	7	7	…
h	19,2%	26,9%	26,9%	…

b)



Lösung 2.25



Lösung 2.26

a)

	kein Bußgeld	Bußgeld
H	5	15

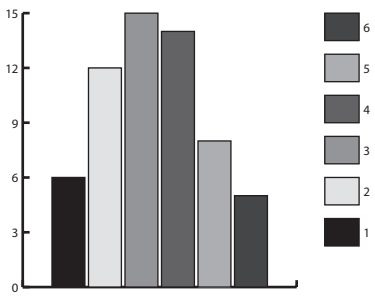
b) 75 % erhalten ein Bußgeld

Lösung 2.27

a) $\bar{x} = 3{,}35$; $\tilde{x} = 3$

b) 78,33 %

c)



Lösung 2.28

12 Personen á 538 Euro:

$\bar{x}_d = 538$

$\tilde{x} = 538$

$\bar{x} = 538$

12 Personen á 538 Euro und 1 Person mit 3200 Euro:

$\bar{x}_d = 538$

$\tilde{x} = 538$

$\bar{x} = 742{,}77$

Das arithmetische Mittel steigt durch eine Person um 38 % und spiegelt deshalb die Verdienstverteilung nicht gut wider.

Lösung 2.29

a) $\bar{x} = 1215$; $\tilde{x} = 1100$; $\bar{x}_d = 800$

b) $\bar{x} = 1005$; $\tilde{x} = 950$; $\bar{x}_d = 800$

Das arithmetische Mittel reagiert am stärksten auf Veränderungen, besonders bei Ausreißern. Median und Modalwert bleiben meist stabil.

Lösung 2.30

a) A: 7,2 ; 7,5 ; 7,8 ; 7,9 ; 8,0 ; 8,0 ; 8,1 ; 8,2 ; 8,3 ; 8,4 ; 8,6
B: 7,1 ; 7,4 ; 7,7 ; 7,8 ; 7,9 ; 8,0 ; 8,1 ; 8,2 ; 8,3 ; 8,4 ; 8,5 ; 8,6

b) $\tilde{x}_A = 8{,}0$; $\tilde{x}_B = 8{,}05$

c) $\bar{x}_A = 8$; $\bar{x}_B = 7{,}92$

d) $\bar{d}_A = 0{,}29$; $\bar{d}_B = 0{,}36$

e) Typ A zeigt den gleichmäßigeren Verbrauch, da die mittlere absolute Abweichung geringer ist.

Lösung 2.31

$\bar{x} = 1{,}57$; $s = 1{,}86$

Lösung 2.32

$\bar{x} = 35{,}2$; $s = 5{,}56$; $\tilde{x} = 35$

Lösung 2.33

a) $s = 1{,}01$

b) individuelle Antwort

Lösung 2.34

a) 1. Platz: Luise mit 4,05 m
2. Platz: Maja mit 4,02 m
3. Platz: Willow mit 3,98 m

b) Luise: $\bar{x} = 3{,}88$; $s = 0{,}22$
Lily May: $\bar{x} = 3{,}93$; $s = 0{,}02$
Willow: $\bar{x} = 3{,}95$; $s = 0{,}03$
Maja: $\bar{x} = 3{,}7$; $s = 0{,}33$

c) Nach dem arithmetischen Mittel wäre Willow auf Platz 1, Lily May auf Platz 2 und Luise auf Platz 3. Bei gleichem Mittel könnte die Standardabw. zur Entscheidung herangezogen werden.

Lösung 2.35

a) 0 ; 500 ; 300 ; 500 ; 200 ; 100 ; 400 ; 50 ; 140 ; 260

b) $s = 170{,}13$

c) Nach dem arithmetischen Mittel stimmt die Aussage, doch die sehr hohe Standardabweichung (VK = 69 %) relativiert sie.

Lösung 2.36

a) $\bar{x} = 2523{,}08$; $s = 2225{,}78$

b) Da die Standardabweichung beim anderen Betrieb trotz ähnlichem Mittel deutlich geringer ist, spricht das für eine ausgewogenere Gehaltsstruktur.

c) individuelle Antwort

Lösung 2.37

a) $s = 442{,}72$

b) VK = 24,6 % => hohe Streuung

Lösung 2.38

a) $\bar{x} = 20{,}2$

b) $\tilde{x} = 19$; $q_A = 7$; $R = 17$

c) Auch wenn das arithmetische Mittel des Monats mit 20,2° über dem langjährigen Wert von 19,5° liegt, lässt sich wegen der kleinen Stichprobe keine Aussage zur Klimaänderung treffen.

Lösung 2.39

a) $\bar{x} = 309{,}1$

b) 400.593,6 Wörter

c) Für eine grobe Schätzung genügt die Rechnung, doch leere Seiten, Prolog, Inhaltsverzeichnis und Widmung können die Genauigkeit beeinflussen.

Lösung 2.40

c) ist die passende Datenliste

Lösung 2.41

siehe Lösungs-PDF

Lösung 2.42
siehe Lösungs-PDF

Lösung 2.43
$\bar{x} = 0{,}096$
Die Produktion kann weiter laufen.

Lösung 2.44
a) $q_0 = 27$; $R = 40$
b) $x_{max} = 48$; $q_A = 22$
c) $x_{min} = 400$; $q_u = 410$
Boxplot c) sticht besonders hervor, da der obere Whisker extrem lang ist. Es gibt anscheinend wenige große Werte, die nicht als Ausreißer gekennzeichnet wurden.

Lösung 2.45
a) siehe Lösungs-PDF
b) $\bar{x} = 119{,}64$
Das arithmetische Mittel ist nahezu identisch mit dem Median.
c) Spanne im unteren Preissegment: 90–116 Euro. Die Hälfte der Anbieter verlangt 116–130 Euro. Preisunterschied zwischen dem günstigsten und teuersten Angebot: ca. 50 Euro.
d) Das untere Quartil liegt unter 200 Euro: mehr als ein Viertel der Anbieter verkauft die Kamera für weniger als 200 Euro bzw. ein Viertel sogar für unter 195 Euro.

Lösung 2.46
siehe Lösungs-PDF

Lösung 2.47
a) $\bar{x} = 160$
b) $s = 13{,}23$
c) $VK = 8{,}27\%$
=> geringe Schwankung

9.3 LÖSUNGEN – 3

Lösung 3.1
Uhrzeit (Nachtpreis), anderes Taxiunternehmen, Zusatzleistungen wie z.B. Kofferservice, Verkehr, Wartezeiten

Lösung 3.2
a) Fahrpreis = Grundpreis + gefahrene Kilometer · Kilometerpreis
b) $f(x) = g + x \cdot p$

Lösung 3.3
a) $K(x) = 1{,}5x + 3$
b) 10,50 Euro ; 18 Euro
c) 6 km
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.4
a) $f(x) = 0{,}5x + 25$
b) 31 Liter
c) 80 min = 01:20 h

Lösung 3.5
a) $p(x) = 2{,}5x + 5$
b) 17,50 Euro ; 35 Euro ; 42,50 Euro
c) siehe Lösungs-PDF (die y-Achse muss rund 11 cm lang sein)

Lösung 3.6
a) $K(x) = 0{,}12x + 71{,}5$
b) 98,86 Euro
c) 444,5 km

Lösung 3.7
a) $K(x) = 0{,}5x + 8$
b) 15,50 Euro ; 20,50 Euro ; 28 Euro
c) 44 km
d) siehe Lösungs-PDF
e) 28,57 %

Lösung 3.8
a) $w(x) = 23{,}4x + 238$
b) 706 Liter ; 1408 Liter ; 2344 Liter
c) 118,034 min = 01:58:02 h
d) siehe Lösungs-PDF
e) 53,93 min

Lösung 3.9
a) $p(x) = 2{,}5x + 3$
b) 8 Euro ; 18 Euro ; 33 Euro
c) 4,2 km
d) 3,4 km

Lösung 3.10
a) $d(x) = -30x + 800$
b) 740 Liter ; 680 Liter ; 620 Liter
c) 650 Liter
d) 2666,7 km
e) 1123,20 Euro

Lösung 3.11
$f(x) = \frac{29}{18}x + 1$

Lösung 3.12
$b(x) = 0{,}3x + 1$
Der y-Achsenabschnitt $y_0 = 1$ steht für die Grundgebühr von 1 Euro. Die Steigung $m = 0{,}3$ steht für den Preis pro Kilometer in Höhe von 0,30 Euro.

Lösung 3.13
a) siehe Lösungs-PDF
b) 2,89 Euro

Lösung 3.14
siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.15
a) $s(x) = -\frac{1}{24}x + 3$
b) siehe Lösungs-PDF
c) ca. 70 min
d) 72 min

Lösung 3.16
a) $t_a(x) = -0{,}08x + 50$
$t_n(x) = -0{,}06x + 40$
b) siehe Lösungs-PDF
c) alt = 625 km ; neu = 666 km

Lösung 3.17
a) $f(x) = 0{,}25x$
$g(x) = -2x + 10$
$h(x) = 2x + 2$
$i(x) = -0{,}5x + 3$
b) siehe Lösungs-PDF
c) 120 h ; 5 h ; 14 h ; 6 h

Lösung 3.18
a) $h(x) = 2{,}5x + 10$
b) siehe Lösungs-PDF
c) 56 sek
d) 56 sek

Lösung 3.19
a) $m_1(x) = -1{,}5x + 60$
$m_2(x) = -2{,}5x + 60$
b) 40 min ; 24 min
c) 45 g ; 35 g

Lösung 3.20
a) $f(x) = -\frac{1}{30}x + 23$
b) 552 min = 09:12 h
c) 138 min ; 02:18 h

Lösung 3.21
a) $v(x) = -0{,}3x + 5$
b) 16,67 d

Lösung 3.22

a) $f(x) = 3x - 1$
b) $f(x) = 3x + 1$
c) $f(x) = 2x + 6$
d) $f(x) = -2x + 3$
e) $f(x) = 4x + 6$
f) $f(x) = -3x$
g) $f(x) = 4x + 7$
h) $f(x) = 3x + 6$

Lösung 3.23

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
b) $f(x) = -0{,}5x + 1{,}5$
c) $f(x) = 0{,}5x + 7$
d) $f(x) = 0{,}5x - 1$
e) $f(x) = 0{,}5x + 1{,}5$
f) $f(x) = -\frac{3}{4}x$
g) $f(x) = x - 2$
h) $f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

Lösung 3.24

a) $w(x) = -4{,}2x + 60$
b) siehe Lösungs-PDF
c) 60 cm ; 09:31 min

Lösung 3.25

a) $w(x) = 5x + 15$
b) 5 cm pro Stunde
c) 15 cm
d) 11 h

Lösung 3.26

a) $h(x) = -13x + 59$
b) 13 cm
c) 65,3 Liter

Lösung 3.27

a) $x = -2$; $y_0 = 6$
b) $x = 4$; $y_0 = 8$
c) $x = 6$; $y_0 = -3$
d) $x = 3{,}5$; $y_0 = 1{,}4$
e) $x = 0{,}25$; $y_0 = -1$
f) $x = 5$; $y_0 = 5$
g) $x = 2{,}25$; $y_0 = -4{,}5$
h) $x = \frac{10}{3}$; $y_0 = 10$

Lösung 3.28

a) $l(t) = -1{,}5t + 15{,}5$
b) 15,5 cm
c) 10,33 h

Lösung 3.29

a) $l(t) = -1{,}2t + 22{,}4$
b) 22,4 cm ; 14,6 cm
c) 14,5 h
d) 18,67 h

Lösung 3.30

a) 411,77 km
b) 49 % ; ja, bei 4 % Restkapazität
c) mehr Gewicht ; mehr Autobahn ; mehr stop-and-go
andere Strecke ; andere Zeit mit weniger Verkehr

Lösung 3.31

a) $h(t) = -383{,}33t + 5033{,}33$
b) 5033,3 m
c) 13,13 min

Lösung 3.32

a) parallel
b) Schnittpunkt
c) identisch
d) parallel

Lösung 3.33

a) $S(\frac{2}{3}|\frac{13}{3})$
b) $S(2|1)$
c) $S(-1|3{,}5)$
d) $S(\frac{18}{7}|\frac{34}{7})$
e) $S(4|2)$
f) $S(\frac{10}{3}|\frac{8}{3})$

Lösung 3.34

a) $g(x) = 15x + 120$
$f(x) = 35x$
b) siehe Lösungs-PDF
c) 6 d
d) 6 d ; 210 Euro

Lösung 3.35

a) $c(x) = 4x + 30$
b) 10 Tonnen
c) $x \in [0 ; 10)$

Lösung 3.36

3 Jahre und 4 Monate

Lösung 3.37

a) $n(x) = 4{,}45x + 12$
$s(x) = 8{,}9x$
b) 2,7 m^3
c) 4,04 m^3
d) Bei 121 Liter pro Person pro Tag:
3,36 m^3 pro Monat (30 Tage)
Nordstrom: 28,15 Euro
Südstrom: 32,31 Euro
e) 14,78 %

Lösung 3.38

a) $n(x) = 63{,}2x + 729$
$m(x) = 104{,}5x + 485$
Ab der sechsten Nacht
b) Mikes Angebot
c) Ninas Angebot
d) Nina: 2595,60 Euro
Mike: 2851,00 Euro
e) $b(x) = 63{,}2x + 485$
2107,6 Euro

Lösung 3.39

a) $b(x) = 250x + 2150$
b) 13 Monate
c) siehe Lösungs-PDF
d) individuelle Antwort

Lösung 3.40

a) $e(x) = 0{,}25x + 20$
$p(x) = 0{,}35x$
b) siehe Lösungs-PDF
c) $x \in [0 ; 200]$
d) 7,35 Euro

Lösung 3.41

a) $r_1(x) = 0{,}05x$
$r_2(x) = -0{,}08x + 16{,}8$
b) ja
c) r_1: 2,86°; r_2: –4,57°
Rampe 1 erfüllt die Vorschrift
d) siehe Lösungs-PDF
e) r_1: 96,12 m; r_2: 60,19 m
f) Rampe 2 muss verlängert werden, gff. sprialförmig bauen

Lösung 3.42

a) $L = \{(1;3)\}$
b) $L = \{(2{,}5;1{,}5)\}$
c) $L = \{(\frac{5}{3};\frac{4}{3})\}$
d) $L = \{(2;1{,}5)\}$
e) $L = \{(2;5)\}$
f) $L = \{(\frac{4}{3};\frac{5}{3})\}$
g) $L = \{(2{,}2;2{,}6)\}$
h) $L = \{(2{,}4;3{,}2)\}$

Lösung 3.43

a) $L = \{(1{,}2;3{,}4)\}$
b) $L = \{(4;2)\}$
c) $L = \{(4{,}5;7{,}5)\}$
d) $L = \{(2;4)\}$
e) $L = \{(2{,}5;1{,}5)\}$
f) $L = \{(1;1)\}$
g) $L = \{(2;1)\}$
h) $L = \{(2;1)\}$

Lösung 3.44

a) $L = \{(2{,}4;0{,}2)\}$
b) $L = \{(1;2)\}$
c) $L = \{(1;2)\}$
d) $L = \{(2{,}5;-0{,}5)\}$
e) $L = \{(2;1)\}$
f) $L = \{(4{,}8;1{,}2)\}$
g) $L = \{(\frac{8}{9};-\frac{13}{9})\}$
h) $L = \{(\frac{7}{11};\frac{23}{11})\}$

Lösung 3.45

a) $L = \{(-\frac{3}{5};\frac{9}{5})\}$
b) $L = \{(\frac{2}{3};\frac{11}{3})\}$
c) $L = \{(3;0)\}$
d) $L = \{(1{,}8;2{,}4)\}$

Lösung 3.46

a) $L = \{(3;2)\}$
b) $L = \{(1;3)\}$
c) $L = \{(2;1)\}$
d) $L = \{(1;2)\}$

Lösung 3.47

a) $m = 3$; $f(x) = 3x$
b) $m = 1{,}5$; $f(x) = 1{,}5x$
c) $m = 0{,}6$; $f(x) = 0{,}6x$
d) $m = 0{,}25$; $f(x) = 0{,}25x$
e) $m = -\frac{1}{3}$; $f(x) = -\frac{1}{3}x$
f) $m = -1$; $f(x) = -x$
g) $m = -2{,}5$; $f(x) = -2{,}5x$

Lösung 3.48

a) $f(x) = 3x$
b) $f(x) = 0{,}5x$
c) $f(x) = -0{,}25x$
d) $f(x) = -0{,}5x$

Lösung 3.49

siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.50

siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.51

a) $f(x) = 1{,}5x - 2$
b) $f(x) = -2x$
c) $f(x) = 3x - 1$
d) $f(x) = 0{,}75x + 2$
e) $f(x) = \frac{5}{6}x - 3$
f) $f(x) = 2x + 1{,}5$
g) $f(x) = -x - 1$
h) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$
i) $f(x) = -3x + 2$
j) $f(x) = 0{,}4x - 2$
k) $f(x) = 0{,}5x + 0{,}5$
l) $f(x) = -1{,}75x + 1$

Lösung 3.52

siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.53

siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.54

siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.55

a) $f(x) = 2x - 5$
b) $f(x) = -1{,}5x + 1$
c) $f(x) = -x + 5$
d) $f(x) = \frac{4}{3}x + 3$
e) $f(x) = 5$
f) $f(x) = 0{,}2x + 0{,}6$

Lösung 3.56

a) $f(x) = 2x + 3$
b) $f(x) = 3x + 3$
c) $f(x) = 0{,}5x + 3$
d) $f(x) = 2x + 3$

Lösung 3.57

a) $f(x) = 3x + 1$
b) $f(x) = 3x + 3$
c) $f(x) = 3x - 5$
d) $f(x) = 3x - 9$

Lösung 3.58

a) $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$
b) $f(x) = 2x - 2$
c) $f(x) = -3x - 3$

Lösung 3.59

a) $f(x) = 2x$
b) $f(x) = -0{,}5x + 5$
c) $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$

Lösung 3.60

a) $f(x) = 2x + 6$
b) $f(x) = x - 3$
c) $f(x) = -4x + 3$
d) $f(x) = -0{,}5x - 1$

Lösung 3.61

a) $f(x) = x + 2$
b) $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$
c) $f(x) = \frac{5}{3}x - 3$
d) $f(x) = 0{,}5x - 0{,}5$
e) $f(x) = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$
f) $f(x) = 0{,}8x - 1{,}6$
g) $f(x) = -0{,}6x + 0{,}8$
h) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$
i) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

Lösung 3.62

a) $f(x) = -\frac{4}{7}x - \frac{18}{7}$
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$
c) $f(x) = \frac{3}{16}x + \frac{11}{2}$
d) $f(x) = \frac{9}{8}x - \frac{23}{8}$
e) $f(x) = \frac{2}{7}x + \frac{2}{7}$
f) $f(x) = -\frac{2}{7}x + \frac{1}{7}$

Lösung 3.63

a) nein
b) ja
c) nein
d) ja
e) ja
f) ja

Lösung 3.64

a) $x_0 = 2$; $y_0 = -6$
b) $x_0 = 8$; $y_0 = 4$
c) $x_0 = -1$; $y_0 = 1$
d) $x_0 = 2{,}5$; $y_0 = 5$
e) $x_0 = 3$; $y_0 = -2$
f) $x_0 = -2$; $y_0 = -2$

Lösung 3.65

a) $x = 4{,}5$
b) $x = -\frac{1}{3}$
c) $x = -2$
d) $x = 1$
e) $x = \frac{7}{3}$
f) $x = -2{,}5$

Lösung 3.66

a) $x = 2$
b) $x = 2$
c) $x = \frac{2}{3}$
d) $x = 2$
e) $x = -12$
f) $x = \frac{7}{3}$

Lösung 3.67

a) $x = -12$
b) $x = 7{,}5$
c) $x = -4$
d) $x = 7{,}5$
e) $x = 8{,}75$
f) $x = -\frac{16}{3}$

Lösung 3.68

a) $x = -\frac{4}{3}$
b) $x = 0{,}1$
c) $x = 0{,}75$
d) $x = -1{,}5$
e) $x = 0{,}25$
f) $x = \emptyset$

Lösung 3.69

a) z. B. $f(x) = 0{,}25x + 0{,}75$
b) z. B. $f(x) = x - 5$
c) z. B. $f(x) = x + 2$

Lösung 3.70

a) $x = 1{,}25$
b) $x = \frac{4}{3}$
c) $x = -0{,}25$
d) $x = 3$
e) $x = -2$
f) $x = 1{,}25$
g) $x = 9$
h) $x = \frac{11}{3}$
i) $x = 3$

Lösung 3.71

a) $x = 7{,}5$
b) $x = 6$
c) $x = -2$
d) $x = 1{,}5$

Lösung 3.72

a) $h(t) = -1{,}5t + 14$
b) 14 cm
c) $t = \frac{28}{3}$; nach 9,33 h (09:20 h) ist die Kerze abgebrannt

Lösung 3.73

a) $f(c) = 1{,}8c + 32$
b) 32° F
c) 37,78° C

Lösung 3.74

a) 37,50 Euro
b) 45,69 Euro

Lösung 3.75

a) 04:10 min
b) 07:30 min

Lösung 3.76

a) $l(x) = 0{,}032x + 7$
b) $y_0 = 7$ entspricht der Länge der Feder ohne angehängtes Gewicht.
c) 16,6 ; 725

Lösung 3.77

a) A
b) 133,33 km

Lösung 3.78

a) $l(t) = -0{,}06t + 18$
b) 17,4 ; 16,8 ; 15,9 ; 15
c) 300 min

Lösung 3.79

0,17 Euro

Lösung 3.80

19,29°

Lösung 3.81

a) 10:00 Uhr b) 18 km

Lösung 3.82

a) $w(t) = 180t$
b) 1,8 l ; 5,4 l ; 21,6 l ; 108 l ; 648 l
c) 18:31 min

Lösung 3.83

a) siehe Lösungs-PDF
b) $m = 0{,}8$
c) $h(t) = 0{,}8t + 17$
d) 17 cm
e) $t = 78{,}75$; 01:18:45 h

Lösung 3.84

a) $h_1(x) = 0{,}1x + 60$
$h_2(x) = 0{,}07x + 120$
b) 166,67 kWh
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.85

a) ja
b) nein
c) 16.244 km
d) 142,6 l
e) Bei einem Verbrauch von 6,5 l auf 100 km müsste das Auto mit mind. drei Personen besetzt sein, um einen geringeren Verbrauch als das Flugzeug zu haben.

Lösung 3.86

Nein, Neigungswinkel muss erhöht werden.

Lösung 3.87

a) A318-100: 8352,31 km
A319-100: 9614,34 km
b) Die Werte sind plausibel, da sich der Kraftstoffverbrauch in der Tabelle nur auf die Reiseflughöhe bezieht. Start, Landung, Steig- und Sinkflug sind nicht berücksichtigt.
c) Der A321-100 mit 12,29 Liter Kerosin pro Stunde pro Person.

Lösung 3.88

a) $r(x) = -0{,}07x + 60$
b) siehe Lösungs-PDF
c) 39 l
d) 857 km ; Nullstelle

Lösung 3.89

a) $k(s) = 9s$ c) 1388,89 km
b) $s(k) = \frac{1}{9}k$ d) 67.500 l

Lösung 3.90

a) $m = 0{,}625$
b) $h(x) = 0{,}625x + 600$
c) 1225 m

Lösung 3.91

a) $w(t) = 600t$ c) 8 h
b) 3600 l

Lösung 3.92

a) 18,75 km/h d) 30 min
b) 30 min e) 68,57 km/h => ja
c) $n(x) = 0{,}5x - 15$

Lösung 3.93

a) $h(t) = 0{,}24t + 90$
b) 104,17 d

Lösung 3.94

a) 9.000 km c) 9,8 mm
b) 2 mm

Lösung 3.95

a) 21,15 min b) 27,5 m^3

Lösung 3.96

a) siehe Lösungs-PDF
b) ja
c) $m = -55{,}4$ m/s ist die Fallgeschwindigkeit ; 199,44 km/h
d) $y_0 = 3914$; Absprunghöhe
e) Der Fallschirmspringer wird von der Erdanziehungskraft beschleunigt, bis er nach einigen Sekunden aufgrund des Luftwiderstands seine maximale Fallgeschwindigkeit erreicht.
f) 1531,8 m
g) 56,21 sek

Lösung 3.97

a) $y = \frac{2}{3}x - 2$ d) $y = 2x - 3$
b) $y = 12x - 6$ e) $y = 2x + 0{,}5$
c) $y = -5x + 8$ f) $y = -\frac{7}{5}x - 2$

Lösung 3.98

a) $y = -3x + 6$ d) $y = 0{,}75x - 3$
b) $y = -2x + 4$ e) $y = \frac{4}{3}x - 2$
c) $y = 0{,}5x + 0{,}5$ f) $y = 0{,}8x - 6$

Lösung 3.99

Andere Lösungen sind auch möglich!

a) $L_1 = \{(2;-1)\}$ d) $L_1 = \{(1;1)\}$
$L_2 = \{(3;2)\}$ $L_2 = \{(2;5)\}$
$L_3 = \{(1;-4)\}$ $L_3 = \{(3;9)\}$
b) $L_1 = \{(-2;0{,}5)\}$ e) $L_1 = \{(2;1)\}$
$L_2 = \{(0;-2)\}$ $L_2 = \{(-2;7)\}$
$L_3 = \{(-4;3)\}$ $L_3 = \{(0;4)\}$
c) $L_1 = \{(0;-3)\}$ f) $L_1 = \{(3;0)\}$
$L_2 = \{(1{,}5;-2)\}$ $L_2 = \{(0;2)\}$
$L_3 = \{(3;-1)\}$ $L_3 = \{(5;-2)\}$

Lösung 3.100

a) -2 ; 4 ; 2 d) 0,2 ; -2 ; 10
b) $\frac{4}{3}$; -2 ; 1,5 e) $\frac{3}{4}$; -3 ; 4
c) -6 ; 3 ; 0,5

Lösung 3.101

a) $L = \{(2;1)\}$ d) $L = \{(2;4)\}$
b) $L = \{(4;0)\}$ e) $L = \{(1;1)\}$
c) $L = \{(1;2)\}$ f) $L = \{(2;-3)\}$

Lösung 3.102

a) $L = \{(1;1)\}$ d) $L = \{(3;1)\}$
b) $L = \{(1;3)\}$ e) $L = \{(2;-1)\}$
c) $L = \{(3;-1)\}$ f) $L = \{(2;0)\}$

Lösung 3.103

a) $L = \{(2;4)\}$
b) $L = \{(-5;-2)\}$
c) $L = \{(-2{,}25;3{,}25)\}$

Lösung 3.104

a) $L = \{(-\frac{20}{7};-\frac{3}{7})\}$ c) $L = \{(\frac{5}{3};\frac{16}{9})\}$
b) $L = \{(1;-2)\}$

Lösung 3.105

a) $L = \{(1{,}8;1{,}6)\}$ d) $L = \{(\frac{25}{11};\frac{18}{11})\}$
b) $L = \{(4;1)\}$ e) $L = \{(\frac{17}{11};\frac{43}{11})\}$
c) $L = \{(1;-1)\}$ f) $L = \{(\frac{20}{9};\frac{14}{9})\}$

Lösung 3.106

a) $L = \{(9;21)\}$ c) $L = \{(3;2{,}5)\}$
b) $L = \{(-12;9)\}$

Lösung 3.107

a) $L = \{(\frac{24}{7};\frac{27}{7})\}$ c) $L = \{(2;4)\}$
b) $L = \{(1{,}2;5)\}$

Lösung 3.108

a) $L = \{(1{,}5;-0{,}5)\}$ d) $L = \emptyset$
b) $L = \{(\frac{13}{7};\frac{25}{7})\}$ e) $L = \{(1{,}6;3{,}8)\}$
c) $L = \{(\frac{16}{11};-\frac{4}{11})\}$ f) $L = \{(\frac{8}{7};\frac{38}{7})\}$

Lösung 3.109

a) $L = \{(-1;-5)\}$
b) $L = \{(2;\frac{2}{3})\}$
c) $L = \{(-6;-7)\}$
d) $L = \{(3;2)\}$
e) $L = \{(\frac{2}{3};3)\}$
f) $L = \{(2;5)\}$

Lösung 3.110

a) $L = \{(2;3)\}$
b) $L = \{(3;2)\}$
c) $L = \{(2;-1)\}$
d) $L = \{(\frac{8}{3};-2)\}$
e) $L = \{(3;2)\}$
f) $L = \{(\frac{40}{19};\frac{33}{19})\}$

Lösung 3.111

a) $L = \{(\frac{13}{6};\frac{5}{3})\}$
b) $L = \{(-\frac{43}{59};-\frac{1}{59})\}$
c) $L = \{(\frac{37}{68};-\frac{33}{34})\}$
d) $L = \{(\frac{26}{17};\frac{28}{17})\}$
e) $L = \{(\frac{41}{33};\frac{18}{11})\}$
f) $L = \{(1{,}65;1{,}6)\}$

Lösung 3.112

a) GV
b) ASV
c) EV
d) ASV
e) ASV

Lösung 3.113

a) $L = \{(-\frac{2}{3};2)\}$
b) $L = \{(9;9)\}$
c) $L = \{(-10{,}5;18)\}$
d) $L = \{(1{,}5;\frac{5}{6})\}$
e) $L = \{(4;3)\}$
f) $L = \{(\infty)\}$

Lösung 3.114

a) $L = \{(8{,}5;18{,}5)\}$
b) $L = \{(-\frac{32}{3};-\frac{16}{3})\}$
c) T: 2,60 Euro
K: 3,70 Euro
d) Sw: 4,00 Euro
S: 2,50 Euro
e) N: 34,8 Jahre
W: 10,2 Jahre

Lösung 3.115

a) 77 Euro
b) 480 Euro

Lösung 3.116

Mutter: 5 Pfund; Sohn: 7 Pfund

Lösung 3.117

19,33 Rubel ; 14,5 Rubel

Lösung 3.118

6 Sunerox ; 20 Xorenus

Lösung 3.119

Mike: 6.666,67 Euro
Nina: 13.333,33 Euro

Lösung 3.120

15 Vierbettzimmer
15 Sechsbettzimmer

Lösung 2.121

Äpfel: 1,40 Euro
Mandarinen: 0,80 Euro

Lösung 3.122

Kaki: 0,59 Euro ; Kiwi: 0,39 Euro

Lösung 3.123

Schüler: 8 Euro ; Lehrer: 14 Euro

Lösung 3.124

a) 21,20 Euro
b) Weil die Artikel im Set wahrscheinlich günstiger sind als einzelne Artikel.

Lösung 3.125

26,50 Euro

Lösung 3.126

I: 3,20 Euro ; K: 2,70 Euro

Lösung 3.127

a) erste Pumpe: 10 %
zweite Pumpe: 6,67 %
b) erste Pumpe: 10 Stunden
zweite Pumpe 15 Stunden

Lösung 3.128

a) $w(x) = -12x + 164$
b) siehe Lösungs-PDF
c) 13,67 min
d) 13,67 min

Lösung 3.129

a) 14,286 min = 14:17 min
b) 13,095 min = 13:06 min

Lösung 3.130

a) $l_1(x) = x - 2$; $l_2(x) = -0{,}2x + 4$
b) S(5|3)
c) Der Punkt liegt genau mittig im Raum. Bei einer Positionierung eines 2x6 m großen Tisches wäre eine Ausleuchtung durchaus gut.
d) Die LED-Längen mit 8,49 m und 10,2 m sind z. B. für die Bestellung von Leuchtmitteln nötig.

Lösung 3.131

a) $L = \{(29{,}25;42{,}75)\}$
b) $L = \{(38;14)\}$
c) $L = \{(10;7)\}$
d) $L = \{(5;13)\}$

Lösung 3.132

a) 20 Ziegen ; 30 Hühner
b) 14 Wohnungen für 4 Personen
6 Wohnungen für 6 Personen
c) Kartoffeln: 22,80 Euro
Äpfel: 16,80 Euro
d) Sandwich: 5,50 Euro
Getränk: 3,25 Euro

Lösung 3.133

a) $r_1(x) = 0{,}08x$; $r_2(x) = \frac{8}{135}x + \frac{56}{135}$
b) r_1: 4,57° ; r_2: 3,39°
c) Beim ersten Design sind nur motorisierte Frontstapler zugelassen, da der Winkel unter 5°, aber über 3,5° liegt. Beim zweiten Design sind motorisierte Frontstapler und manuell bewegte Transportmittel erlaubt, da der Winkel unter 3,5° liegt.

Lösung 3.134

a) $e_1(x) = 0{,}5x$; $e_2(x) = -0{,}5x + 1$
b) S(1|0,5)
c) Die Einlagen teilen den Tisch in vier gleich große Teile
d) Damit die linke Fläche größer wird, müsste der Schnittpunkt weiter nach rechts verschoben werden, z. B. durch eine Änderung der Steigungen.

Lösung 3.135

a) $K(x) = 5x + 120$
b) $K(x) = 5x + 141{,}6$
c) siehe Lösungs-PDF
Dier Erhöhung der Fixkosten verschiebt die Funktion parallel nach oben.

Lösung 3.136

a) $K(x) = 0{,}25x + 18000$
b) 93.000 Euro
c) 72.000 Chips

Lösung 3.137

a) $K(x) = 50x + 10000$
b) $E(x) = 120x$
c) Verlustbereich: $x \in [0;143)$
Gewinnbereich: $x \in (143;x_{max}]$
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.138

a) $K(x) = 30{,}5x + 24000$
b) $E(x) = 72{,}8x$
c) Verlustbereich: $x \in [0;567{,}38)$
Gewinnbereich: $x \in (567{,}38;x_{max}]$
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.139
a) E(x) = 2,4x
K(x) = 1,2x + 120
siehe Lösungs-PDF
b) 100 ME mit 240 GE Gewinn
c) 96 GE
d) 80 ME mit 192 GE Gewinn
e) 516,67 ME

Lösung 3.140
a) G(x) = 13,2x – 45 ist linear
b) siehe Lösungs-PDF

Lösung 3.141
a) $K_A(x) = 27x + 380000$
$K_B(x) = 74x + 136000$
b) A: 474.500 ; 582.5000
B: 395.000 ; 691.000
c) Bis 5191 ME ist B günstiger
d) A: 5.937,5 ME
B: 8.000 ME

Lösung 3.142
a) K(x) = 4x + 35
E(X) = 9x
G(X) = 5x – 35
b) 7 ME
c) 35 ME

Lösung 3.143
a) K(X) = 36x + 27480
b) 43.680 GE
c) E(X) = 97x
G(X) = 61x – 27480
d) S(450,49|43697,72)

Lösung 3.144
a) 42.500 GE
b) 40.600 GE
c) –1.900 GE
d) 6.750 ME

Lösung 3.145
a) K(X) = 3,68x + 88000
b) E(X) = 8,1x
c) G(X) = 4,42x – 88000
d) 19.909,5 ME

Lösung 3.146
a) K(x) = 20x + 23800
E(x) = 32x
G(x) = 12x – 23800
b) 1987,33 ME
c) –2.200 GE ; 5.000 GE
d) siehe Lösungs-PDF
e) 2644,44 ME

Lösung 3.147
a) K(x) = 1,8x + 78000
b) 3,36 GE
c) 4,03 GE
d) 5,64 GE

Lösung 3.148
a) E(X) = 13x
b) G(X) = 8,5x – 15
c) 1,765 ME

Lösung 3.149
a) K(x) = 7x + 33000
E(x) = 15x
G(x) = 8x – 33000
b) 7.000 ME
c) 20,2 GE
d) 8.700 GE => 1.700 GE höher

Lösung 3.150
a) K(x) = 12x + 18000
E(x) = 25x
G(x) = 13x – 18000
b) 1384,62 ME
c) 1800 ME

9.4 LÖSUNGEN – 4

Lösung 4.1
a) 4 ; 1 ; 0 ; 1 ; 4
b) siehe Lösungs-PDF
c) S(0|0)

Lösung 4.2
a ; d ; e ; g ; h ; i

Lösung 4.3
y = 25 ; y = 2,25 ; y = 16 ; y = 4 ;
x = ±1,41 ; x = ±7 ; x = ±0,8

Lösung 4.4
Der Vorfaktor a streckt oder staucht die Parabel und spiegelt sie an der x-Achse, wenn a negativ ist.

Lösung 4.5
oben ; unten ; gestreckt ; gestaucht ; gestaucht ; gestreckt ; Normalparabel ; unten ; Normalparabel

Lösung 4.6
Andere Lösungen sind auch möglich!
a) $f(x) = 1,2x^2$
$g(x) = 1,5x^2$
b) $f(x) = –0,9x^2$
$g(x) = –0,8x^2$
c) $f(x) = 0,1x^2$
$g(x) = 0,01x^2$
d) $f(x) = –10,2x^2$
$g(x) = –33,33x^2$

Lösung 4.7
a) gestreckt ; nach unten geöffnet
b) gestaucht ; nach oben geöffnet
c) gestreckt ; nach oben geöffnet
d) gestreckt ; nach unten geöffnet

Lösung 4.8
a) siehe Lösungs-PDF
b) nach unten geöffnet und gestaucht

Lösung 4.9
a) siehe Lösungs-PDF
b) h(x) ist am breitesten
g(x) ist nach unten geöffnet
f(x) ist am stärksten gestreckt

Lösung 4.10
a) a > 0 => nach oben geöffnet
a < 0 => nach unten geöffnet
b) a = 2: gestreckt, oben geöffnet
a = 0,5: gestaucht, oben geöffnet
a = –3: gestreckt, unten geöffnet
Je größer der Betrag von a, desto gestreckter ist die Parabel. Je kleiner der Betrag von a (≠ 0), desto gestauchter wird sie.
c) siehe Lösungs-PDF
Der Parameter c beschreibt die Verschiebung in y-Richtung:
c > 0 => nach oben verschoben
c < 0 => nach unten verschoben

Lösung 4.11
a) siehe Lösungs-PDF
b) Ja, alle Parabeln sind achsensymmetrisch. Der Vorfaktor a bestimmt durch sein Vorzeichen die Öffnungsrichtung.

Lösung 4.12
$f(x) = –0,00192x^2$

Lösung 4.13
a) $f(x) = –0,0525x^2$
b) 15,75 m

Lösung 4.14

a) $f(x) = -0{,}1125x^2 + 1{,}8$
b) 1,35 m
c) 1,57 m

Lösung 4.15

a) individuelle Lösung
b) Der Wert a beschreibt die Streckung und Öffnungsrichtung, die Werte d und e beschreiben die Position des Scheitelpunktes.
c) a: Streckung/Stauchung, Richtung der Öffnung
d: Verschiebung des Scheitelpunktes in x-Richtung
$d < 0$ => Versch. nach rechts
$d > 0$ => Vesch. nach links
e: Verschiebung des Scheitelpunktes in y-Richtung
$e < 0$ => Versch. nach unten
$e > 0$ => Versch. nach oben
d) S(d|e)

Lösung 4.16

a) $f(x) = 0{,}5(x - 1)^2 - 3$
b) $f(x) = -2(x + 3)^2 + 4$

Lösung 4.17

a) Die Parabel ist nach unten geöffnet und um den Faktor 0,6 gestaucht. Sie ist um drei Einheiten nach rechts und vier nach oben verschoben, sodass der Scheitelpunkt bei S(3|4) liegt.
b) Die Parabel ist nach oben geöffnet und um den Faktor 4,5 gestreckt. Sie ist um drei Einheiten nach links und eine nach unten verschoben, sodass der Scheitelpunkt bei S(–3|–1) liegt.
c) Die Parabel ist nach unten geöffnet und um den Faktor 0,25 gestaucht. Sie ist um zwei Einheiten nach rechts und sechs nach oben verschoben, sodass der Scheitelpunkt bei S(2|6) liegt.

Lösung 4.18

a) $v(x) = -0{,}003888(x - 50)^2 + 9{,}72$
b) 26,24 km/h ; 12,6 km/h
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 4.19

a) $f(x) = -0{,}0051(x - 84)^2 + 36$
b) nein, da der Ball in einer Höhe von 2,54 m über seinen Kopf hinweg fliegt.
c) 31,61 m ; 136,39 m

Lösung 4.20

a) $f(x) = -0{,}02118(x - 24)^2 + 14$
b) 49,71 m
c) 6,35 m

Lösung 4.21

a) $f(x) = -0{,}051(x - 14)^2 + 10$
b) $a = -0{,}051$: nach unten geöffnet und gestaucht

Lösung 4.22

$f(x) = (x + 9)^2 - 5$
$g(x) = (x + 6)^2 + 2$
$h(x) = (x + 2)^2 - 3{,}5$
$i(x) = x^2$
$j(x) = x^2 + 6$
$k(x) = (x - 5)^2 - 2$

Lösung 4.23

siehe Lösungs-PDF

Lösung 4.24

a) $x^2 + 4x + 4$ c) $x^2 + 8x + 16$
b) $x^2 - 10x + 25$ d) $x^2 - 6x + 9$

Lösung 4.25

a) f: nach oben geöffnet ; gestreckt ; S(2|–1)
g: nach unten geöffnet ; gestaucht ; S(5|5)
b) siehe Lösungs-PDF
c) $f(x) = 3x^2 - 12x + 11$
$g(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 7{,}5$
d) Die letzte Zahl der Normalform beschreibt den y-Achsenabschnitt.

Lösung 4.26

a) 4 b) 1 c) 3 d) 2

Lösung 4.27

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$
$S(-1|-4)$; $a = 2$; $y_0 = -2$
b) $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$
$S(2|5)$; $a = -3$; $y_0 = -7$
c) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 3{,}5$
$S(3|-1)$; $a = 0{,}5$; $y_0 = 3{,}5$
d) $f(x) = 4x^2 + 16x + 10$
$S(-2|-6)$; $a = 4$; $y_0 = 10$
e) $f(x) = 2x^2 - 16x + 33$
$S(4|1)$; $a = 2$; $y_0 = 33$
f) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
$S(1|2)$; $a = 1$; $y_0 = 3$
g) $f(x) = -0{,}5x^2 - 3x - 0{,}5$
$S(-3|4)$; $a = -0{,}5$; $y_0 = -0{,}5$
h) $f(x) = 3x^2 - 30x + 68$
$S(5|-7)$; $a = 3$; $y_0 = 68$
i) $f(x) = -2x^2 - 16x - 34$
$S(-4|-2)$; $a = -2$; $y_0 = -34$

Lösung 4.28

a) $f(x) = 2x^2 + 12x + 16$
b) $f(x) = 1{,}125x^2 - 4{,}5x + 5{,}5$
c) $f(x) = x^2 + 2x + 5$
d) $f(x) = 0{,}5x^2 + 4$
e) $f(x) = x^2 - 6x + 4$
f) $f(x) = 0{,}25x^2 + 3x + 20$
g) $f(x) = 0{,}5x^2 + x - 6$
h) $f(x) = 7x^2 - 70x + 178$
i) $f(x) = \frac{3}{64}x^2 + \frac{9}{32}x + \frac{91}{64}$

Lösung 4.29

1,9 m

Lösung 4.30

a) + 3 c) + 8 e) + 4
b) – 5 d) – 7 f) – 6

Lösung 4.31

a) $f(x) = (x + 7)^2$ d) $i(x) = (x + 6)^2$
b) $g(x) = (x - 8)^2$ e) $j(x) = (x + 9)^2$
c) $h(x) = (x + 2)^2$ f) $k(x) = (x - 10)^2$

Lösung 4.32

a) $1 => (x + 1)^2$
b) $4 => (x - 2)^2$
c) $144 => (x - 12)^2$
d) $6{,}25 => (x - 2{,}5)^2$
e) $56{,}25 => (x + 7{,}5)^2$
f) $20{,}25 => (x - 4{,}5)^2$
g) $1 => (x - 1)^2$
h) $16 => (x - 4)^2$
i) $81 => (x - 9)^2$

Lösung 4.33

a) $f(x) = 2(x - 2)^2$
$S(2|0)$; $a = 2$; $y_0 = 8$
b) $f(x) = 5(x + 1)^2 - 45$
$S(-1|-45)$; $a = 5$; $y_0 = -40$
c) $f(x) = 4(x - 2)^2 - 59$
$S(2|-59)$; $a = 4$; $y_0 = -43$

d) $f(x) = 2(x + 5)^2 - 45$
$S(-5|-45)$; $a = 2$; $y_0 = 5$
e) $f(x) = 5(x + 2)^2 + 11{,}25$
$S(-2|11{,}25)$; $a = 5$; $y_0 = 31{,}25$
f) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 14$
$S(3|-14)$; $a = 2$; $y_0 = 4$
g) $f(x) = 3(x + 1)^2 - 15$
$S(-1|-15)$; $a = 3$; $y_0 = -12$
h) $f(x) = 3(x - 2)^2 - 5$
$S(2|-5)$; $a = 3$; $y_0 = 7$
i) $f(x) = 4(x + 2)^2 + 14$
$S(-2|14)$; $a = 4$; $y_0 = 30$

Lösung 4.34

a) $f(x) = (x + 2)^2 - 3$
$S(-2|-3)$; $y_0 = 1$
b) $f(x) = (x - 3)^2 + 1$
$S(3|1)$; $y_0 = 10$
c) $f(x) = (x + 1)^2 - 8$
$S(-1|-8)$; $y_0 = -7$
d) $f(x) = (x - 5)^2 - 4$
$S(5|-4)$; $y_0 = 21$
e) $f(x) = (x + 10)^2 - 114$
$S(-10|-114)$; $y_0 = -14$
f) $f(x) = (x + 8)^2 - 41$
$S(-8|-41)$; $y_0 = 23$

Lösung 4.35

a) $f(x) = 3(x - 1)^2 - 8$
$S(1|-8)$; $a = 3$; $y_0 = -5$
b) $f(x) = 2(x - 2)^2 + 5$
$S(2|5)$; $a = 2$; $y_0 = 13$
c) $f(x) = 4(x + 1{,}25)^2 - 18{,}25$
$S(-1{,}25|-18{,}25)$; $a = 4$; $y_0 = -12$
d) $f(x) = 5(x + 2{,}5)^2 - 16{,}25$
$S(-2{,}5|-16{,}25)$; $a = 5$; $y_0 = 15$
e) $f(x) = 6(x + 1{,}5)^2 + 16{,}5$
$S(-1{,}5|16{,}5)$; $a = 6$; $y_0 = 30$
f) $f(x) = 4(x - 0{,}5)^2 + 2$
$S(0{,}5|2)$; $a = 4$; $y_0 = 3$
g) $f(x) = 2(x - 1{,}5)^2 - 12{,}5$
$S(1{,}5|-12{,}5)$; $a = 2$; $y_0 = -8$
h) $f(x) = 3(x + 2{,}5)^2 - 13{,}75$
$S(-2{,}5|-13{,}75)$; $a = 3$; $y_0 = 5$
i) $f(x) = 4(x - \frac{15}{8})^2 - \frac{113}{16}$
$S(1{,}875|-7{,}0625)$; $a = 4$; $y_0 = 7$

Lösung 4.36

a) 484 cm = 4,84 m
b) 176,36 cm = 1,76 m
c) 243,93 cm = 2,44 m

Lösung 4.37

a) $f(x) = -0{,}5(x - 2)^2 + 2$
b) 2 m Höhe in 2 m Entfernung
c) 1,88 m

Lösung 4.38

a) $f(x) = -0{,}2(x - 3)^2 + 3{,}8 \Rightarrow S(3|3{,}8)$
b) 3,8 m
c) 7,36 m

Lösung 4.39

a) $f(x) = -0{,}2(x - 2)^2 + 0{,}8 \Rightarrow$ 80 cm
b) Mit 4 m Breite, passt auf Hänger
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 4.40

a) gemischt quadratisch
b) reinquadratisch
c) gemischt quadratisch
d) nicht quadratisch
e) gemischt quadratisch
f) nicht quadratisch

Lösung 4.41

a) $2x^2 - 5x + 7 = 0$
$a = 2$; $b = -5$; $c = 7$
b) $-4x^2 + 6 - 10 = 0$
$a = -4$; $b = 6$; $c = -10$
c) $x^2 + 2x - 4 = 0$
$a = 1$; $b = 2$; $c = -4$
d) $3x^2 - 2x - 7 = 0$
$a = 3$; $b = -2$; $c = -7$
e) $x^2 - 4x - 1 = 0$
$a = 1$; $b = -4$; $c = -1$
f) $4x^2 - x - 5 = 0$
$a = 4$; $b = -1$; $c = -5$

Lösung 4.42

a) –3 ; keine Lösung
b) 9 ; zwei Lösungen
c) 1,5 ; zwei Lösungen
d) 0 ; eine Lösung
e) 4 ; zwei Lösungen

Lösung 4.43

a) $x_1 = 0$
b) $x_1 = 0{,}894 \vee x_2 = -0{,}894$
c) $x_1 = \emptyset$
d) $x_1 = 3 \vee x_2 = -3$
e) $x_1 = 2{,}739 \vee x_2 = -2{,}739$
f) $x_1 = 1{,}25 \vee x_2 = -1{,}25$
g) $x_1 = 1 \vee x_2 = -1$
h) $x_1 = 4 \vee x_2 = -4$

Lösung 4.44

a) $x_1 = 0 \vee x_2 = 4$
b) $x_1 = 0 \vee x_2 = -2$
c) $x_1 = 0 \vee x_2 = -2$
d) $x_1 = 0 \vee x_2 = 3$
e) $x_1 = 0 \vee x_2 = -2$
f) $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$
g) $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$
h) $x_1 = 0 \vee x_2 = -2{,}5$
i) $x_1 = 0 \vee x_2 = 2{,}5$
j) $x_1 = 0 \vee x_2 = 6$
k) $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$
l) $x_1 = 0 \vee x_2 = -6$

Lösung 4.45

a) $x_1 = 2 \vee x_2 = 1$
b) $x_1 = 1 \vee x_2 = -5$
c) $x_1 = 6 \vee x_2 = 2$
d) $x_1 = \frac{1}{3} \vee x_2 = -1$
e) $x_1 = 2 \vee x_2 = \frac{1}{3}$
f) $x_1 = 2 \vee x_2 = 1$
g) $x_1 = 1 \vee x_2 = 0{,}2$
h) $x_1 = 1{,}29 \vee x_2 = -9{,}29$
i) $x_1 = 3{,}5 \vee x_2 = -\frac{5}{3}$

Lösung 4.46

a) $x_1 = 3 \vee x_2 = -1$
b) $x_1 = -0{,}586 \vee x_2 = -3{,}414$
c) $x_1 = 6{,}828 \vee x_2 = 1{,}172$
d) $x_1 = \emptyset$
e) $x_1 = \emptyset$
f) $x_1 = 1{,}53 \vee x_2 = -0{,}13$

Lösung 4.47

a) siehe Lösungs-PDF
b) 310,48 m
c) 60,25 m
d) 60,25 m
e) 31,38 m ; 51,39 m

Lösung 4.48

a) $f(x) = -\frac{5}{64}x^2 + 0{,}625x + 2$
b) 10,45 m
c) 9,66 m

Lösung 4.49

a) 51,24 m
b) 28,125 m
c) 1./4.: 8,4 m ; 2./3.: 12,6 m

Lösung 4.50

134,16 m

Lösung 4.51

a) siehe Lösungs-PDF
b) links: $S_1(1|4)$; $S_2(6|9)$
mittig: Ø
rechts: $S(4|5)$
c) kleiner als null ist ; gleich null ist ; größer als null ist
d) Passante ; Tangente ; Sekante

Lösung 4.52

a) $S_1(1|0)$; $S_2(-4|5)$ => Sekante
b) $S_1(5|4)$; $S_2(1|4)$ => Sekante
c) $S_1(0|3)$; $S_2(2{,}5|5{,}5)$ => Sekante
d) $S_1(6|-4)$; $S_2(-2|4)$ => Sekante
e) Ø => Passante
f) $S(-1|5)$ => Tangente

Lösung 4.53

a) $S_1(7|5)$; $S_2(-3|0)$ => Sekante
b) $S_1(2|1)$; $S_2(-1|4)$ => Sekante
c) $S_1(2{,}58|-1{,}16)$; $S_2(-2{,}58|9{,}16)$ => Sekante
d) $S_1(28|24)$; $S_2(4|0)$ => Sekante
e) $S_1(7{,}16|19{,}48)$; $S_2(0{,}84|0{,}52)$ => Sekante
f) Ø => Passante
g) $S_1(3|0)$; $S_2(2|-4)$ => Sekante
h) $S_1(4|2)$; $S_2(2|4)$ => Sekante
i) Ø => Passante

Lösung 4.54

a) $S_1(8|7)$; $S_2(-3|1{,}5)$
b) $x = -6$
c) 26,57° ; Die Steigung der Rampe übertrifft die Vorgabe deutlich und wäre daher unzulässig. Allerdings ist fraglich, ob eine barrierefreie Rampe bei einer Halfpipe sinnvoll ist.

Lösung 4.55

a) $S_1(2|3)$; $S_2(-0{,}5|3)$ => $g(x) = 3$
b) keine Schnittpunkte
c) $S(2{,}5|4{,}625)$
d) keine Schnittpunkte
e) $S_1(1|0)$; $S_2(-1|-6)$ => $g(x) = 3x - 3$
f) $S_1(6|-34)$; $S_2(-2|-18)$ => $g(x) = -2x - 22$
g) $S(\frac{7}{3}|\frac{4}{9})$
h) $S_1(1|2)$
i) $S_1(\sqrt{2}|0)$; $S_2(-\sqrt{2}|0)$ => $g(x) = 0$

Lösung 4.56

a) $S_1(0|10{,}6)$; $S_2(3|1{,}6)$ => $g(x) = -3x + 10{,}6$
b) $S_1(1{,}78|6{,}98)$; $S_2(-2{,}87|-2{,}49)$ => $g(x) = 2{,}04x + 3{,}35$
c) keine Schnittpunkte
d) keine Schnittpunkte
e) $S_1(-0{,}55|5{,}58)$; $S_2(-47{,}45|568{,}38)$ => $g(x) = -12x - 1{,}02$
f) $S_1(6{,}8|3)$; $S_2(3{,}58|-9{,}7)$ => $g(x) = 3{,}94x - 23{,}79$

Lösung 4.57

a) $f_1(x) = (x-2)^2 - 1$
$f_2(x) = x^2 + 3$
=> ein Schnittpunkt
b) $f_1(x) = 0{,}5(x+2)^2 - 3$
$f_2(x) = 3(x-1)^2 + 2$
=> zwei Schnittpunkte
c) $f_1(x) = (x-3)^2 + 4$
$f_2(x) = 2(x+1)^2 - 2$
=> zwei Schnittpunkte
d) $f_1(x) = 2(x-1)^2$
$f_2(x) = \frac{2}{3}(x+2)^2 - 1$
=> zwei Schnittpunkte
e) $f_1(x) = (x+3)^2 + 2$
$f_2(x) = x^2 - 4$
=> ein Schnittpunkt
f) $f_1(x) = \frac{2}{3}(x-2)^2 - 2$
$f_2(x) = (x+1)^2 + 1$
=> zwei Schnittpunkte
g) $f_1(x) = 4x^2 - 3$
$f_2(x) = 4(x-2)^2 + 5$
=> ein Schnittpunkt
h) $f_1(x) = 5(x+4)^2$
$f_2(x) = 2(x-3)^2 - 1$
=> zwei Schnittpunkte

Lösung 4.58

a) $x_1 = 4$; $x_2 = \frac{4}{3}$
b) $y_1 = 3$; $y_2 = \frac{11}{9}$
c) zwei Schnittpunkte
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 4.59

a) $f(x) = -(x-2)^2 + 8$
b) $S(4|4)$
c) $x_1 = 4{,}83 \quad \vee \quad x_2 = -0{,}83$

Lösung 4.60

$S(4{,}58|2{,}66)$

Lösung 4.61

a) $f(x) = -1{,}5(x-7)(x+9)$
$f(x) = -1{,}5x^2 - 3x + 94{,}5$
b) $f(x) = 0{,}8(x+3)(x-1)$
$f(x) = 0{,}8x^2 + 1{,}6x - 2{,}4$
c) $f(x) = -2(x-4{,}5)(x-5)$
$f(x) = -2x^2 + 19x - 45$
d) $f(x) = 0{,}25(x+1)(x+10)$
$f(x) = 0{,}25x^2 + 2{,}75x + 2{,}5$
e) $f(x) = \frac{1}{3}(x-2)(x-3)$
$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + 2$
f) $f(x) = -\frac{1}{8}(x-12)(x+3)$
$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{9}{8}x + 4{,}5$

Lösung 4.62

a) $f(x) = 2x^2 + 6x - 8$
b) $f(x) = -3x^2 + 9x + 30$
c) $f(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 9$

Lösung 4.63

a) $f(x) = 3(x-2)(x+5)$
b) $f(x) = -2(x-3)(x+4)$
c) $f(x) = 5(x-1)(x-1) = 5(x-1)^2$

Lösung 4.64

$f(x) = -(x+2)(x-4)$

Lösung 4.65

a) $L = \{(2;4;6)\}$
b) $L = \{(1;3;2)\}$
c) $L = \{(3;1;4)\}$

Lösung 4.66

a) $L = \{(6;4;4)\}$
b) $L = \{(6;5;2)\}$
c) $L = \{(1;2;4)\}$

Lösung 4.67

a) $L = \{(1{,}2;4{,}5;3{,}1)\}$
b) $L = \{(3{,}5;5{,}2;2{,}2)\}$
c) $L = \{(1{,}1;2{,}2;3{,}3)\}$

Lösung 4.68

a) $L = \{(2;-3;4)\}$
b) $L = \{(-1;5;-2)\}$
c) $L = \{(4;-2;-1)\}$

Lösung 4.69

a) $L = \{(-2;3;5)\}$
b) $L = \{(3;-1;-2)\}$
c) $L = \{(1;-5;4)\}$

Lösung 4.70

a) $L = \{(\frac{137}{45};\frac{17}{15};\frac{40}{9})\}$
b) $L = \{(3;2;3)\}$
c) $L = \{(\frac{29}{8};\frac{29}{8};\frac{15}{4})\}$

Lösung 4.71

a) Malerstunde: 57,50 Euro
Elektrikerstunde: 72,50 Euro
Fliesenlegerstunde: 82,50 Euro

b) 563,03 Euro ; 596,64 Euro ; 689,08 Euro

Lösung 4.72

Flyer: 0,13 Euro ; Plakat: 1,74 Euro ; Banner: 75,90 Euro

Lösung 4.73

Stuhl: 4,15 Euro ; Tisch: 12,99 Euro ; Leuchtwand: 136,42 Euro

Lösung 4.74

a) $L = \{(2;-1;3)\}$ c) $L = \{(2;-1;3)\}$

b) $L = \{(2;-1;3)\}$

Lösung 4.75

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b) $f(X) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{14}{3}x - 2$

c) $f(x) = 1{,}5x^2 - 0{,}75x - 4{,}5$

d) $f(x) = -2x^2 - x + 10$

e) $f(x) = 0{,}5x^2 - 0{,}5x - 3$

f) $f(x) = -3x^2 + 13{,}5x - 6$

Lösung 4.76

a) $f(x) = -0{,}05x^2 + x$

b) 5m

Lösung 4.77

a) $f(x) = 0{,}6x^2 - 0{,}8x + 5$
$f(x) = 0{,}6(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{71}{15}$

b) $f(x) = -2x^2 + 3x - 4$
$f(x) = -2(x - 0{,}75)^2 - 2{,}875$

c) $f(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 1$
$f(x) = 0{,}5(x + 3)^2 - 3{,}5$

d) $f(x) = -12x^2 + x + 6$
$f(x) = -12(x - \frac{1}{24})^2 + \frac{289}{48}$

e) $f(x) = -\frac{1}{30}x^2 + \frac{47}{30}x + 1{,}5$
$f(x) = -\frac{1}{30}(x - 23{,}5)^2 + 19{,}91$

f) $f(x) = \frac{59}{60}x^2 - \frac{101}{60}x + 0{,}2$
$f(x) = \frac{59}{60}(x - \frac{101}{118})^2 - 0{,}52$

Lösung 4.78

$f(x) = -0{,}75x^2 + 6x - 6$

Lösung 4.79

A ; B ; E ; F ; G

Lösung 4.80

a) falsch c) richtig

b) richtig d) richtig

Lösung 4.81

A ; B ; D

Lösung 4.82

a) $y = 5{,}25$ d) $x = \pm 4$

b) $x = \pm 2$ e) $y = 9{,}25$

c) $y = 12$

Lösung 4.83

a) siehe Lösungs-PDF

b) A auf 1.)
B auf 2.)
C auf keiner
D auf 3.)

c) siehe b)

Lösung 4.84

a) $f(x) = x^2 + 4$; S(0|4)

b) $f(x) = x^2 - 4$; S(0|–4)

c) $f(x) = x^2 + 2$; S(0|2)

d) $f(x) = x^2 + 7$; S(0|7)

e) $f(x) = x^2 - 3$; S(0|–3)

Lösung 4.85

a) ja b) nein c) ja

Lösung 4.86

a) $y = 4$ b) $y = 9$ c) $y = 36$

Lösung 4.87

a) $x_1 = 0 \vee x_2 = -6$

b) $x_1 = 2 \vee x_2 = -8$

c) $x_1 = -0{,}5 \vee x_2 = -5{,}5$

Lösung 4.88

a) $f(x) = (x + 6)^2$ c) $f(x) = (x + 2)^2$

b) $f(x) = (x - 5)^2$ $f(x) = (x - 6)^2$

Lösung 4.89

a) S(3|–5) ; 3 nach rechts ; 5 nach unten

b) $f(x) = (x - 2)^2 - 7$; 2 nach rechts ; 7 nach unten

c) $f(x) = (x + 6)^2 + 3$; S(–6|3)

d) $f(x) = (x - 1{,}5)^2 + 0{,}8$; 1,5 nach rechts ; 0,8 nach oben

e) S(–4|–8) ; 4 nach links ; 8 nach unten

f) $f(x) = (x - 3)^2 - 1{,}5$; S(3|–1,5)

Lösung 4.90

a) $f(x) = (x - 1)^2 + 4$

b) $f(x) = (x + 3)^2 + 2$

c) $f(x) = (x + 2)^2 + 1$

d) $f(x) = (x - 5)^2 + 7$

e) $f(x) = x^2 - 3$

Lösung 4.91

$f(x) = 0{,}000268x^2$

Lösung 4.92

$f(x) = -\frac{5}{72}(x - 6)^2 + 2{,}5$

Lösung 4.93

$f(x) = -\frac{4}{425}(x - 85)^2 + 68$

Lösung 4.94

$f(x) = -0{,}0111x^2$

Lösung 4.95

606,63 m

Lösung 4.96

$f(x) = -0{,}107(x - 7{,}8)^2 + 6{,}5$

Lösung 4.97

a) $f(x) = x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = x^2 - 2{,}8x + 2{,}96$

c) $f(x) = 3x^2 + 1{,}8x - 2{,}23$

d) $f(x) = -2x^2 + 8x - 4{,}75$

e) $f(x) = -5x^2 - 5x - 2{,}25$

f) $f(x) = 1{,}2x^2 - 9{,}6x + 20$

g) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 9$

h) $f(x) = 0{,}75x^2 + 3{,}3x - 2{,}37$

i) $f(x) = -1{,}5x^2 + 0{,}3x + 2{,}735$

j) $f(x) = 2x^2 + 2{,}4x - 4{,}28$

k) $f(x) = -0{,}25x^2 + 2{,}5x - 2{,}75$

l) $f(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}2x - 1{,}28$

Lösung 4.98

a) $f(x) = (x - 2)^2 - 2$

b) $f(x) = (x - 1{,}2)^2 - 2{,}44$

c) $f(x) = 1{,}5(x + 1)^2 + 3$

d) $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$

e) $f(x) = -3(x - 0{,}25)^2 + 2{,}1875$

f) $f(x) = -2{,}5(x - 1)^2 + 5{,}5$

g) $f(x) = 0{,}6(x - 1{,}5)^2 - 1{,}35$

h) $f(x) = 1{,}2(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{4}{15}$

i) $f(x) = 0{,}02(x + 30)^2 - 18$

j) $f(x) = -0{,}5(x + 1)^2 + 1{,}5$

k) $f(x) = 0{,}1(x + 2)^2 + 0{,}6$

l) $f(x) = -\frac{1}{3}(x - 0{,}5)^2 - \frac{11}{12}$

Lösung 4.99

a) $x_1 = 2 \vee x_2 = -2$

b) $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$

c) $x_1 = 0 \vee x_2 = -5$

d) $x_1 = 0 \vee x_2 = 6$

e) $x_1 = 0 \vee x_2 = -3$
f) $x_1 = 0 \vee x_2 = 4$
g) $x_1 = 0 \vee x_2 = 2$
h) $x_1 = 0 \vee x_2 = 3$
i) $x_1 = -2{,}5 \vee x_2 = 6$
j) $x_1 = 2 \vee x_2 = -1$
k) $x_1 = 4 \vee x_2 = 5$
l) $x_1 = 0 \vee x_2 = 4 \vee x_3 = -4$

Lösung 4.100
a) $x_1 = 2 \vee x_2 = -4$
b) $x_1 = -1{,}56 \vee x_2 = 2{,}56$
c) $x = Ø$
d) $x_1 = 0 \vee x_2 = 3 \vee x_2 = -1$
e) $x = 1$
f) $x_1 = 1{,}74 \vee x_2 = 0{,}46$
g) $x = 2$
h) $x_1 = 4 \vee x_2 = -2$
i) $x_1 = 2{,}24 \vee x_2 = -2{,}24$
j) $x_1 = 1{,}15 \vee x_2 = -1{,}15$
k) $x = Ø$
l) $x_1 = 8{,}94 \vee x_2 = -8{,}94$

Lösung 4.101
a) $f(x) = -0{,}2(x - 3{,}75)^2 + \frac{81}{16}$
5,06 m
b) $f(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}5x + 2{,}25$

Lösung 4.102
Breite: 4,5 cm ; Länge: 10,5 cm

Lösung 4.103
a) 7 m
b) Die Höhe von 1,52 m wird über 4,74 m überschritten ($x_1 = 0{,}63$ bis $x_2 = 5{,}37$), sodass ein Überspringen des Betonquaders möglich erscheint.

Lösung 4.104
a) $f(x) = -0{,}00528(x - 55)^2 + 15{,}98$
b) h1, h8: 6,32 m ; h2, h7: 11,05 m
h3, h6: 14,21 m ; h4, h5: 15,78 m

Lösung 4.105
a) $h_a = 2{,}68$ m ; $h_b = 3{,}90$ m ; $h_c = 1{,}88$ m
b) 6,24 m

Lösung 4.106
nein => 335,42 m

Lösung 4.107
$f(x) = 0{,}004(x - 10)^2$

Lösung 4.108
16,32 m => nein

Lösung 4.109
a) Es wird von einer größeren Maximalhöhe ausgegangen, weil sich der Funktionswert auf den Körperschwerpunkt (in Höhe des Bauchnabels) bezieht.
b) $f(x) = -\frac{36}{49}x^2 + 36$
c) 3,69 m

Lösung 4.110
a) $f(x) = 2(x + 0{,}75)^2 - 6{,}125$
$S(-0{,}75|-6{,}125)$
$x_1 = 1 \vee x_2 = -2{,}5$
b) $f(x) = 2x^2 - 10x + 18$
$S(2{,}5|5{,}5)$
$x = Ø$
c) $f(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 2{,}4$
$f(x) = 0{,}2(x - 0{,}5)^2 - 2{,}45$
d) $f(x) = -0{,}3(x + 5)^2 + 1{,}5$
$S(-5|1{,}5)$
$x_1 = -2{,}76 \vee x_2 = -7{,}24$
e) $f(x) = 3x^2 - 1{,}8x + 0{,}33$
$S(0{,}3|0{,}06)$
$x = Ø$
f) $f(x) = -1{,}5x^2 + 3x$
$f(x) = -1{,}5(x - 1)^2 + 1{,}5$
g) $f(x) = -0{,}25(x - 6)^2 + 3$
$S(6|3)$
$x_1 = 9{,}46 \vee x_2 = 2{,}54$
h) $f(x) = 4x^2 - 36x + 100$
$S(4{,}5|19)$
$x = Ø$
i) $f(x) = -0{,}5x^2 + 8$
Normalform = Scheitelpunktform
j) $f(x) = 0{,}25(x + 10)^2 - 11$
$S(-10|-11)$
$x_1 = -3{,}367 \vee x_2 = -16{,}633$
k) $f(x) = -0{,}4x^2 + 3x - 4$
$S(3{,}75|1{,}625)$
$x_1 = 5{,}77 \vee x_2 = 1{,}73$
l) $f(x) = -1{,}5x^2 - 3x + 12$
$f(x) = -1{,}5(x + 1)^2 + 13{,}5$
m) $f(x) = \frac{1}{3}(x - 4{,}5)^2 + 1{,}25$
$S(4{,}5|1{,}25)$
$x = Ø$
n) $f(x) = -2x^2 + 10x - 18$
$S(2{,}5|-5{,}5)$
$x = Ø$
o) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
$f(x) = (x - 1)^2 - 4$

Lösung 4.111
Mit x = 13,48 trifft der Ball nicht mehr im Spielfeld auf.

Lösung 4.112
a) $f_1(x) = 0{,}5(x + 4)^2 - 7$
$f_2(x) = -0{,}5x^2 - x + 15$
b) f_1: $x_1 = -0{,}258 \vee x_2 = -7{,}74$
f_2: $x_1 = 4{,}57 \vee x_2 = -6{,}57$
c) siehe Lösungs-PDF
d) $S_1(-7|-2{,}5)$; $S_2(2|11)$
e) $g(x) = 1{,}5x + 8$
f) 56,31°

Lösung 4.113
a) Höhe: 5,48 m ; Weite: 20,7 m
Die Siegerweite ist um mehr als einen Meter weiter als der Trainingsstoß.
b) $f(x) = -0{,}0595x^2 + x + 1{,}92$

Lösung 4.114
a) $f(x) = 0{,}002(x + 150)^2 - 45$
$f(x) = 0{,}002x^2 + 0{,}6x$
b) $S(-\frac{500}{3}|-\frac{125}{3})$

Lösung 4.115
a) B = 8,94 m
b) $h_1 = 1{,}28$ m

Lösung 4.116
a) $f(x) = -\frac{1}{72}x^2 + 2$
$g(x) = -\frac{1}{144}x^2 + 1$
b) 0,75 m

Lösung 4.117
a) $E(d) = \frac{7}{600}d^2 + \frac{23}{120}d + 40$
b) 45,5 kWh/24h
c) 3,13 %
d) mit 0,1875 Euro pro kWh:
0 mm: 2737,50 Euro
5 mm: 2823,05 Euro

Lösung 4.118
a) $f(x) = -0{,}0294x^2 + 36$
b) 1675 Euro

Lösung 4.119
a) $f(x) = \frac{2}{7}x^2 + x + \frac{20}{7}$
b) siehe Lösungs-PDF
c) 11,21 mm
d) 5 mm: 13,14 Euro
9 mm: 30,66 Euro

Lösung 4.120

a) 0,618 b) 1,618

Lösung 4.121

a) 1,88 m b) 3 m c) 4,18 m

Lösung 4.122

a) 0,91 m
b) Der Ball fliegt 40 cm über der Mauer.
c) 7,53 m
d) 4,63 m

Lösung 4.123

a) $f(x) = x^2 - x + 3$
b) $f(x) = 0{,}2x^2 - 2{,}8x - 0{,}4$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$
d) $f(x) = -1{,}5x^2 + 4{,}5x + 5$
e) $f(x) = 2x^2 + 1$
f) $f(x) = -\frac{1}{16}x^2 - 0{,}5x - \frac{15}{16}$
g) $f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + 5$
h) $f(x) = -0{,}8x^2 - 1{,}4x + 5$
i) $f(x) = \frac{9}{14}x^2 - \frac{3}{14}x - \frac{17}{7}$
j) $f(x) = -1{,}25x^2 + 2x + 4$

Lösung 4.124

a) Mit x = 7,39 trifft der Ball im Spielfeld auf.
b) 12,22 m => landet nicht im Feld
c) 2,21 m

Lösung 4.125

a) $x_1 = 3 \vee x_2 = -1$
=> Sekante
S(0|2) ; keine Nullstellen
b) $x_1 = 4 \vee x_2 = -0{,}5$
=> Sekante
$S(2|-5)$; $x_1 = 3{,}732 \vee x_2 = 0{,}268$
c) $x_1 = -0{,}825 \vee x_2 = -2{,}425$
=> Sekante
$S(-1{,}5|2{,}25)$; $x_1 = 0 \vee x_2 = -3$
d) $x_1 = 3{,}35 \vee x_2 = -0{,}597$
=> Sekante
S(1|4) ; $x_1 = 3 \vee x_2 = -1$
e) $x_1 = -0{,}268 \vee x_2 = -3{,}732$
=> Sekante
$S(-0{,}5|4{,}25)$; $x_1 = 1{,}56 \vee x_2 = -2{,}56$
f) Schnittp.: $x_1 = -0{,}902 \vee x_2 = 4{,}431$
=> Sekante
$S(-3|9)$; $x_1 = 0 \vee x_2 = -6$

Lösung 4.126

a) $f_1: x = 0$; $f_2: x = \pm 2{,}74$
$f_3: x = -3$; $f_4: x = \frac{4}{3}$
b) $f_1 = f_2: x_1 = 2{,}023 \vee x_2 = -2{,}023$
$f_1 = f_3: x_1 = 19{,}39 \vee x_2 = -1{,}39$
$f_1 = f_4: x_1 = 0{,}94 \vee x_2 = -3{,}19$
$f_2 = f_3: x_1 = 0{,}423 \vee x_2 = -2{,}73$
$f_2 = f_4: x_1 = 3{,}36 \vee x_2 = -1{,}49$
$f_3 = f_4: x_1 = -0{,}595 \vee x_2 = -8{,}405$

Lösung 4.127

a) keine Schnittpunkte
f_1: S(3|1) ; $x_1 = 4 \vee x_2 = 2$
f_2: S(1|–1) ; $x_1 = 1{,}71 \vee x_2 = 0{,}29$
b) keine Schnittpunkte
f_1: S(2|–2) ; $x_1 = 0 \vee x_2 = 4$
f_2: S(1,5|–0,25) ; $x_1 = 2 \vee x_2 = 1$
c) $x_1 = 3{,}35 \vee x_2 = 0{,}94$
f_1: S(2,5|–0,25) ; $x_1 = 3 \vee x_2 = 2$
f_2: S(2|5) ; $x_1 = 3{,}41 \vee x_2 = 0{,}59$
d) keine Schnittpunkte
f_1: S(–0,25|2,875) ; x = Ø
f_2: S(2|3) ; $x_1 = 3{,}73 \vee x_2 = 0{,}27$
e) x = –1
f_1: S(0|0) ; x = 0
f_2: S(–2|0) ; x = –2
f) keine Schnittpunkte
f_1: S(0|0) ; x = 0
f_2: S(0|–4) ; $x_1 = 2 \vee x_2 = -2$

Lösung 4.128

a) f(x): $x_1 = -1 \vee x_2 = -3$
g(x) x = Ø
b) Bei f(x) muss der Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse liegen, da sie zwei Nullstellen besitzt und sie nach oben geöffnet ist.
c) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$
$g(x) = (x + 2)^2 + 1$
d) Die Funktionen unterscheiden sich lediglich durch den y-Achsenbabschnitt und sie liegen somit ineinander.

Lösung 4.129

a) $S_1(6|-5)$; $S_2(-2|11)$
b) $f(x) = -2x + 7$
c) g(x): S(6|–5) ; h(x): S(4|–7)

Lösung 4.130

$f(x) = -x^2 + 9x$

Lösung 4.131

a) Mit einer Sprunghöhe von 2,13 m überspringt sie die Latte.
b) 1,5 m
c) 3,3 m

Lösung 4.132

$f(x) = x^2 + 4x + 2.5$
$g(x) = 0{,}25x^2 - 2{,}5x + 2{,}25$
$h(x) = -0{,}5x^2 + 4{,}5$
$p(x) = -2x^2 + 18x - 35{,}5$
f=h: $S_1(0{,}43|4{,}41)$; $S_2(-3{,}1|-0{,}31)$
f=g: $S_1(-0{,}04|2{,}34)$; $S_2(-8{,}63|42{,}46)$
h=g: $S_1(4{,}07|-3{,}78)$; $S_2(-0{,}74|4{,}23)$
h=p: $S_1(9{,}06|-36{,}54)$; $S_2(2{,}94|0{,}18)$
g=p: $S_1(6{,}55|-3{,}41)$; $S_2(2{,}56|-2{,}53)$

Lösung 4.133

a) (28 – 0,2s): Eintrittspreis, reduziert um 0,20 € pro Senkung.
(480 + 12s): Besucherzahl, erhöht um 12 Personen pro Senkung.
Das Produkt aus beidem ergibt die Einnahmen.
b) 18 Euro

Lösung 4.134

a) $E(x) = (48 - x)(7600 + 240x)$
$= -240x^2 + 3920x + 364800$
b) 39,83 Euro

Lösung 4.135

a) $E(x) = (350 - 40x)(160 + 32x)$
$= -1280x^2 + 4800x + 56000$
b) 275 Euro

Lösung 4.136

a) 40 ME
b) $D_{ök} = [0;40]$
c) $E(x) = -0{,}2x^2 + 8x$
d) $G(x) = -0{,}2x^2 + 7x - 12$
e) siehe Lösungs-PDF
f) $x_S = 1{,}81$; $x_G = 33{,}19$
g) 49,25 GE
h) $x \in [1{,}36;7{,}64]$
i) 4,5 GE

Lösung 4.137

a) 50 ME
b) $D_{ök} = [0;50]$
c) $E(x) = -0{,}1x^2 + 5x$
d) $G(x) = -0{,}1x^2 + 4{,}1x - 8$
e) siehe Lösungs-PDF
f) $x_S = 2{,}05$; $x_G = 38{,}95$
g) 34,03 GE
h) $x \in [1{,}11;4{,}8]$
i) 2,95 GE

Lösung 4.138

a) $K(x) = 2{,}5x + 350$
b) $D_{ök} = [0;100]$
c) $x_S = 20$; $x_G = 70$
d) 45 ME
e) 13,75 GE

Lösung 4.139

a) $p(x) = -0{,}01x + 1$
b) $x_S = 10$; $x_G = 60$
c) 35 ME, 6,25 GE
d) C(35|0,65)

Lösung 4.140

a) $K(x) = 0{,}05x^2 + 15x + 7500$
b) $K_v(x) = 0{,}05x^2 + 15x$
c) $K_f = 7500$
d) $E(x) = -0{,}1x^2 + 125x$
e) $G(x) = -0{,}15x^2 + 110x - 7500$
f) 12.666,67 GE
g) $x_S = 76{,}07$
h) $x_G = 657{,}26$
i) $x_C = 366{,}67$
j) 88,33 GE
k) 125 GE
l) 1250 ME

Der UVP liegt mit 120 Euro über dem gewinnmaximalen Preis.

Lösung 4.141

a) $K(x) = 1000x + 100000$
b) $K_v(x) = 1000x$
c) $K_f = 100000$
d) $p(x) = -4{,}2x + 3000$
e) $G(x) = -4{,}2x^2 + 2000x - 100000$
f) 138.095 GE
g) $x_S = 56{,}77$
h) $x_G = 419{,}42$
i) $x_C = 238{,}1$
j) 1999,98 GE
k) 3000 GE
l) 714,29 ME

Der Vollautomat liegt 400 Euro unter dem gewinnmaximalen Preis.

Lösung 4.142

a) $K(x) = 3{,}2x + 220$
b) $x_S = 18{,}23$; $x_G = 80{,}43$
c) 49,33 ME ; 145,07 GE
d) Ein Schraubendreher-Set für 10,6 GE (Euro) ist sehr günstig.

Lösung 4.143

a) $p(x) = -0{,}01x + 0{,}5$
b) $x_S = 12{,}19$; $x_G = 32{,}81$
c) Gewinn: 1,06 GE ; Preis: 0,28 GE
d) 0,5 GE ; 50 ME

Lösung 4.144

a) $K(x) = 4{,}1x + 180$
b) $x_S = 11{,}55$; $x_G = 77{,}95$
c) $x_C = 44{,}75$; 13,05 GE
d) $E(x) = -0{,}2x^2 + 22x$
siehe Lösungs-PDF
e) $D_{ök} = [0;110]$

Lösung 4.145

a) $x_S = 1{,}07$
b) 12,25 ME

Lösung 4.146

a) $E(x) = -0{,}05x^2 + 12x$
$G(x) = -0{,}05x^2 + 11{,}2x - 30$
b) $x_S = 2{,}71$; $x_G = 221{,}29$
c) 12 %
d) Der Gewinn würde zwar geringer ausfallen, dafür könnte die Bestellmenge steigen.

Lösung 4.147

a) $E(x) = -0{,}1x^2 + 40x$
$K(x) = 5x + 500$
$G(x) = -0{,}1x^2 + 35x - 500$
b) $x_S = 14{,}92$; $x_G = 335{,}08$
c) $x_C = 175$; 22,5 GE
d) Da bereits ab etwa 15 Stück Gewinn erzielt wird, lohnt sich die Produktion auch bei unsicherer Nachfrage.

9.5 LÖSUNGEN – 5

Lösung 5.1

a) siehe Lösungs-PDF
b) oben, oben
unten, unten
unten, oben
oben, unten
c) y-Achsenabschnitt

Lösung 5.2

a) unten, unten
b) unten, oben
c) unten, unten
d) unten, oben
e) oben, unten
f) oben, oben
g) unten, unten
h) unten, oben
i) oben, oben

Lösung 5.3

1/A, 2/D, 3/C, 4/B

Lösung 5.4

a) z. B. $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 3x$
b) z. B. $f(x) = -0{,}5x^6 + 3x^2 + 4$
c) z. B. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x$
d) z. B. $f(x) = -1{,}25x^5 - 8x^2 + 5$

Lösung 5.5

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = -x^2$
c) $f(x) = x$
d) $f(x) = -x$

Lösung 5.6

Falsch. Bei Grad 6 kann der Graph nur entweder von unten nach unten oder von oben nach oben verlaufen.

Lösung 5.7

a) Grad 4 ; achsensymmetrisch
b) Grad 5 ; punktsymmetrisch
c) Grad 3 ; nicht symmetrisch

Lösung 5.8

1/B, 2/D, 3/C, 4/E, 5/A, 6/F

Lösung 5.9

a) achsensymmetrisch
b) punktsymmetrisch
c) nicht symmetrisch
d) achsensymmetrisch
e) punktsymmetrisch
f) achsensymmetrisch

Lösung 5.10

a) Grad 4
b) achsensymmetrisch
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.11

a) $f(x) = (x - 4)(x + 2) = x^2 - 2x - 8$
b) $f(x) = (x - 2)(x + 7) = x^2 + 5x - 14$
c) $f(x) = (x + 1)(x - 6) = x^2 - 5x - 6$
d) $f(x) = (x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$
e) $f(x) = (x + 4)(x - 1) = x^2 + 3x - 4$
f) $f(x) = x(x + 8) = x^2 + 8x$

Lösung 5.12

a) $f(x) = (x - 5)(x + 2)$
b) $f(x) = (x - 7)(x - 1)$
c) $f(x) = (x - 3)(x + 3)$
d) $f(x) = (x - 2{,}5)(x + 1{,}2)$
e) $f(x) = (x - 8{,}4)(x - 5{,}6)$
f) $f(x) = 2(x - 4)(x - 1{,}5)$

Lösung 5.13
a) $f(x) = x^2 + x - 2$
b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
c) $f(x) = 0{,}25x^2 - 0{,}25x - 3$

Lösung 5.14
a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$
c) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 54$
d) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$
e) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 21x$
f) $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$
g) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 21x + 18$
h) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$
i) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x$
j) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x + 60$

Lösung 5.15
a) $x^2 - x - 2$
b) $-x^2 - x + 30$
c) $3x^2 - 6x - 9$
d) $-2x^2 + 12x + 14$
e) $5x^2 - 15x + 10$
f) $2x^3 + 4x^2 - 10x - 12$

Lösung 5.16
a) $2x^2 - 14x + 12$
b) $-3x^2 - 21x - 30$

Lösung 5.17
a) $x_1 = 7, x_2 = -1, (x_3 = 3)$
b) $x_1 = 2, x_2 = -6, (x_3 = -3)$

Lösung 5.18
a) $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = -5$
b) $x_1 = -3, x_2 = 4, x_3 = -7$
c) $x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = -4$
d) $x_1 = -2, x_2 = 5, x_3 = -6$

Lösung 5.19
a) $x^2 + x - 8$
b) $x^3 - x^2 - x - 14$
c) $x^4 - x^3 - 14x^2 + 24$
d) $x^3 - 2x^2 - x + 2$
e) $3x^3 - 21x^2 - 21x - 3$
f) $x^3 - 2x^2 - 3x$

Lösung 5.20
a) $x_1 = -4, x_2 = -10, x_3 = 1, (x_4 = 2)$
b) $x_{1/2} = 2, (x_3 = -1)$
c) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1, (x_4 = -2)$
d) $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 1, (x_4 = 3)$
e) $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = -1, (x_4 = -3)$
f) $x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = -\frac{9}{5}, (x_3 = 4)$

Lösung 5.21
a) $h(-1) = 0$
b) $t_1 = 5{,}5, t_2 = -5$
c) siehe Lösungs-PDF
d) $t = 5{,}5$

Lösung 5.22
a) $b(-3) = 0$
b) $x_{1/2} = 5, x_3 = -3$
c) siehe Lösungs-PDF
d) 80 m
e) ja

Lösung 5.23
350 m

Lösung 5.24
$x = 95{,}68$

Lösung 5.25
siehe 5.15, 5.16 und 5.19

Lösung 5.26
$x = 5$

Lösung 5.27
a) $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1, x_4 = -1$
b) $x_1 = 4, x_2 = -4$
c) Ø
d) $x_1 = 6, x_2 = -6, x_3 = 2, x_4 = -2$
e) Ø
f) $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 1, x_4 = -1$
g) $x_1 = 6, x_2 = -6$
h) $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = -2$
i) Ø

Lösung 5.28
a) $f(x) = 2(x - 4)(x + 4)(x - 2)(x + 2)$
b) $h(x) = 0{,}25(x - 5)(x + 5)(x - 0{,}5)(x + 0{,}5)$
c) $g(x) = 0{,}5(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$
d) $j(x) = \frac{1}{8}(x - 6)(x + 6)(x - 2)(x + 2)$
e) $k(x) = -0{,}5(x - 7)(x + 7)(x - 3)(x + 3)$
f) $m(x) = (x - 8)(x + 8)(x - 2{,}5)(x + 2{,}5)$
g) $n(x) = 0{,}25(x - 9)(x + 9)(x - 4)(x + 4)$
h) $o(x) = (x^3 - 6)(x^3 - 1)$

Lösung 5.29
300 m

Lösung 5.30
8,34 m

Lösung 5.31
a) $x = 2, x = 3$
b) siehe Lösungs-PDF
c) 0 bis 2, 3 bis 4

Lösung 5.32
a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1{,}5$
b) $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -1$
c) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -1$
d) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1{,}5$
e) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$
f) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$
g) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 3$
h) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2{,}5$
i) $x_1 = 0, x_2 = 8, x_3 = -1$

Lösung 5.33
a) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3, x_4 = 1, x_5 = -1$
b) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4, x_4 = -1$
c) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -4, x_4 = 1{,}5,$
$x_5 = -1{,}5$
d) $x_{1/2} = 0, x_3 = 1, x_4 = 5, x_5 = -3$
e) $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -5, x_4 = 2, x_5 = -2$
f) $x_{1/2} = 0, x_3 = 2, x_4 = 5{,}5, x_5 = -1{,}8$

Lösung 5.34
3 GE

Lösung 5.35
0, 3 und 5

Lösung 5.36
a) Substitution
b) Polynomdivision/Horner-Schema
c) Faktorisieren
d) pq-Formel

Lösung 5.37
a) $f(3) = 0$
b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$
c) $x_2 = -2, x_3 = 2, x_4 = -1$

Lösung 5.38
a) $g(-2) = 0$
b) $2x^2 - 2x - 1{,}5$
c) $x_2 = 1{,}5, x_3 = -0{,}5$

Lösung 5.39
a) $z_1 = 6, z_2 = 1$
b) $x_1 = 1{,}817, x_2 = 1$
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.40

a) $f(x) = 3x^2(x - 5)(x + 1)$
b) $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -1$
c) $x = 0$ ist doppelte Nullstelle

Lösung 5.41

a) $x_1 = 6, x_2 = -2$
b) $x_1 = 2$
c) $x_1 = -1, x_2 = 5, x_3 = 2$
d) $x_1 = -4, x_2 = 1$
e) $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = -2$
f) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -5$
g) $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 4, x_4 = 1$
h) $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 4, x_5 = 2$
i) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3, x_4 = 2, x_5 = -2$
j) $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = -1, x_4 = 1, x_5 = 3, x_6 = 2$

Lösung 5.42

a) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = 0{,}5, x_5 = -0{,}5$
b) $x_1 = 3, x_2 = -2{,}25$
c) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0{,}5$
d) $x_1 = -2, x_2 = 1{,}5$
e) $x_1 = 0, x_2 = 2{,}5, x_3 = -3$
f) $x_1 = 1{,}5, x_2 = -4$
g) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1{,}5$
h) $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 1{,}5, x_4 = -1{,}5$
i) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3, x_4 = 1{,}5, x_5 = -1{,}5$
j) $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 2{,}5$

Lösung 5.43

a) $x_1 = 1{,}4, x_2 = -3$
b) $x_1 = -2, x_2 = 5, x_3 = {}^{4}-{}_{3}$
c) $x_1 = 0, x_2 = -0{,}5, x_3 = -1$
d) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1{,}5$
e) $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -5, x_4 = 2{,}5, x_5 = -2{,}5$
f) $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 1{,}4$
g) $x_1 = 3{,}5, x_2 = -3{,}5, x_3 = 1{,}5, x_4 = -1{,}5$
h) $x_1 = 0, x_2 = 1{,}8, x_3 = -2{,}4$
i) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -4, x_4 = 0{,}1, x_5 = -0{,}1$
j) $x_1 = -2, x_2 = 1{,}3, x_3 = -6{,}4$

Lösung 5.44

A: $x_1 = 4, x_2 = 2$
B: $x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 2$
C: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1{,}5$
D: $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 1, x_4 = -1$

Lösung 5.45

a) $m_{[0;1]} = 1$; $m_{[-1,5;2]} = 0{,}5$; $m_{[-1;1]} = 0$
b) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.46

$m_{[-2;0]} = -1$; $m_{[-2;1]} = 0$; $m_{[-3;2]} = 4$

Lösung 5.47

a) $m_{[1;5]} = 3$ b) $m_{[5;9]} = -1$
c) Im Intervall [1;5] durchschnittlich pos. Steigung, im Intervall [5;9] durchschnittlich neg. Steigung.
d) [5; 7]

Lösung 5.48

a) siehe Lösungs-PDF
b) Wasserstoffmenge nimmt stetig zu, flacht aber gegen Ende ab.
c) $m_{[2;4]} = 6{,}5$; $m_{[4;8]} = 6{,}25$; $m_{[8;12]} = 4{,}25$
d) z. B. Die Wasserstoffmenge steigt zwischen der zweiten und vierten Minute um durchschnittlich 6,5 ml pro min.
e) Ja

Lösung 5.49

a) $m_{[0;1]} = -19$; $m_{[1;2]} = -26$; $m_{[2;3]} = -17$; Einheit: $\frac{\%}{h}$
b) Akku-Kapazität nimmt ab
c) Im Intervall [1;2], z. B. Steigung, Gegenwind, höhere Unterstützungsstufe
d) 4,06 h
e) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.50

a) $m_{[1960;2005]} = 0{,}207$, also +207.000 Einwohner pro Jahr; $m_{[2000;2010]} = -0{,}05$, also – 50.000 Einwohner pro Jahr; $m_{[2005;2025]} = 0{,}055$; also +55.000 Einwohner pro Jahr
b) "Deutschland legt kräftig zu!" "Deutschland schrumpft" "Deutschland tritt auf der Stelle"
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.51

a) $m_{[1;9]} = 6{,}875$; $m_{[1;3]} = 4$; $m_{[4;6]} = 11$; $m_{[7;9]} = 3{,}5$
b) Pflanze wächst zunächst langsam, dann schnell und später wieder langsamer
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.52

a) 8,8 kWh pro Stunde
b) 42,4 kWh pro Stunde
c) Am Nachmittag schneller
d) siehe Lösungs-PDF
e) $m_{[8;10]} = 55{,}6$

Lösung 5.53

a) 600 Pakete pro Stunde; 1050 Pakete pro Stunde; 1013,33 Pakete pro Stunde
b) z. B. Zwischen 08:00 und 10:00 Uhr wurden rund 600 Pakete pro Stunde verarbeitet.
c) zwischen 10:00 und 13:00 Uhr
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.54

a) $B(2) \approx 600$; $B(6) \approx 2250$; $B(10) \approx 3700$
b) $m_{[2;6]} = 412{,}5$; $m_{[6;10]} = 362{,}5$
c) Zwischen 2 und 6 Stunden nach Öffnung kommen mehr Besucher in den Park als zwischen 6 und 10 Stunden nach Öffnung.
d) Intervall [4; 6]

Lösung 5.55

a) 0,5 km pro Minute
b) 1 km pro Minute
c) Zwischen Minute 10 und 25 fährt er schneller als am Anfang
d) Intervall [10; 15]

Lösung 5.56

a) 1,6 kWh pro Minute
b) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.57

a) $h_2 = 1$; $h_3 = 0{,}5$; $h_4 = 0{,}1$; $h_5 = 0{,}01$
b) $m_2 = 1{,}5$; $m_3 = 1{,}25$; $m_4 = 1{,}05$; $m_5 = 1{,}005$
c) 1

Lösung 5.58

a) $m_1 = 4$; $m_2 = 3$; $m_3 = 2{,}5$; $m_4 = 2{,}1$; $m_5 = 2{,}01$
b) 2

Lösung 5.59

54

Lösung 5.60
$\alpha_1 \approx 82°$; $\alpha_2 \approx 121°$; $\alpha_3 \approx 153°$; $\alpha_4 \approx 75°$

Lösung 5.61
$m_t = -4$

Lösung 5.62
a) $f'(x) = 2x$
$f'(1) = 2$; $f'(-2) = -4$; $f'(3) = 6$
b) $f'(x) = -2x$
$f'(1) = -2$; $f'(-2) = 4$; $f'(3) = -6$
c) $f'(x) = 2x + 2$
$f'(1) = 4$; $f'(-2) = -2$; $f'(3) = 8$
d) $f'(x) = 2x - 3$
$f'(1) = -1$; $f'(-2) = -7$; $f'(3) = 3$
e) $f'(x) = 3x^2$
$f'(1) = 3$; $f'(-2) = 12$; $f'(3) = 27$
f) $f'(x) = 3x^2 + 1$
$f'(1) = 4$; $f'(-2) = 13$; $f'(3) = 28$

Lösung 5.63
a) $f(x) = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
b) $f(x) = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$
c) $f(x) = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$

Lösung 5.64
a) $f'(x) = 4x^3$; $x_1 = 0$
b) $f'(x) = 3x^2 + 4x$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$
c) $f'(x) = 8x + 3$; $x_1 = 0$, $x_2 = -0{,}75$
d) $f'(x) = 2x - 2$; keine Nullstellen
e) $f'(x) = 3x^2 - 4$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$
f) $f'(x) = 2x$; keine Nullstellen

Lösung 5.65
a) $f'(3) = 13{,}5$ b) Fkt. steigt

Lösung 5.66
a) $f'(x) = 3x^2 - 2$
b) $f'(-1) = 1$; $f'(2) = 10$

Lösung 5.67
a) $m_1 = 3$; $m_2 = 2{,}5$; $m_3 = 2{,}1$; $m_4 = 2{,}01$
b) 2

Lösung 5.68
a) $v'(1) = -6$
b) Eine Sekunde nach Beginn des Bremsvorgangs nimmt die Geschw. um 6 $\frac{m/s}{s}$.

Lösung 5.69
a) $f'(2) = 4$
b) $g'(2) = 2$
c) f bei x = 2 steiler als g

Lösung 5.70
a) $f'(x) = 2x - 2$
b) $f'(-1) = -4$; $f'(0) = -2$; $f'(2) = 2$
c) Bei x = 2 am steilsten

Lösung 5.71
a) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
b) $a = 1$; $b = -3a$; $c = 4$
c) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 4x$

Lösung 5.72
a) $f'(x) = 8x^7$
b) $f'(x) = 6x^5 - 12x^2$
c) $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 12x$
d) $f'(x) = 4x^3 + 7{,}5x^2 + 8x$
e) $f'(x) = 4{,}5x^2 + 12x - 2$
f) $f'(x) = 16x^3 + 6{,}4x - 7$

Lösung 5.73
a) siehe Lösungs-PDF
b) siehe Lösungs-PDF
c) Die Extrempunkte von f(x) liegen an den Stellen, an denen der Graph von f'(x) die x-Achse schneidet.

Lösung 5.74
a) $L'(t) = 0{,}0006t^2 - 0{,}0144t + 0{,}0864$
b) $L'(10) = 0{,}0024$; $L'(25) = 0{,}1014$; $L'(40) = 0{,}4704$
c) Der Laktatwert steigt bei t = 40 am stärksten. Hier ist die Belastung besonders hoch.
d) t = 12

Lösung 5.75
Wall 2,27 m hoch; Graben 1,8 m tief

Lösung 5.76
a) $x_1 = 1$; $x_2 = -2$
b) $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$
c) $x_1 = -2$; $x_2 = 4$; $x_3 = 3$
d) $x_1 = 2$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$
e) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -2$
f) $x_1 = 2$; $x_2 = -1$

Lösung 5.77
a) $x_1 = 3$; $x_2 = -1$
b) $x_1 = 2$; $x_2 = -4$
c) $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = -2$
d) $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; $x_3 = -1$
e) $x_1 = -1$; $x_2 = 2$
f) $x_1 = 0$; $x_2 = 5$
g) $x_1 = 2$; $x_2 = 6$; $x_3 = -2$
h) $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x_3 = -4$

Lösung 5.78
a) $EP_1(0|-1)$; $EP_2(4|-\frac{89}{9})$
b) $EP_1(2|-\frac{40}{27})$; $EP_2(-1|\frac{14}{27})$
c) $EP_1(1|\frac{89}{33})$; $EP_2(-3|\frac{51}{11})$
d) $EP_1(5|-\frac{41}{8})$; $EP_2(1|-\frac{9}{8})$
e) $EP_1(0|1)$; $EP_2(3|-1{,}25)$; $EP_3(-2|\frac{5}{21})$
f) $EP_1(2{,}56|28{,}24)$;
$EP_2(-2{,}56|-22{,}24)$;
$EP_3(1{,}56|33{,}837)$;
$EP_4(-1{,}56|-27{,}84)$

Lösung 5.79
a) f: $x_1 = 1{,}9$; $x_2 = 0{,}3$
g: $x_1 = 1$
b) f: 3. Grad mit positivem Leitkoeffizienten (von unten nach oben) -> erste Extremstelle = Hochpunkt, zweite = Tiefpunkt.
g: 3. Grad mit positivem Leitkoeffizienten, jedoch nur eine Extremstelle -> bei x = 1 kein Hoch-/Tiefpunkt, sondern Sattelpunkt.
c) siehe Lösungs-PDF
d) siehe b) bzw. Lösungs-PDF
e) siehe Lösungs-PDF
f) siehe Lösungs-PDF
g) $f''(0{,}3) = -1{,}6$; $f''(1{,}9) = 1{,}6$

Lösung 5.80
a) TP(5|–18)
b) TP(1,64|–3,63), HP(–1,64|3,63), HP(0,54|1,42), TP(–0,54|–1,42)
c) HP(2|3)
d) HP(0|5), TP(2,83|–59), TP(–2,83|–59)
e) TP(1|–6), HP(–2|21)
f) HP(0|9), TP(2|–39), TP(–2|–39)
g) HP(6|10), TP(2|–22)
h) TP(2,38|–74,06), HP(–2,38|74,06), HP(0,56|6,68), TP(–0,56|–6,68)
i) TP(4|–26)
j) TP(3|–2), HP(1|2)

Lösung 5.81
a) 14:00 Uhr
b) 7 Anrufe
c) 54,81 %

Lösung 5.82

a) morgens 12,48 °C, abends 19,23 °C
b) 16:00 Uhr mit 26,48 °C => Sommertag

Lösung 5.83

a) 2.550 Besucher
b) 16:00 Uhr => 11.300 Besucher

Lösung 5.84

a) TP(4|0), HP($\frac{4}{3}|\frac{256}{135}$)
b) HP: Nach 1,33 h ist die Produktionsrate mit 190 Brötchen/h max. TP: Nach 4 h ist die Produktionsrate 0 – es werden keine Brötchen produziert.
c) $t_1 = 0$, $t_2 = 4$
d) 180, 160, 60

Lösung 5.85

a) TP(1|66,88), TP(5|66,88), HP(3|68,88)
b) ja
c) wird eingehalten

Lösung 5.86

a) HP(3,93|2,51), TP(1,74|–0,1)
b) ja => k(0) = 7,5
c) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1,5$ => keine Klicks mehr
d) von 0 bis 1 und 2,72 bis 4,78

Lösung 5.87

a) WP(1|1)
b) WP(1|7)
c) WP($-\frac{1}{3}|\frac{83}{9}$)
d) WP(–2|–4)

Lösung 5.88

a) $WP_1(1|0)$
b) $WP_1(0|0)$, $WP_2(2|-16)$
c) $WP_1(1|68)$, $WP_2(3|54)$, $WP_3(-1|82)$
d) $WP_1(0|0)$, $WP_2(-1|-53)$, $WP_3(4|512)$, $WP_4(2|448)$
e) $WP_1(1|1)$
f) $WP_1(0{,}82|-4{,}52)$, $WP_2(-1{,}82|-30{,}98)$
g) $WP_1(-1|20)$, $WP_2(3{,}23|-86{,}77)$, $WP_3(0{,}78|14{,}26)$
h) $WP_1(1{,}59|-31{,}45)$, $WP_2(-0{,}25|-0{,}01)$
i) $WP_1(2{,}16|-117{,}77)$, $WP_2(-2{,}16|-177{,}77)$, $WP_3(0{,}36|0{,}93)$, $WP_4(-0{,}36|0{,}93)$
j) keine Wendepunkte

Lösung 5.89

a) $WP_1(1|-2)$
b) $WP_1(2|-3{,}67)$, $WP_2(-2|-11{,}67)$
c) $WP_1(1|1{,}38)$, $WP_2(3|-2{,}85)$, $WP_3(2|-0{,}73)$
d) $WP_1(0|0)$, $WP_2(4|-84{,}8)$, $WP_3(-2|10{,}4)$
e) $WP_1(3|0{,}3)$, $WP_2(-3|-5{,}7)$, $WP_3(1|4{,}7)$, $WP_4(-1|2{,}7)$
f) $WP_1(5|255{,}42)$, $WP_2(-5|255{,}42)$, $WP_3(2|158{,}47)$, $WP_4(-2|158{,}47)$
g) $WP_1(-3|27{,}33)$, $WP_2(-1|-9{,}42)$, $WP_3(1|-1{,}38)$, $WP_4(3|-12{,}53)$, $WP_5(2|-6{,}55)$
h) keine Wendepunkte

Lösung 5.90

a) x = 2
b) WP(2|0)
c) t(x) = 3x – 6
d) ja

Lösung 5.91

a) siehe Lösungs-PDF
b) $WP_f(0|0)$, $WP_h(0|4)$
c) siehe Lösungs-PDF
d) Verschiebung um vier Einheiten nach oben, WP bleibt gleich.

Lösung 5.92

a) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$
b) TP(3|–27), $WP_1(0|0)$, $WP_2(2|-16)$
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.93

a) $WP_1(1{,}2|3{,}23)$, $WP_2(6|0{,}79)$
b) 32,25 m, 7,94 m

Lösung 5.94

a) 7,33 Stunden
b) 13,67 Stunden

Lösung 5.95

a) 28,22 km/h
b) Nach 22,67 s mit 57,68 km/h
c) 53,33 s
d) 84 Sekunden
e) z. B. Ampel, Abbiegevorgang, dichter Verkehr, Hindernis auf der Fahrbahn

Lösung 5.96

a) Bei 0,2 t/ha mit 8,16 t
b) 0,26 t/ha
c) 12,53
d) WP: Hier ist der Ertragszuwachs am größten – wenig mehr Dünger bringt noch deutlich mehr Ertrag. Davor wächst der Zuwachs, danach nimmt er ab. HP: Der Zuwachs ist nahezu null – mehr Dünger bringt kaum noch zusätzlichen Ertrag.

Lösung 5.97

a) WP(5|140)
b) Wendepunkt (12:00 Uhr): Bis hierhin wird der Anstieg der Leistungsaufnahme immer stärker, danach flacht er zunehmend ab – der Stromverbrauch steigt zwar weiter, aber langsamer.
c) Die Leistungsaufnahme nimmt dort momentan um 25 kW/h zu – das entspricht dem gleichzeitigen Einschalten mehrerer Geräte (Computer, Smartboards etc.).

Lösung 5.98

A =>h, B => f, C => g

Lösung 5.99

siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.100

a) z. B. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 1$
b) x = 2
c) WP(2|11)

Lösung 5.101

a) WP(1|3)
b) 1. und 4.

Lösung 5.102

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 5$
b) $f''(x) = 6x - 12$
$f'''(x) = 6$
c) $x_W = 2$
d) t(x) = –7x + 22

Lösung 5.103

a) siehe Lösungs-PDF
b) siehe Lösungs-PDF
c) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.104

a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$
b) $f(x) = -0{,}6x^2 + 2{,}4x + 0{,}2$
c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 4$
d) $f(x) = 1{,}5x^2 - 5x - 4$
e) $f(x) = -2x^2 + 2x - 2$
f) $f(x) = 0{,}25x^2 + 0{,}5x + 2$

Lösung 5.105

a) $S(2|-1)$
b) $S(2|2{,}6)$
c) $S(2{,}5|-\frac{1}{6})$
d) $S(\frac{5}{3}|-\frac{49}{6})$
e) $S(0{,}5|-1{,}5)$
f) $S(-1|1{,}75)$

Lösung 5.106

1 => B, 2 => E, 3 => H, 4 => F,
5 => F/D, 6 => C, 7 => I, 8 => A,
9 => G, 10 => J

Lösung 5.107

$f(x) = ax^5 + bx^3 + ccx$
$f(x) = -4$
$f'(3) = 0$
$f'(0{,}8) = -1{,}2$

Lösung 5.108

2)

Lösung 5.109

$f(x) = x^3 + 3x^2$

Lösung 5.110

$f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

Lösung 5.111

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$

Lösung 5.112

a) $f(x) = 0{,}125x^3 - 0{,}75x^2 + 5$
b) $f(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + 2x^2$

Lösung 5.113

$f(x) = -0{,}03x^3 - 14{,}82x^2 + 274{,}17x + 45$

Lösung 5.114

a) $x_1 = 5, x_2 = 1$
TP(3|–4)
b) $x_1 = 4{,}236, x_2 = -0{,}236$
TP(2|5)

Lösung 5.115

a) $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -2$
TP(2,53|–1,13), HP(–0,53|13,13)
WP(1|6)
b) $x_1 = 2, x_2 = 3{,}73, x_3 = 0{,}27$
HP(3|2), TP(1|–2)
WP(2|0)
c) $x_1 = 1, x_2 = 5, x_3 = -2$
HP(–0,69|25,19), TP(3,36|–41,49)
WP(1,33|–8,15)
d) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$
TP(1,73|–5,2), HP(–1,73|5,2)
WP(0|0)

Lösung 5.116

a) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$
HP(0|4), TP(1,58|–2,25),
TP(–1,58|–2,25)
WP(0,91|0,53),WP(–0,91|0,53)
b) $x_1 = 0, x_2 = 2{,}83, x_3 = -2{,}83$
HP(0|0), TP(2|–16), TP(–2|–16)
WP(1,15|–8,89), WP(–1,15|–8,89)
c) $x_1 = 0, x_2 = 4$
HP(3|27)
WP(0|0), WP(2|16)
d) $x_1 = 2{,}24, x_2 = -2{,}24$
HP(0|–5), TP(1,41|–9), TP(–1,41|–9)
WP(0,82|–7,22), WP(–0,82|–7,22)

Lösung 5.117

a) $x_1 = 3, x_2 = -1$
TP(1|–4)
keine Wendepunkte
b) $x_1 = 0, x_2 = 2{,}45, x_3 = -2{,}45$
HP(–1,41|5,66), TP(1,41|–5,66)
WP(0|0)
c) $x_1 = 1, x_2 = -1$
HP(0|1), TP(1|0), TP(–1|0)
WP(0,58|0,44), WP(–0,58|0,44)
d) $x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = 3{,}5$
HP(3,21|0,05), TP(3,79|–0,05)
WP(3,5|0)

Lösung 5.118

a) $x_1 = 3, x_2 = 1$
HP(2|2)
keine Wendepunkte
b) $x_1 = -2, x_2 = 7, x_3 = 1{,}2$
HP(–0,54|9,58), TP(4,68|–26,96)
WP(2,07|–8,69)
c) $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 1$
HP(3|4), TP(1|0)
WP(2|2)
d) $x_1 = 2, x_2 = -2$
HP(0|–12), TP(1,12|–15,13),
TP(–1,12|–15,13
WP(0,65|–13,32),
WP(–0,65|–13,32)
e) $x_1 = 0, x_2 = 5{,}46, x_3 = -1{,}46$
TP(0|0), HP(4|32), HP(–1|0,75)
WP(2,53|18,73), WP(–0,53|0,39)
f) $x_1 = 0$
HP(1,5|2,78), TP(2|2,4)
WP(0|0), WP(1,78|2,57),
WP(0,84|1,45)

Lösung 5.119

a) $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = -2$
b) $x_1 = 3{,}1, x_2 = -0{,}43$
c) $h'(4) = 6$
d) $x = 1{,}33$
e) von unten nach oben

Lösung 5.120

a) $x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = -0{,}5$
b) $q'(x) = -0{,}6x^2 + 3x - 1{,}6$
$q''(x) = -1{,}2x + 3$
$q'''(x) = -1{,}2$
c) HP(4,39|3,76), TP(0,61|–1,66)
d) $q'(2) = 2$
e) WP(2,5|1,05)
f) von unten nach unten, einen HP, einen TP, einen WP

Lösung 5.121

a) $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 1, x_4 = -1$
b) HP(0|0), TP(2,24|–16),
TP(–2,24|–16)
c) $f'(1) = -16$
d) WP(1,29|–4,89), WP(–1,29|–4,89)
e) von oben nach oben

Lösung 5.122

a) $x_1 = -2, x_2 = 4, x_3 = 2{,}5, x_4 = -0{,}5$
b) $x_1 = 1, x_2 = 3{,}371, x_3 = -1{,}371$
c) $g'(2) = -9{,}25$
d) $x_1 = 2{,}37, x_2 = -0{,}37$

Lösung 5.123

a) 24 m
b) ja (rund 2 m Höhe)
c) 14,9°

Lösung 5.124

a) Zu Beginn (0 s) und nach 12,6 s.
b) 8,3 s
c) 4 s
d) Nach 6 s liegt mit 4,48 L/s² keine starke Änderung vor.
e) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.125

a) Nach 5,58 h und nach 10 h
b) 8 h
c) Steigt bis zur achten Stunde und fällt ab da wieder ab.
d) 0,45 m/s
e) 4 h

Lösung 5.126

a) Der Shuttle fährt die gesamte Zeit vorwärts.
b) wird zwischen 5 s und 7,65 s nicht eingehalten
c) wird nicht überschritten
d) 11.1
e) Mit 4,65 s liegt der Wert unter der Vorgabe.

Lösung 5.127

a) 10 Minuten
b) 2,92 °C, also 4 °C unter der Empfehlung
c) wird eingehalten
d) 14,18 Minuten

Lösung 5.128

a) $t = 0$, $t = 10$
b) ja
c) war erfolgreich
d) wird nicht überschritten

Lösung 5.129

a) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$
b) $x_1 = -2, x_2 = -0{,}5, x_3 = 2$
c) $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = 4$
d) $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 1$
e) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 4$
f) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4{,}5, x_4 = -2{,}5$
g) $x_1 = -4, x_2 = -2, x_3 = 3$
h) $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 4, x_4 = 5$
i) $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 2$
j) $x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 3$

Lösung 5.130

a) $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 1, x_4 = -1$
b) $x_1 = 1{,}59, x_2 = 1$
c) $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = -2$
d) $x_1 = 2{,}08, x_2 = 1$
e) $x_1 = 2{,}24, x_2 = -2{,}24, x_3 = 2, x_4 = -2$
f) $x_1 = 1{,}73, x_2 = -1{,}73$
g) $x_1 = 2{,}08, x_2 = 1{,}59$
h) $x_1 = 1{,}41, x_2 = -1{,}41$
i) $x_1 = 2, x_2 = -2$
j) $x_1 = 1{,}82, x_2 = -1{,}26$

Lösung 5.131

a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2$
b) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -6$
c) $x_1 = 0, x_2 = 2$
d) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2$
e) $x_1 = 0, x_2 = 1{,}5, x_3 = -1{,}5$
f) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$
g) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -4$
h) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -5$
i) $x_1 = 0, x_2 = 1{,}41, x_3 = -1{,}41$
j) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3, x_4 = 2, x_5 = -2$

Lösung 5.132

a) $x_1 = 0, x_2 = 4{,}24, x_3 = -0{,}24$
b) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -4$
c) $x_1 = 2, x_2 = -2, x_3 = 1, x_4 = -1$
d) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$
e) $x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = -2$
f) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$
g) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$
h) $x_1 = 1{,}73, x_2 = -1{,}73, x_3 = 1, x_4 = -1$
i) $x_1 = 3$
j) $x_1 = 2, x_2 = -2$

Lösung 5.133

a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -1$
b) $x_1 = 2{,}24, x_2 = -2{,}24, x_3 = 1{,}73, x_4 = -1{,}73$
c) $x_1 = -5, x_2 = 2, x_3 = -2$
d) $x_1 = 0, x_2 = -5, x_3 = 3, x_4 = -1$
e) $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -5$
f) $x_1 = 3, x_2 = 2$
g) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 2$
h) $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3{,}46, x_5 = -3{,}46$

Lösung 5.134

a) $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 4$
b) Für diese Werte ist da Volumen gleich Null.
c) $x = 1{,}47$
d) 13,13 cm^3

Lösung 5.135

a) Hoch-/Tiefpunkt auf der x-Achse
b) $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2$
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
d) $x_1 = -1, x_{2/3} = 2$

Lösung 5.136

a) $x_1 = 1, x_2 = -2$
b) $(x^2 + 1)$ => neg. Diskriminante
c) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.137

a) da faktorisiert werden kann
b) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = 2$
c) da $x^2 = 0$, ist $2 = 0$ eine doppelte, alle anderen einfache Nullstellen.

Lösung 5.138

a) $R(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$
b) $x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 4, x_3 = 2$
c) nein, Anzahl der Nullstellen kann nicht größer sein als Grad der Fkt.

Lösung 5.139

a) richtig
b) $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 3, x_4 = -4$
c) ---

Lösung 5.140

a) $x = 1$ und $x = 3$
b) Von 1 bis 3 positiv, von 1 bis 3 negativ und ab 3 positiv

Lösung 5.141

a) 70 Minuten nach Öffnung
b) Da 81,37 < 90 wird die Vorgabe eingehalten.
c) nein

Lösung 5.142

a) 23:00 Uhr
b) 23:00 Uhr, 01:00 Uhr, 06:30 Uhr
c) nein

Lösung 5.143

a) $x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = -1$
b) $x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = -3$
c) $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = -2$
d) $x_1 = 0, x_2 = 2{,}24, x_3 = -2{,}24$
e) $x_1 = 0, x_2 = 8, x_3 = -3$
f) $x_1 = -2, x_2 = 2{,}83, x_3 = -2{,}83$

Lösung 5.144

a) $f'(x) = 20x^4$
b) $f'(x) = -12x^3 + 4x$
c) $f'(x) = 3x^5 - 21x^2$
d) $f'(x) = 18x^2 - 2{,}4x + 8$
e) $f'(x) = -7x^6 + 5$
f) $f'(x) = 8x^3 - 16x$
g) $f'(x) = 18x - 4$
h) $f'(x) = -2x^7 + 4x$
i) $f'(x) = 15x^4 - 30x$
j) $f'(x) = 21x^2 + 0{,}8$
k) $f'(x) = -20x^4 + 9x^2 - 0{,}5$
l) $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{15}{7}x^2 - \frac{2}{9}$

Lösung 5.145

a) $f(x) = 3x^2$
b) $f(x) = 3x^4$
c) $f(x) = 3x^5 - 3x^2$
d) $f(x) = -2x^4 + 10x$
e) $f(x) = 3x^3 - 2x^2$
f) $f(x) = 2{,}5x^2 + 2x$

Lösung 5.146

a) $f'(x) = -3x^2 + 18x - 6$
$f'(2) = 18$, $f'(-3) = -87$, $f'(4) = 18$
b) $f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 5$
$f'(2) = -1$, $f'(-3) = 36{,}5$, $f'(4) = 5$
c) $f'(x) = 6x^2 + 8x - 8$
$f'(2) = 32$, $f'(-3) = 22$, $f'(4) = 120$
d) $f'(x) = 0{,}6x^2 - 2{,}4x + 0{,}6$
$f'(2) = -1{,}8$, $f'(-3) = 13{,}2$,
$f'(4) = 0{,}6$

Lösung 5.147

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$
b) $f'(1) = -3$
c) $t(x) = -3x + 3$

Lösung 5.148

a) $h'(t) = -0{,}6t^2 + 4{,}8t$
b) $h'(2) = 7{,}2$ m/s, $h'(6) = 7{,}2$ m/s
c) $t_1 = 0$, $t_2 = 8$

Lösung 5.149

a) richtig
b) richtig
c) richtig
d) richtig
e) $f'(x) = 0$
f) richtig

Lösung 5.150

a) 1 => C, 2 => D, 3 => A, 4 => B

Lösung 5.151

a) $f'(2) = 0$

Lösung 5.152

a) $f'(x) = 9x^2 - 4x$, $f'(1) = 5$
b) $f'(x) = -4x^3 + 4$, $f'(-1) = 8$
c) $f'(x) = x^4 - 2x$, $f'(0) = 0$
d) $f'(x) = 12x - 5$, $f'(3) = 31$
e) $f'(x) = 8x^3 - 16x$, $f'(2) = 32$
f) $f'(x) = -2x^3 + 6x$, $f'(-2) = 4$

Lösung 5.153

a) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
b) $x_1 = -1$ (TP), $x_2 = 2$ (kein EP)
c) Steigung 0 => waagerechte Tangente => kein Extrempunkt aber Sattelpunkt möglich

Lösung 5.154

a) $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$
b) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$
c) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$
d) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$
e) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{6}$, $x_3 = -\sqrt{6}$
f) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$
g) $x_1 = 0$, $x_2 = -4$
h) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$
i) $x_1 = 0$
j) $x_1 = 0$, $x_2 = 2{,}37$, $x_3 = 0{,}63$

Lösung 5.155

a) TP(3|0), HP(1|4)
b) TP(0|6), HP(2|10)
c) HP(0|3), TP(1,41|–5), TP(–1,41|–5)
d) TP(0|–1), HP(2|3), HP(–2|3)
e) TP(1,64|–3,63), HP(–1,64|3,63), HP(0,54|1,42), TP(–0,54|–1,42)
f) HP(0|0), HP(2|0), TP(1|–1)

Lösung 5.156

a) HP(12|2,88), 2,88 m
b) $f(9{,}15) \approx 2{,}47$ m > 2 m
=> Ball überquert Mauer mit ca. 0,47 m Abstand
c) x = 18 m
d) $\alpha \approx 47{,}20°$

Lösung 5.157

a) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$
b) 2,67 mg
c) 1,33 mg
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.158

a) Steigt zunächst an, erreicht ein Maximum, fällt dann wieder auf Normalniveau.
b) 0,2 m
c) 0,2 m/Tag
d) Nach 2,11 Tagen mit 0,267 m/Tag
e) Zwischen dem 4. und 6. Tag
f) Nach 5 Tagen mit 1,068 m
g) Nach 10 Tage

Lösung 5.159

a) siehe Lösungs-PDF
b) $0 \le t \le 12$
c) Nach 8 Stunden mit 512 m³
d) Mittl. Änderungsr. = durchschn. Änderung der Wassermenge pro Stunde in einem Zeitintervall.
Lok. Änderungsr. = momentane Zu-/Abnahme der Wassermenge zu bestimmten Zeitpunkt.
e) 96 m³/h
f) Nach 4 Stunden mit 96 m³/h

Lösung 5.160

a) siehe Lösungs-PDF
b) 39,55 L/h
c) 22 %
d) $v'(5) = 43{,}75$ L/h (momentane Produktionsrate um 11:00 Uhr)
e) 6,67 h nach 06:00 Uhr (12:40 Uhr)

Lösung 5.161

a) WP(1|–1)
b) WP(–2|37)
c) WP(2|14)
d) WP(0|4)
e) $WP_1(0|7)$, $WP_2(2|-9)$
f) $WP_1(0|-1)$, $WP_2(-2|-33)$
g) $WP_1(1{,}41|23)$, $WP_2(-1{,}41|23)$
h) $WP_1(3|-160)$
i) $WP_1(-3|318)$
j) $WP_1(0|1)$, $WP_2(2{,}12|101{,}23)$, $WP_3(-2{,}12|-99{,}23)$
k) WP(2|–57)
l) WP(6|15554)

Lösung 5.162

a) $WP_1(1|-3)$, WP2(–1|–3)
b) $WP_1(1{,}15|-3{,}89)$, $WP_2(-1{,}15|-3{,}89)$
c) kein Wendepunkt
d) $WP_1(1{,}29|14{,}89)$, $WP_2(-1{,}29|14{,}89)$
e) WP(–0,5|0,08)
f) $WP_1(-1|1{,}23)$, $WP_2(2|4{,}8)$, $WP_3(3|8{,}33)$
g) $WP_1(-1|-2{,}86)$, $WP_2(1|1{,}49)$, $WP_3(-0{,}5|-1{,}94)$
h) $WP_1(1|4{,}7)$, $WP_2(2|3{,}07)$, $WP_3(-2|-4{,}40)$

Lösung 5.163

a) kein Wendepunkt
b) kein Wendepunkt
c) $WP_1(-1|2{,}15)$, $WP_2(1{,}5|8{,}99)$, $WP_3(-1{,}5|3{,}67)$
d) $WP_1(0|0)$, $WP_2(3|194{,}4)$, $WP_3(-3|-194{,}4)$
e) $WP_1(0|-1)$, $WP_2(2|7{,}53)$, $WP_3(-2|-9{,}53)$
f) $WP_1(0|2)$, $WP_2(4|-544{,}13)$, $WP_3(-4|548{,}13)$

Lösung 5.164

a) WP(–1|1,7)
b) WP_1(–2|–14,4), WP_2(3|–3,15), WP_3(1|–2,05)
c) WP_1(–3|10,8), WP_2(3|124,2), WP_3(–1|5,93)
d) WP_1(–1|4,85), WP_2(2,50|18,56), WP_3(1,50|9,58)
e) WP_1(0|0), WP_2(2|–4,8), WP_3(–1|0,4)
f) WP_1(0|0), WP_2(1|–0,12), WP_3(–1|0,12)
g) WP_1(–3|46,35), WP_2(2|4,27), WP_3(1|1,88)
h) WP_1(3|–74,25), WP_2(–2|–28)

Lösung 5.165

a) 58,92 cm^2
b) 2,81 cm^2/h
c) 24,6 h (08:36 Uhr am Folgetag)
d) 12,3 h (20:18 Uhr)
e) 24,6 h (08:36 Uhr am Folgetag)

Lösung 5.166

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
b) TP(3|–4), HP(1|0)
c) WP(2|–2)
d) x = 1 (doppelte Nullstelle), x = 4 (einfache Nullstelle)
e) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.167

a) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$
TP(2,79|–8,21), HP(–0,12|4,06), WP(1,33|–2,07)
b) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$
TP(0,79|–8,21), HP(–2,12|4,06), WP(–0,67|–2,07)
c) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$
HP(1|9), TP(3,24|–16), TP(–1,24|–16), WP_1(2,29|–4,89), WP_2(–0,29|–4,89)
d) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$
HP(–0,50|14,06), TP(1,56|–4), TP(–2,56|–4), WP_1(0,69|4,03), WP_2(–1,69|4,03)
e) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$
HP(1|4), TP(2,58|–2,25), TP(–0,58|–2,25), WP_1(1,91|0,53), WP_2(0,09|0,53)
f) $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ (dopp. NS)
TP(2|0), HP(0,23|12,45), TP(–2,23|–16,95), WP_1(1,23|5,65), WP_2(–1,23|–4,15)

Lösung 5.168

a) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ (dopp. NS)
TP(1|0), HP(–1|4), WP(0|2)
b) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ (dopp. NS)
TP(3|0), HP(1|4), WP(2|2)
c) $x_1 = 1{,}73$, $x_2 = -1{,}73$, $x_3 = 1$, x4 = –1
HP(0|3), TP(1,41|–1), TP(–1,41|–1), WP_1(0,82|0,78), WP_2(–0,82|0,78)
d) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$ (dopp. NS), $x_3 = 1$
HP(0,50|14,06), TP(2,56|–4), TP(–1,56|–4), WP_1(1,69|4,03), WP_2(–0,69|4,03)
e) $x_1 = 2$ (dopp. NS), $x_2 = -2$ (dopp. NS)
HP(0|16), TP(2|0), TP(–2|0), WP_1(1,16|7,11), WP_2(–1,16|7,11)
f) $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}37$, $x_3 = -4{,}37$
TP(0,73|–2,39), HP(–2,73|18,39), WP(–1|8)
g) $x_1 = 2{,}65$, $x_2 = -2{,}65$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$
HP(0|7), TP(2|–9), TP(–2|–9), WP_1(1,15|–1,89), WP_2(–1,15|–1,89)
h) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$
TP(0|–9), HP(2,24|16), HP(–2,24|16), WP_1(1,29|4,89), WP_2(–1,29|4,89)

Lösung 5.169

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$
TP(2,54|–0,44), HP(0,13|3,03), WP(1,33|1,30)
b) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -2$
HP(2,73|4,16), TP(–0,73|–4,16), WP(1|0)
c) $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$
HP(0|4,50), TP(2,24|–8), TP(–2,24|–8), WP_1(1,29|–2,44), WP_2(–1,29|–2,44)
d) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$
TP(0|–12,80), HP(3,16|7,20), HP(–3,16|7,20), WP_1(1,83|–1,69), WP_2(–1,83|–1,69)
e) $x_1 = 0$ (dopp. NS), $x_2 = 5$, $x_3 = -5$
HP(0|0), TP(3,54|–46,88), TP(–3,54|–46,88), WP_1(2,04|–26,04), WP_2(–2,04|–26,04)
f) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$
HP(0,50|3,52), TP(2,03|–5,89), TP(–1,78|–2,69), WP_1(1,35|–1,64), WP_2(–0,85|1,98)
g) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$
HP(0,5|1,58), Kein Wendepunkt
h) $x_1 = 4$, $x_2 = 2{,}65$, $x_3 = -2{,}65$
TP(3,36|–2,5), HP(–0,69|4,16), WP(1,33|5,57)

Lösung 5.170

a) $t_1 = 0$ (06:00 Uhr), $t_2 = 3$ (09:00 Uhr), $t_3 = 5$ (11:00 Uhr)
b) HP bei t ≈ 0,85 (06:51 Uhr), TP bei t = 3 (09:00 Uhr), HP bei t = 4,4 (10:24 Uhr)
c) $t_1 = 1{,}72$ (07:43 Uhr)
$t_2 = 3{,}78$ (09:47 Uhr)
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.171

a) 1 kHz, 4 kHz, 5 kHz
b) HP(2,5|14,06), TP(4,56|–1,13), TP(0,44|–4,38)
c) 1,31 kHz und 3,69 kHz
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 5.172

a) $V(x) = 1{,}5x^2 + 150x$;
$K(x) = 1{,}5x^2 + 150x + 5000$;
variable Kosten = 5 × Fixkosten
bei x ≈ 88 Stück;
Skizze siehe Lösungs-PDF
b) $G(x) = -1{,}5x^2 + 300x - 5000$;
Gewinn für ca. 19 < x < 181 Stück;
maximaler Gewinn: 10.000 Euro
bei 100 Stück
c) 19,38 %

Lösung 5.173

a) $f(x) = -0{,}125x^4 + x^2 + 2$

Lösung 5.174

a) $f(x) = -x^3 + 9x$

Lösung 5.175

a) $f(x) = 0{,}375x^5 - 1{,}25x^3 + 1{,}875x$

Lösung 5.176

$f(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}02x + 1{,}2$
Spannweite: 22 Längeneinheiten
Max. Höhe: 1,21 Längeneinheiten

Lösung 5.177

$f(x) = -0{,}0625x^4 + 0{,}5x^3 - x^2 - x + 4$

Lösung 5.178

Skizze siehe Lösungs-PDF
$f(x) = 0{,}25x^2 - 1$

Lösung 5.179

a) x-Achse: Zeit seit Fahrtbeginn in Minuten; y-Achse: zurückgelegte Strecke in Kilometern

b) $f(x) = -0{,}0097x^3 + 0{,}349x^2$
c) nach 12 Minuten

Lösung 5.180
a) $L = \{(2; 3; 8)\}$
b) $L = \{(5; 4; 1)\}$
c) $L = \{(8; 2; 9)\}$
d) $L = \{(-2; 2; 3)\}$
e) $L = \{(5; -9; 0)\}$
f) $L = \{(0{,}3; -0{,}7; 3)\}$

Lösung 5.181
a) $L = \{(4; -1; 2)\}$
b) $L = \{(-0{,}75; 9{,}4; 11)\}$
c) $L = \{(0{,}02; 3{,}9; 7{,}04)\}$
d) $L = \{(0{,}27; -4{,}25; 0{,}83)\}$
e) $L = \{(-1{,}875; 0; 0{,}018)\}$
f) $L = \{(-3{,}05; 4{,}1; 126)\}$

Lösung 5.182
a) $L = \{(11; -9; -4)\}$
b) $L = \{(-2; -9; 1)\}$
c) $L = \{(2; -1; -5)\}$
d) $L = \{(-3{,}79; -5{,}05; 2{,}04)\}$
e) $L = \{(0{,}18; -0{,}55; -0{,}83)\}$
f) $L = \{(2; -4; -3)\}$
g) $L = \{(-4; 3; -7)\}$
h) $L = \{(-8; 9; -9)\}$
i) $L = \{(6; -8; -4)\}$

Lösung 5.183
a) $L = \{(-9; -1; -3; -2)\}$
b) $L = \{(8; 7; 5; -9)\}$
c) $L = \{(1; 2; 3; 4)\}$
d) $L = \{(2; 6; -5; 6)\}$

Lösung 5.184
a) $t_1 = 0$, $t_2 = 10$
b) HP(4|10), TP(10|0)
c) t = 4 (13:30 Uhr)
d) WP(7,36|4,56)
e) $v'(2) \approx 2{,}59$ Portionen/min pro Stunde
f) ca. 3480 Portionen
g) HP(4|10) => 10 Portionen/Minute; für einen gut besuchten Stand plausibel

Lösung 5.185
a) $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 10$, $t_4 = 12$
b) Nach 6 Stunden mit 5,76 MW
c) 3,06 h
d) Ja, negative Leistungswerte in [0; 2] und [10; 12]

Lösung 5.186
a) $x_1 = 3$, $x_2 \approx 5{,}11$, $x_3 \approx 0{,}39$ =>Schnittkante im Idealbereich
b) HP(1,47|1,20), TP(4,20|–0,83); größte positive Abweichung bei x = 6 mit Q(6) = 3; größte negative Abweichung bei x = 0 mit Q(0) = –1,2
c) $Q'(0) = 3{,}7$; $Q'(2{,}83) \approx -1{,}12$; $Q'(6) = 4{,}9$
d) [1; 2] und [5,5; 6]

Lösung 5.187
a) $t_1 = 0{,}25$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 8{,}75$
b) HP(4,50|4,06), TP(1,31|–6,25), TP(7,69|–6,25); B(0) = 3,94, B(9) = 3,94
c) Personal hinzuziehen in [0; 0,25), (3; 6), (8,75; 9]; abziehen in (0,25; 3), (6; 8,75)

Lösung 5.188
a) $x_1 = 0$, $x_2 = 30$; Flugstrecke: 30 m
b) HP(19,26|25,09); Vorgabe von 25 m knapp nicht eingehalten
c) Von $x \approx 10$ m bis $x \approx 26{,}38$ m
d) $x \approx 8{,}33$ m (steilster Anstieg)

Lösung 5.189
a) $x_1 = 3$, $x_2 = 6$ (dopp. NS); überdosiert für $0 < x < 3$, unterdosiert für $3 < x < 9$
b) HP(6 | 0), TP(4,10 | –0,0085); Randwerte: c(0) = 0,0972, c(9) = –0,1944 => Grenzwert bei $x \approx 9$ deutlich unterschritten
c) Becken schließen bzw. nachchloren ab ca. $x \approx 8{,}3$ Stunden

Lösung 5.190
a) $K(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}6x + 3$
$E(x) = 3{,}9x$
$G(x) = -0{,}3x^2 + 3{,}3x - 3$
Skizze siehe Lösungs-PDF
b) Gewinnschwelle: x = 1
Gewinngrenze: x = 10
c) HP(5,5|6,08)

Lösung 5.191
a) $E(x) = -5x^2 + 60x$
Skizze siehe Lösungs-PDF
b) BEP(1,58|82,43)
c) Sättigungsmenge: x = 12
d) HP bei $x \approx 5{,}19$

Lösung 5.192
a) $K_V(x) = \frac{1}{64}x^3 + \frac{7}{32}x^2 + \frac{1}{8}x$
b) siehe Lösungs-PDF
c) $E(x) = 3x$
d) siehe Lösungs-PDF
e) $G(x) = -\frac{1}{64}x^3 - \frac{7}{32}x^2 + \frac{23}{8}x - 1$
max. Gewinn bei 4,5 ME mit 6 GE

Lösung 5.193
a) 10.800 Euro
b) $E(x) = 20x$
c) $G(x) = -0{,}6x^3 + 4{,}8x^2 + 1{,}35x - 10{,}8$
Gewinnschwelle: 1.500 Bücher
Gewinngrenze: 8.000 Bücher
d) 5.470 Bücher, 42.000 Euro Gewinn
e) 8.300 Euro pro 1.000 Bücher, also 8,30 Euro pro Buch
f) Stückkosten = 20 Euro pro Buch; kein Gewinn, kein Verlust
g) siehe Lösungs-PDF

9.6 LÖSUNGEN – 6

Lösung 6.1
a) 40 Mio m^3
b) Von x = 6 bis x = 12 beträt der Abfluss auch 40 Mio m^3.
c) x = 2 bis x = 4
d) x = 6

Lösung 6.2
a) siehe Lösungs-PDF
b) $A_O = 49{,}05$; $A_U = 37{,}83$
c) A = 43,44
d) x = 2,54

Lösung 6.3

a)	0,3	e)	1,2	i)	4,2
b)	–3	f)	–0,5	j)	2,2
c)	–2,1	g)	1		
d)	–1,4	h)	4,2		

Lösung 6.4
a) ja b) nein c) nein

Lösung 6.5
a) a = 1
b) a = –1
c) $a = \frac{7}{5}$, b = 5
d) $a = \frac{1}{16}$, b = 8

Lösung 6.6
a) z. B. $F_1(x) = 0{,}4x^5 + 2$
z. B. $F_2(x) = 0{,}4x^5 + 3$
b) z. B. $F_1(x) = -0{,}2x^4 - 1$
z. B. $F_2(x) = -0{,}2x^4 - 5$

c) z. B. $F_1(x) = 1{,}5x^2 - 3$
z. B. $F_2(x) = 1{,}5x^2 + 2$
d) z. B. $F_1(x) = 4$
z. B. $F_2(x) = -1$

Lösung 6.7

a) $9x + c$
b) $3x^2 + c$
c) $-\frac{4}{3}x^3 + c$
d) $0{,}125x^4 + c$
e) $x^3 - 4x^2 + c$
f) $0{,}4x^5 + 5x + c$

Lösung 6.8

a) 18
b) $\frac{250}{3}$
c) 9
d) $\frac{118}{3}$
e) $\frac{28}{3}$
f) 0
g) $\frac{320}{3}$
h) 0,4
i) $\frac{11}{6}$
j) $-\frac{10}{3}$
k) 3
l) 9
m) $\frac{31}{3}$
n) 0
o) 39
p) 4

Lösung 6.9

a) $a = 4$
b) $a = 3{,}42$
c) $a = 2{,}88$
d) $a = 4$
e) $a_1 = 2$, $a_2 = -3$
f) $a_1 = 2{,}15$, $a_2 = -2{,}15$

Lösung 6.10

a) $a = 4{,}5$
b) $b = \emptyset$
c) $a = 1$
d) $a = 3$
e) $a = \frac{59}{32}$
f) $a = 10$

Lösung 6.11

a) $A = 4{,}5$
b) $A = 7{,}45$

Lösung 6.12

a) $-\frac{8}{3}\ m^2$
b) $\frac{8}{3}\ m^2$ => passt
c) 10.400 t
d) Graben 1 m
Böschung 3 m

Lösung 6.13

a) $10{,}67\ m^2$
b) 21.334 t

Lösung 6.14

a) 0 ; –2
b) $-\frac{10}{3}$; $-\frac{16}{3}$
c) 0 ; –1,125
d) –4,5 ; $\frac{64}{3}$
e) $-\frac{52}{15}$; $\frac{23}{60}$
f) 0,75 ; –6,75

Lösung 6.15

a) $1.662{,}73\ m^2$
b) 17,29 t

Lösung 6.16

a) wird mit 1,37 m erreicht
b) 4,08 Mio. m^3
c) 5,13 Mio. t ; 265.416 LKW-Ladungen ; 5,05 Jahre => unrealistisch

Lösung 6.17

a) t = 0 ; t = 12
b) 20,48 kW um 14:00 Uhr
c) 138 kWh
d) 66,56 kWh ; 48,15 %
e) 120,24 kWh

Lösung 6.18

a) 5,33
b) 14,33
c) 9
d) 1,33
e) 24

Lösung 6.19

a) –1,33
b) 1,33
c) 2,67
d) 0,75
e) 0,375

Lösung 6.20

a) –8,53
b) 8,53
c) –0,93
d) 6,13
e) –8,53
f) 0

Lösung 6.21

a) 4,5
b) 5,33
c) –2,67
d) 14,91
e) –5,33

Lösung 6.22

a) –2,25
b) –0,08
c) –5,84
d) –1,125
e) –1,33
f) 1,33
g) 3,77
h) –12,35

Lösung 6.23

a) –8,53
b) 8,53
c) –1,51
d) –8,53
e) 17,29
f) –48,25
g) –17,07
h) 8,53

Lösung 6.24

a) Die Schnittpunktberechnung liefert nur x = 2 als Lösung.
b) 10,67

Lösung 6.25

a) $f(x) = 0{,}25x^2 - 1$
$g(x) = -0{,}25x^2 + 1$
b) 2,19 FE
c) 58,9 %

Lösung 6.26

A1 = 27 ; A2 = 40,5

Lösung 6.27

a) [–4; 11]
b) 17,44 FE
c) 1,83 FE bei x = 5,33

Lösung 6.28

a) L(0) = 0 ; L(6) = 21,6 ; L(12) = 0
b) von 08:00 bis 09:00 Uhr und ab 18:55 Uhr
c) 103,2 kWh
d) um 15:20 Uhr mit 18,72 kWh

Lösung 6.29

a) Zu Beginn und am Ende unterhalb des Sicherheitswertes, am Ende größer als zu Beginn.
b) x = 5 ; x = 11,71
c) 20,5 FE
d) zusätzliche Sicherung nötig

Lösung 6.30

a) 10,54
b) 32,75
c) 8
d) 23,67
e) 16,38
f) 21,08
g) 21,08

Lösung 6.31

a) 21,08
b) 10,54
c) 6,17
d) 11,83
e) 21,08
f) 11,83
g) 81
h) 156,17
i) 63,25

Lösung 6.32

a) 21,08 ; 10,42
b) 6,17 ; –4,5
c) 8 ; 2,13
d) 101,75 ; –85,75
e) 78,08 ; 25,58
f) 7,18 ; –5,87
g) 3,17 ; 0
h) 26,133 ; –14,4
i) 40,5 ; 0

Lösung 6.33

a) 1,33
b) 8
c) 31,25

Lösung 6.34

a) 21,08
b) 21,08
c) 21,08
d) 3,08
e) 8
f) 32,75

Lösung 6.35

a) $9\ km^2$
b) 48.600 BRL/Jahr
c) 8210,71 EUR/Jahr
d) 1261 Fußballfelder

Lösung 6.36

a) 13 cm
b) 19,74 cm^2
c) 0,57 Cent
d) reicht aus
e) siehe Lösungs-PDF

Lösung 6.37

a) 6 c) 0,25 e) 4,08
b) 0 d) 1,67 f) 2,8

Lösung 6.38

a) 3,78 c) 0 e) 7,8
b) 1,13 d) 26 f) 1,8

Lösung 6.39

a) 0 c) 6 e) 0
b) 0 d) 2,13 f) 0

Lösung 6.40

a) 1,5 b) $\frac{5}{3}$ c) 1,5

Lösung 6.41

a) für jedes a c) 0,89
b) $\frac{5}{3}$

Lösung 6.42

a) b + a ist falsch
b) Faktor vor Integral fehlt
c) Stammfunktion
d) Grenzen vertauscht

Lösung 6.43

überschreitet den Wert

Lösung 6.44

a) 95,6 µm
b) in Ordnung
c) werden eingehalten
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 6.45

a) 172,8 Pakete
b) 14,4 Pakete pro Minute
c) zu viel Personal

Lösung 6.46

a) 53 °C
b) zulässig
c) Fläche durch Intervallbreite

Lösung 6.47

a) 35 kW
b) Ersatzleistung liegt über den Randwerten
c) 11,67 k Wh

Lösung 6.48

a) T(1) = 20,57
T(2) = 23,49
T(3) = 24,22
b) 23 °C
c) max: 17:00 Uhr mit 24,25 °C
min: 12:00 Uhr mit 18 °C
d) max: 5,44 % über Mittelwert
min: 21,74 % unter Mittelwert
e) wird nicht überschritten
f) siehe Lösungs-PDF

Lösung 6.49

a) 54,45 d) 107,23
b) 324,21 e) 16,76
c) 43,14 f) 36,56

Lösung 6.50

a) 220,33 d) 565,49
b) 492,18 e) 167,55
c) 131,53 f) 160,43

Lösung 6.51

a) 45,24 f) 31,96
b) 87,97 g) 46,71
c) 240,44 h) 84,45
d) 49,01 i) 262,95
e) 214,47

Lösung 6.52

a) Boden: 12 cm
Oberkante: 9,6 cm
b) bei 5 cm mit 12,1 cm
c) 3,075 L
d) 2,77 kg

Lösung 6.53

a) wird nicht überschritten
b) 464 cm^3
c) 22,9 g

Lösung 6.54

a) es gilt R(x) > r(x)
b) 28,27 cm^2
c) 543,5 ml
d) 82,35 cm^3
e) 86,5 g

Lösung 6.55

a) 7 cm c) 9,47 cm
b) 7,72 cm d) 714 ml

Lösung 6.56

a) z. B. $F(x) = 2$
b) z. B. $F(x) = 1{,}25x$
c) z. B. $F(x) = -3{,}5x^2$
d) z. B. $F(x) = 0{,}8x^2 - 3{,}2x$
e) z. B. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 8x$
f) z. B. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$
g) z. B. $F(x) = \frac{4}{3}x^3 - 9x^2 + 5x$
h) z. B. $F(x) = \frac{11}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$
i) z. B. $F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 - 3x$

Lösung 6.57

a) 24 b) 6 c) 20 d) 18

Lösung 6.58

13,33

Lösung 6.59

10,93 km

Lösung 6.60

a) 48 f) 0
b) –4,5 g) 24
c) $\frac{8}{3}$ h) 0
d) 11,25 i) –20,25
e) –2,8

Lösung 6.61

a) a = 5, a = –5
b) a = 3
c) a = 2,52
d) a = 6, a = 2
e) a = 2, a = –1
f) a = 2, a = –2

Lösung 6.62

a) k = 3
b) k kann jeden Wert annehmen
c) $k = \frac{17}{6}$

Lösung 6.63

a) bei ca. x = 3
b) 30,8 °C

Lösung 6.64

a) $r(t) = -t^3 + 9t^2 - 12t + 30$
b) 288 Pakete
c) 48 Pakete pro Minute
d) t = 4,7

Lösung 6.65

a) $q(t) = -0{,}25t^3 + 1{,}5t^2 + 4t$
b) 16 m^3/h
c) 5,06 h mit 12,64 m^3/h

Lösung 6.66

a) Nach 60 Min. noch 20 Personen
b) 50 Min.
c) 37
d) 22,86 %

Lösung 6.67

a) 4,5 c) 14,907 e) 12,5
b) 0,667 d) 23,358 f) 1,333

Lösung 6.68

a) 4,5 c) 4 e) $\frac{64}{3}$
b) $\frac{32}{3}$ d) 18,65 f) 24

Lösung 6.69

8

Lösung 6.70

a) 0 ; 4 d) 0 ; $\frac{8}{3}$
b) $-\frac{9}{8}$; $\frac{37}{24}$ e) $-\frac{125}{48}$; $\frac{129}{16}$
c) $\frac{20}{3}$; $\frac{28}{3}$ f) 0 ; 2

Lösung 6.71

a) 6,928 b) 3,083 c) 4,157

Lösung 6.72

a) 95,526
b) 40.120,92 Euro

Lösung 6.73

8

Lösung 6.74

4,05

Lösung 6.75

a) A(0|2), B(8|18)
b) 107,331 m^3
c) 37.500,03 Euro
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 6.76

a) $g(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1$
b) –5,625

Lösung 6.77

a) $S_1(2{,}09|5{,}56)$, $S_1(-2{,}09|5{,}56)$
b) 16,15 m^2

Lösung 6.78

a) $e(t) = \frac{11}{1920}t^3 - \frac{9}{80}t^2 + \frac{7}{12}t + \frac{1}{5}$
b) 0,775
c) e(3,562) = 1,109
d) siehe Lösungs-PDF

Lösung 6.79

a) $q(t) = -t^3 + 3t^2$
b) 2,25 L/s
c) q(2) = 4
d) 6,75 Liter

Lösung 6.80

a) 2 e) $-\frac{2}{3}$ i) $\frac{163}{60}$
b) $\frac{8}{3}$ f) $\frac{8}{15}$ j) 0,637
c) $\frac{1}{8}$ g) $\frac{16}{15}$
d) 3 h) 1

Lösung 6.81

a) 0; 9; 2,25
b) 4; –4; 0
c) –2; –1,375; 1,828
d) –1,2; 3,6; 0,525
e) 1; 1; 2
f) 0; 4; –0,5
g) 5; 5; 1
h) 0; 0; 0
i) 0,3; 1,9; 0,3
j) 1; 1; 2

Lösung 6.82

a) 8 N/cm^2
b) 5,1138 N/cm^2, 10,8878 N/cm^2
c) 36,09 %
d) p(4) = 6,56

Lösung 6.83

a) 14,4 µm
b) wird nicht erfüllt
c) d(0) = 9 µm
d) Sprühmarameter anpassen

Lösung 6.84

a) 45,239 d) 49,009
b) 54,454 e) 214,466
c) 576,377 f) 31,964

Lösung 6.85

a) 122,522 d) 70,372
b) 175,929 e) 70,372
c) 155,588 f) 45,763

Lösung 6.86

a) 10,139 Liter
b) $d_B = 4$ cm, $d_O = 25{,}6$ cm
c) $d_{max} = 36{,}603$

Lösung 6.87

a) 24.294,82 mm^2
b) 24,29 cm^3
c) 65,6 g

Lösung 6.88

a) 136,14 cm^3
b) genau 1 cm
c) 95,3 g

Lösung 6.89

a) 84,82 cm3
b) $d_{außen} = 5$ cm, $d_{innen} = 4$ cm
c) 2,54 Euro

Lösung 6.90

a) x = 0 cm mit 2 mm
b) mit 7,4 cm erfüllt
c) mit 0,739 Liter nicht erreicht
d) $V_M = 74{,}9$ cm^3
e) 78,645 g

Lösung 6.91

a) mit 6,4 cm nicht erfüllt
b) 1,53 kg
c) 10,22 Euro
d) mit 2553,74 Euro erfüllt
e) zwischen 5,83 cm und 14,17 cm



10.1 BILDNACHWEISE

Umschlag ChatGPT; **11** ChatGPT; **21** ChatGPT; **39** ChatGPT; **41** ChatGPT; **43** ChatGPT; **45** Gemini (Nano Banana); **49** Gemini (Nano Banana); **51** ChatGPT; **59** ChatGPT; **63** ChatGPT; **65** https://www.taxi-dortmund.de/html/tarife.php, abgerufen am 15.04.2025; **67** ChatGPT; **68** ChatGPT, ChatGPT; **69** ChatGPT; **70** ChatGPT; **71** ChatGPT; **73** ChatGPT; **75** ChatGPT; **79** ChatGPT; **83** ChatGPT; **85** ChatGPT; **87** ChatGPT; **87** ChatGPT; **91** ChatGPT, ChatGPT; **92** Sebastian Wenner; **93** ChatGPT; **95** ChatGPT; **103** ChatGPT; **106** "Sydney Harbour Bridge", Wikimedia Commons, Urheber: Kim, Lizenz: CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sydney_Harbour_Bridge_(175646611).jpeg zugeschnitten, "Γεφύρι της Πλάκας", Wikimedia Commons, Urheber: Lutravidra, Lizenz: CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Γεφύρι_της_Πλάκας.jpg zugeschnitten; **107** Gemini; **110** Gemini; **111** Gemini; **115** "Yangtze River Bridge", Wikimedia Commons, Urheber: User: Rrm998, Lizenz: CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:YangtzeRiverBridge_(2).jpg zugeschnitten; **121** Gemini; **123** Gemini; **125** ChatGPT; **127** ChatGPT; **127** Deutsche Bundesbank, Frankfurt; **135** ChatGPT; **137** Google AI Studio; **139** "Storebæltsbroen", Wikimedia Commons, Urheber: Alan Francis, Lizenz: CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Storebæltsbroen-2011-27-05.jpg zugeschnitten; **139** Die vier Brückenzeichnung sind zwar abgeändert, basieren jedoch auf einer Quelle unbekannten Ursprungs. Bei urheberrechtlichen Ansprüchen wird die Quelle selbstverständlich ergänzt oder das Material entfernt; **139** "Devil's Bridge of Germany", Wikimedia Commons, Urheber: Frank Wittig, Lizenz: CC BY-SA 2.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Devil%27s_bridge_of_germany_-_Flickr_-_Frank_Wittig.jpg zugeschnitten; **141** Sebastian Wenner; **141** "Carrick-a-Rede Rope Bridge, Northern Ireland", Wikimedia Commons, Urheber: Diliff, Lizenz: CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carrick-a-Rede_Rope_Bridge,_Northern_Ireland_-_Diliff.jpg zugeschnitten; **142** ChatGPT; **143** ChatGPT; **143** "Koepchenwerk am Hengsteysee", Wikimedia Commons, Urheber: Tbachner, Lizenz: CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Koepchenwerk_am_Hengsteysee.jpg zugeschnitten; **143** Sowohl die (abgeänderte) Aufgabenstellung als auch die Zeichnung zum Koeppchenwerk basieren auf einer Quelle unbekannten Ursprungs. Bei urheberrechtlichen Ansprüchen wird die Quelle selbstverständlich ergänzt oder das Material entfernt; **144** Sebastian Wenner; **144** Sebastian Wenner; **144** Sowohl die (abgeänderte) Aufgabenstellung als auch die Zeichnung zum Pumpwerk Westhofen basieren auf einer Quelle unbekannten Ursprungs. Bei urheberrechtlichen Ansprüchen wird die Quelle selbstverständlich ergänzt oder das Material entfernt; **144** Sowohl die (abgeänderte) Aufgabenstellung als auch die Zeichnung zur Turnhalle basieren auf einer Quelle unbekannten Ursprungs. Bei urheberrechtlichen Ansprüchen wird die Quelle selbstverständlich ergänzt oder das Material entfernt; **144** "Berliner Bogen", Wikimedia Commons, Urheber: Stefan Imhoff, Lizenz: CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Berliner_Bogen_-_panoramio_(2).jpg zugeschnitten; **145** ChatGPT; **145** ChatGPT; **146** Fußballspieler: kosonicon@Flaticon.com; **146** Tennisspieler: Culmbio@Flaticon.com; **147** "Turm der Heilig-Kreuz-Kirche in Gelsenkirchen, von Südwesten", Wikimedia Commons, Urheber: Jörg Wiegels, Lizenz: CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turm_der_Heilig-Kreuz-Kirche_in_Gelsenkirchen,_von_Suedwesten.jpg zugeschnitten **147** Figur Fosbury-Flop: Diese Darstellung basiert auf einer Quelle unbekannten Ursprungs. Bei urheberrechtlichen Ansprüchen wird die Quelle selbstverständlich ergänzt oder das Material entfernt; **149** ChatGPT; **151** https://www.adidas.de/superstar-schuh/IH8659.html abgerufen am 15.04.2025; **152** https://www.siemens-home.bsh-group.com/de/de/product/kaffeemaschinen/kaffeevollautomaten/eq900/TQ903D03 abgerufen am 15.04.2025; **157** ChatGPT; **161** ChatGPT; **171** ChatGPT; **173** ChatGPT; **174** ChatGPT; **175** ChatGPT; **177** ChatGPT; **179** ChatGPT; **183** ChatGPT; **191** ChatGPT; **193** ChatGPT; **201** ChatGPT; **207** ChatGPT; **211** ChatGPT; **218** ChatGPT; **219** ChatGPT; **221** Robin Klose; **221** ChatGPT; **224** ChatGPT; **225** ChatGPT; **231** ChatGPT; **235** ChatGPT; **239** Baum-Icons: Freepik@Flaticon.com; **240** "Berliner Bogen", Wikimedia Com-

mons, Urheber: Stefan Imhoff, Lizenz: CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Berliner_Bogen_-_panoramio_(2).jpg zugeschnitten;

DAS MATHEBUCH – erstellt von Sebastian Wenner. Alle Rechte vorbehalten. Das Buch als kostenloser PDF-Download auf **dasmathebuch.de**

